

有限群の自己同型と指標について

兵庫教大 松山 廣 (Hiroshi Matuyama)

G を有限群, α を G の自己同型とし, $\Gamma = G \langle \alpha \rangle$ (半直積) とおく。又 $H = G(1)$ とし, $h_1 = 1, h_2, \dots, h_\alpha$ を H の共役類の代表系とする。さらに, $X(h_i) = \{g'h_i g^n \mid g \in G\}$, $i=1, 2, \dots, \alpha$, とおく。特に $X = X(h_1)$ とする。

定義 $G = \bigcup_{i=1}^{\alpha} X(h_i)$ のとき, α を quasi-coprime automorphism of G といい (以下略して, α c. a. と書く)。

α c. a. については, 以下の事実が成立する。

(i) $n = n_1, n_2, \dots$, n_i を n の Γ に於ける共役全体とする。 n が G の α c. a. である条件は $Gn = \bigcup_{i=1}^{\alpha} G(n_i)n_i$ となることである。又 n のとき, 和 $\bigcup_{i=1}^{\alpha} G(n_i)n_i$ は disjoint sum となる。

(ii) n の位数と H の位数が互いに素ならば, n は α c. a. である (逆は成立しない)。

(iii) α を G の α c. a. とすると, 次のことが成立する。

(1) 和 $\bigcup_{i=1}^{\alpha} X(h_i)$ は disjoint sum である。

(i) $\langle \alpha^m \rangle = \langle \alpha \rangle$ とする α^m も G の g.c.a. である。

(ii) H の 2 元が G で共役であるならば, H で共役である。

さて $\text{Irr}_n(G)$ が G の複素既約指標の $\mathbb{C}$ -不変系の全体のなす集合を表すとする。今, $\text{Irr}_n(G) = \{\chi_1 = 1, \chi_2, \dots, \chi_\beta\}$ とおく。Brauer により, β は $\mathbb{C}$ -不変系 G の共役類の個数と一致する。 α が g.c.a. のとき, $\alpha = \beta$ が示される。

定義 $\chi \in \text{Irr}_n(G)$ の p への拡張 χ^* と $\langle \alpha \rangle$ の生成元 α^m によって定まる H 上の類関数 $\psi(\chi^*, \alpha^m)$ を $\psi(\chi^*, \alpha^m)(h) = \chi^*(h\alpha^m)$ ($h \in H$) で定義する。

定義 $\alpha = \beta$ と仮定する。 $\text{Irr}_n(G)$ から $\text{Irr}_n(H)$ への bijection π が次の条件を満たすとき, Glauberman 対応 (w.r.t. α) という。「 $\chi \in \text{Irr}_n(G)$ とする。 χ の任意の p への拡張 χ^* に対して $\psi(\chi^*, \alpha)$ は, $\pi(\chi)$ のスカラー (0 でない) 倍である。」

Glauberman は [1] で, $|M| \leq |G|$ が素数とき (本質的に, $|M|$ と $|H|$ が素数とき) Glauberman 対応の存在を示した。しかし, Glauberman 対応の成り立つ自己同型は次の様に特徴づけられる。

定理 A. α が G の g.c.a. である条件は Glauberman 対応が存在することである。

さらに [1] で示された (作用群が巡回群の場合の結果のほとんどが, α が g.c.a. であるという仮定のもとで成立する。

定理 B. $\theta \in G$ の f.c.d. とする。 π を Glauberman 対応とし $\pi(\chi_i) = \theta_i, i=1, 2, \dots, \alpha$ とおく。次のことが成り立つ。

(i) χ_i の P の拡張 χ_i^* で、 $\langle \chi_i \rangle$ の生成元 θ_i の系 θ_i 集合上 θ_i 一定値 $\varepsilon_i(\theta_i)$ をとるものが一意に存在する、ここで ε_i は $|H|$ が奇数なら ± 1 で $|H|$ が偶数なら $\pm i$ である、 $i=1, 2, \dots, \alpha$ 。

各 $\chi_i \in \text{Irr}_\theta(G)$ に対して、 (i) により一意に定まる P の拡張を canonical extension ということにする。

(ii) $\chi(\chi_i^*, \theta_i^m)$ も $\pi(\chi_i)$ の (0 でない) スカラー値である。但し、 θ_i^m は $\langle \chi_i \rangle$ の生成元で、 χ_i^* は χ_i の拡張とする。

(iii) θ の位数が素数 P の中とする、

$$[\chi_i|_H, \theta_j]_H \equiv \delta_{ij} \varepsilon_i \pmod{P}, \quad 1 \leq i, j \leq \alpha$$
 である。但し、 δ_{ij} は Kronecker の記号、 ε_i は (i) で定まるもの。

(iv) $\chi_i(\theta_i)$ は $t(\theta_i)$ を割り切る、 $i=1, 2, \dots, \alpha$ 。但し、 $t = |G:H|$

(v) χ_i^* を χ_i の Canonical extension とし、 R_i^* を χ_i^* を与える P の表現とみる、又 $R_i = R_i^*|_G$ とおく、 $i=1, 2, \dots, \alpha$ 。このとき、

$$R_i(\hat{\chi}) = \varepsilon_i t(\theta_i) / \chi_i(\theta_i), \quad R_i^*(\theta_i), \quad i=1, 2, \dots, \alpha.$$

が成り立つ。但し、 $\hat{\chi} = \sum_{\chi \in G} \chi \in \mathbb{C}[G]$ である。

(注意) 定理 B の (v) で定義した Canonical extensions は、 Glauberman [1] の意味での Canonical extensions とは必ずしも一致しないが、 θ の位数が奇数で、 $|H|$ が素数の場合 θ の位数が素数のときは一致することが示される。

G の既約指標 χ の θ -不変かどうかは、次の系 C により判定できる。

系 C. $\chi \in G$ の既約指標とする。 χ が θ -不変となる条件は、 $\chi(\chi) \neq 0$ となることである。(組 1. の G は $G \cap Z.C.Q.$ とする。)

以上の証明は [2] で発表する予定です。

[1]. G. Glauberman; *Correspondences of characters for relatively prime operator groups*, *Canad. J. Math.* 20 (1968) 1765-1788.

[2] H. Matsuyama; *Quasi-co-prime automorphisms and the Glauberman correspondence of finite groups*, preprint.