

Semi-linear な拡散方程式の解の漸近的性質

阪大理 池田 信行

1°. 簡単な Semi-linear な方程式の解 $u(t, x)$ について,
 71 年の時の性質に関する 2, 3 の注意をのべる。これらの多くは
 亀高 惟倫, 渡辺 信三 両氏との討論に負っている。

2°. まづ良く知られていることを簡単に要約したい。
 1 個の分裂現象の模型として用いられる分枝グラウン運動を
 決める方程式はつぎの形の semi-linear な拡散方程式である。

(例として Ikeda-Nagasawa-Watanabe [6])。

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u + G(u) - u \\ u(0, x) = f \end{cases}, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d,$$

ここで G は $G: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^1$ の形で作ることができる。

$$(2) \quad G(s) = \sum_{n \geq 2} p_n s^n, \quad p_n \geq 0, \quad \sum_{n \geq 2} p_n = 1.$$

$v = 1 - u$ とおけば, これはつぎの方程式を満たす。

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta v + \bar{H}(v) \\ v(0, x) = f \end{cases}, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d,$$

ここで $\bar{H}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^1$ はつぎの形で決えられる。

$$(4) \quad \bar{F}(\xi) = 1 - \xi - G(1 - \xi)$$

いま $\sum_{n \geq 2} n p_n < \infty$ の場合を考えると, この $\bar{F}$ はつぎの性質を持つている.

$$(5) \quad \begin{cases} (a) & \bar{F}(0) = \bar{F}(1) = 0, \quad \bar{F}(\xi) > 0, \quad \xi \in (0, 1), \\ (b) & \bar{F}'(\xi) \downarrow, \quad \alpha = \bar{F}'(0) > 0. \end{cases}$$

この性質を持つた方程式 (3) は早くも 1937 年に Kolmogorov-Petrovsky-Piscounoff [8] によつて生物の問題に関連して取扱われている. この方程式についていくつかの問題が示されたが, $\alpha > 0$ で取扱うのは Abrahams-Tsuneto [1] に関連したつぎのことである. f を $0 \leq f \leq 1$, $f \neq 0$ なる連続関数とする時, 方程式 (3) の解 $u(t, x)$ について

$$(6) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = 1$$

となるか. この事実は (5) よりやや弱い条件の $\bar{F}$ に対して Kanelli [7] (1964, Theorem 2) で肯定的に示されている. また分枝ブラウン運動についての極限定理からも自動的に示される (S. Watanabe [10], [12]). また S. Watanabe [11] の示す「便法」は「有界領域の問題に近似する方法」で Kanelli [7] と独立に示される. (亀高-池田).

3°. $\alpha > 0$ の注意はついても (6) 式が成り立つ事情は

ついでのことであるが、簡単のため $d=1$ の時をえ、(3)

を下記の形に変えてみる。

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u - c \frac{\partial u}{\partial x} + F(u), \\ u(0, x) = f(x), \end{cases} \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}.$$

この場合 $c \neq 0$ と $c=0$ の場合で (6) に属する事情が非常に異なる。今は常に $0 \leq f \leq 1$ とする。

[I] $\alpha \leq \frac{c^2}{2}$ の時。

(a) f が連続で、 $\text{Supp}(f)$ が compact なとき

$$(8) \quad \lim_{t \uparrow \infty} u(t, x) = 0$$

$$(b) \quad \frac{1}{2} \Delta u - c \frac{\partial u}{\partial x} + F(u) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 1$$

の解 $u_0(x)$ (確かに存在する。Kolmogorov-Petrovsky-Piscounoff

[8]) により、

$$f(x) = u_0(x) + w(x), \quad 0 \leq f \leq 1, \quad w(x) \geq 0, \quad \text{Supp}(w) : \text{compact}$$

と表わせることがいふ

$$\lim_{t \uparrow \infty} u(t, x) = u_0(x)$$

となる。

[II] $\alpha > \frac{c^2}{2}$ の時。 $c=0$ の時、すなわち 2° の $\beta = \alpha$ と

が成り立つ。

このことは (7) に対応する分枝マルコフ過程でいけば直観的に説明が出来る。(7) の場合も、[I] の条件の下です、

$1 > \beta \equiv \beta > 0$ ならば (6) が成り立つ。このことは $\mathbb{R}^1$ 全体にいる粒子数は $c=0$ の時と同じで時間 t と共に無限大に近づく。ところが [I], (a) の事実はある compact な集合にいる時間 t における粒子数 N_t は $t \rightarrow \infty$ の時 0 に近づくことに対応している。実は粒子が生じるのは 20 の $c=0$ の時と同じにおきるのだが, drift の力で無限遠長には逃げ去ってしまう compact な集合の中からは消えてしまうことである。このことは一般の分枝マルコフ過程で平均個数の方程式, すなわち基本方程式の群型近似に対応する半群 H_t によつて, $H_t 1 = 1$ なる t critical とすることが必ずしも適当でないことを示している。先にはのべた [I], [II] の場合わけはつぎの事実に基づいている。方程式 (7) の群型部分

$$(9) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u - c \frac{\partial u}{\partial x}$$

の基本解が

$$(10) \quad p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y-ct)^2}{2t}}$$

で与えられ, 任意に固定して $x, y \in \mathbb{R}^1$ にとりて,

$$(11) \quad \mu \equiv \mu(x, y) = \sup \left\{ \lambda; \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} p(t, x, y) = 0 \right\}$$

とおけば, $\mu = \frac{c^2}{2}$ となる。こう考えると [I] にはのべた事

情はもつと一般に存在する。例えは

4°. Lobachevskii 平面の場合。いま上半平面 M を
Laplace-Beltrami 作用素

$$(12) \quad \Delta = x_2^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right), \quad x = (x_1, x_2) \in M,$$

を考へる。この Δ と (5) とおいた F に対する方程式 (3) を
考へる。この時、

[I]', $\alpha \leq \frac{1}{2}$ の時。[I], (a) と同じことが成り立つ。

[II]', $\alpha > \frac{1}{2}$ の時。 $0 \leq f \leq 1$, $f \neq 0$ が連続ならば

$$(13) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) > 0, \quad x \in M,$$

と成る。

この事実の証明には (12) の Δ に対する熱方程式の基本
解が

$$(14) \quad p(t, x, y) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}}{(2\pi t)^{3/2}} \int_0^\infty \frac{b e^{-b^2/2t} db}{\sqrt{\cosh b - \cosh p(x, y)}}$$

$p(x, y)$: hyperbolic distance

で与えられることが重要である。(McKean [9]). (14) を使え

ば, (11) の μ はこの場合は $1/2$ と成る。この場合
も分枝マルコフ過程を用いて [I]' の事情の説明は S. Watanabe
[22] の結果によつて出来る。

5°. (5) 式の (b) の条件は 2° 2' のべ T による分枝マルコフ過程の立場で示さるゝと必然性があった。その他にも応用上はしばしば自然な条件として現われ、Kolmogorov-Petrovsky-Piscounoff [8] 以来、しばしば用いられてゐる。しかし方程式を形式的に考え、やはり T の結果の方から注目すれば必ずしも示さなくして論じられることが多し。Fujita [2] は Gelfand [3] に関連してその種の 1 つの事情を明らかにしてゐる。(6) の性質に関連しても (5) 式で (a) だけを残して条件 (b) を取去った時にどうなるか問題になる。そのために (6) の性質を保証させる事情をもう少し分解してみよう。

(i) まづ特型部分の基本解を $p(t, x, y)$ とするとき、まづ初期条件 f とし、 $\exists x_0, \exists y_0: \forall y \geq y_0, \forall A > 0: \int_0^A f(x) = A p(t, x, x_0)$ に等して (6) を示せば充分である。

(ii) $y (\geq y_0)$ を充分大きくとれば初期条件

$$f(x) = A p(t, x, x_0)$$

に等し、

$$\exists t_0 > 0, \exists A(t): A(t) \uparrow t \in [0, t_0], A(0) = A$$

$$(15) \quad u(t, x) \geq A(t) p(t, x, x_0), \quad t \in [0, t_0].$$

この (ii) の事実は Hayakawa [4], 杉谷 [10] によつて Fujita [2] の結果に関連して用いられたものである。この事実は (6) の性質に限らず、semi-linear な方程式の解の漸近的性質の考察

にこの基本的な役割を果たすことを加える。この (15) は次のようにして示される。積分方程式の問題に対すると、

$$u(t, x) = A p(x+t, x, x_0) + \int_0^t \int p(s, x, y) F(u(t-s, y)) ds m(dy)$$

とある。 $z = z''$ 比較定理により

$$(16) \quad \begin{aligned} u(t, x) &\geq A p(x, x, x_0) + \int_0^t H(s, x; x, t) ds \\ H(s, x; x, t) &= \frac{\partial}{\partial s} p(s+x, x, x_0) A + \int p(s, x, y) F(A p(x+t-s, y, x_0)) m(dy) \end{aligned}$$

とある。 $z = z''$, 且し $\exists t_0 > 0$ z''

$$(17) \quad H(s, x; x, t) \geq B(s, x; x, t) A p(x, x, x_0), \quad B(s, x; x, t) > 0, \quad 0 < s \leq t \leq t_0,$$

ならば (15) が保証される。例えば 2° の場合 z'' (5) の (b) が成立するならば、つぎのようにして (17) が保証される。

$K < \alpha$ なる任意の $K > 0$ に固定する。 z のとき、

$\exists \delta_0 : \delta_0 > 0, \quad F(z) \geq K z, \quad z \in [0, \delta_0]$ 。 $x > d\sqrt{2}/K$ とする。

一般性を失わず $K > b = \sup A p(x, x, 0)$ とする。 $||$ 共

$dv/dt = F(v), \quad v(0) = b$ の解 $v(t) = \bar{v}(t) \leq z$, $t_1 = \inf \{t; v(t) = \delta_0\}$

とおけば、 $t_0 = t_1 \wedge x$ により z のことを言える。

$$(18) \quad \begin{aligned} H(s, x; x, t) &\geq A \left\{ \left[\frac{x^2}{(s+x)^2} - \frac{d}{2} \frac{1}{s+x} \right] \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{s+x}} + K \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{s+x}} \right\} p(x, x, 0) \\ &\geq \left\{ \frac{K}{\sqrt{2}} - \frac{d}{2x} \right\} A p(x, x, 0), \quad 0 < s \leq t \leq t_0 \end{aligned}$$

よって (17) が成り立つ。

この考察からわかる通り (5) 式の条件 (b) は充分すぎる。
また (15) の主張のためには, その内容から F の $\xi=0$ の近
傍での挙動のしかるべきである。

いま (11) 式の μ が x, y に関係しない定数としてきま
るときは, 多くの場合には (5) 式 (b) との間に

$$F'(0) > \mu, \quad F'(0) < \mu$$

の二つの場合がある。(15) に対する事情は比較的に簡単である。

とくに詳しく考察を要するのは $F'(0) = \mu$ のときである。あ
る $\delta_1 > 0$ に対して,

$$(19) \quad F(\xi) = \mu \xi + F_1(\xi), \quad \xi \in [0, \delta_1], \quad F_1'(0) = 0$$

の時に, F_1 にどのような条件をあげば (5) が成り立つかが
問題である。早川 [6] は最近 (3) の場合には (15) のための F_1 に
対する充分条件を与え, (6) の性質と Fujita [2] の結果の
両方に共通する特徴を導いている。コンパクトな多様体の場
合, $\mathbb{R}^d$ の有界領域の場合, Lobachevskii 空間の場合等には具
体的にしろべとみると, (15) のための F_1 についての条件は
何々の場合で非常に違ってきて, 関数 $k(t, x, y) = e^{\mu t} p(t, x, y)$
の性質が密接に関連して来る。

- [1] E.A.Abrahams-T.Tsuneto . Phys. Rew. 152 (1966) .
- [2] H.Fujita. Proc. Symp. Pure Math. A.M.S. 18 .
- [3] I.M.Gelfand . Amer. Math. Soc. Transl. (2) 29(1963).
- [4] K.Hayakawa . Proc. Japan Acad. 49 (1973) .
- [5] 早川 款達郎 . 未発表
- [6] N.Ikeda-M.Nagasawa-S.Watanabe. Jour. Math. Kyoto Univ.
8(1968) , 9(1969) .
- [7] Ya.I. Kaneli . Mat. Sbornik 65(1964).
- [8] A.N.Kolmogorov-I.G.Petrovsky-N.Piscounoff. Bull. Moscow
Univ. 1(1937) .
- [9] H.P.McKean . Comm. pure and app. Math. 25(1972).
- [10] 杉谷 貞男 . 阪大セミナーの報告
- [11] S.Watanabe . Jour. Math. Kyoto Univ. 4 (1965) .
- [12] S.Watanabe . Markov processes and Potential theory
edited by J. Chover. 1967 .