

Irreducibility of a class of 3-manifolds

神戸大 理 高橋 敬介

3-sphere S^3 内の knot K に沿った係数 $r \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ の Dehn-surgery により得る orientable closed 3-manifold を $M(K:r)$ とかくことにする ([6] Ch9.)。

このとき、次の問題が考えられる。

Problem 1. いつ、 $M(K:r)$ は irreducible となるか？

これに関する結果として、例えば、knot K が

- (i) composite knot ([3])、
- (ii) $(2, \square)$ -torus knot を除く 2-bridge knot ([2])、
- (iii) $(2, \square)$ -torus knot を除く alternating knot ([4])

のそれぞれの場合については 任意の $r \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ に対して $M(K:r)$ は irreducible であることがわかっている。

一方、irreducible にならない例として知られているのは

trivial knot に沿った係数 0 の Dehn-surgery と、 (p, q) -cable knot (torus knot も含む) に沿った係数 pq の Dehn-surgery の場合だけである ([5], [1])。

本稿の目標は $M(K; r)$ が irreducible かつ sufficiently-large となるための (十分) 条件を求め、任意の non-trivial Dehn-surgery により常に irreducible かつ sufficiently-large な 3-manifold が得られる knot の class として上記 (i), (ii), (iii) 以外のものを見つけることである。なお、本稿の内容は [7] を要約したものであり、議論はすべて PL-category で進める。

Definition. knot K の exterior $X (= S^3 - N(K))$ 内に次の条件 (1), (2) をみたす properly embedded planar surface F が存在するとき、 K は性質 $\mathcal{F}(p)$ をもつという。

(1) F は X で incompressible かつ ∂ -incompressible である。

(2) ∂F の各成分は (p, q) -curve である。

(つまり、 $p \cdot (\text{longitude}) + q \cdot (\text{meridian})$ in $H_1(\partial N(K))$)

さらに、次の (3) もみたすとき、 K は性質 $\mathcal{F}_n(p)$ をもつという。

(3) ∂F の成分の個数は n である。

また、この F を性質 $\mathcal{F}(p)$ (or $\mathcal{F}_n(p)$) を与える surface ということにする。

次は性質 $\mathcal{F}(\mathfrak{g}/p)$ と $M(K:\mathfrak{g}/p)$ の irreducibility を関係づける基本的な補題である。証明は次の命題とも略す。

Lemma. knot K が性質 $\mathcal{F}(\mathfrak{g}/p)$ をもたないならば $M(K:\mathfrak{g}/p)$ は irreducible である。

Proposition 1. $K \subset S^3$ を knot, $p, \mathfrak{g}$ を coprime integers とする。

(1) K が性質 $\mathcal{F}_1(\mathfrak{g}/p)$ をもつ

$\iff K$ は trivial knot かつ $\mathfrak{g} = 0$

(このとき、 $M(K:\mathfrak{g}/p) \cong S^2 \times S^1$)

(2) K が性質 $\mathcal{F}_2(\mathfrak{g}/p)$ をもつ

$\iff$ 次の (2.1), (2.2) のいずれか一方が成立する。

(2.1) K は composite knot で $p = 0$

(2.2) knot K' と coprime integers r, t が存在して、 K

は K' を companion とする (r, t) -cable knot で

$\mathfrak{g}/p = rt$ かつ $|r| \geq 2$ である。さらに K' が

trivial knot のときは $|t| \geq 2$ である。

(このとき、 $M(K:\mathfrak{g}/p) \cong M(K':\mathfrak{g}/r) \# L(r, t)$)

これより、性質 $\mathcal{F}_n(\mathfrak{g}/p)$ をもつ knot は $n=1, 2$ のときには完全に characterize されているが、 $n \geq 3$ のときにはまだよくわ

から正しい。

Problem 2. $n \geq 3$, $p \neq 0$ のとき、性質 $\mathcal{F}_n(\mathbb{Q}/p)$ をもつ knot は存在するか？

Problems 1, 2 に関係した定理を述べる。

Theorem. knot K が性質 $\mathcal{F}_n(\mathbb{Q}/p)$ (ただし、 $n \geq 3$) をもち、これを与える surface を $F \subset X = S^3 - \dot{N}(K)$ とする。
もし、 X を F で切り開いて得られる compact 3-manifold の成分の中に ∂ -irreducible なものがあれば、 $\mathbb{Q}/p$ と異なる任意の $\frac{1}{r} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ に対して K は性質 $\mathcal{F}_n(\frac{1}{r})$ をもたない。
従って、 $M(K; \frac{1}{r})$ は irreducible である。
さらに、 $r \neq 0$ のとき $M(K; \frac{1}{r})$ は sufficiently-large である。

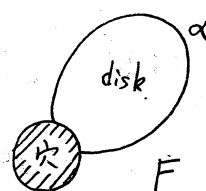
outline of proof) X を F で切り開いて得られる ∂ -irr. な成分を X' とおく。仮りに、 K が性質 $\mathcal{F}_n(\frac{1}{r})$ をもつとし、これを与える surface を F' とおく。このとき、 $F \cap F'$ の成分は arc または simple closed curve としてよく、そのうち $A = \{\text{arcs}\}$ とおく。 $n \geq 3$ 、 $F: \partial$ -incomp. を使うと、簡単な議論により、 $F' - A$ の成分の中に boundary が 1 つの cycle であるようなもので、

X' に含まれるものがみつかる。その closure を D とおくと、 D は disk で、 X' は ∂ -irr. だから $\partial D \simeq 0$ in $\partial X'$.

よって、 ∂D は $\partial X'$ で disk を bound する。これより、 ∂D の一部で A の成分である arc α で、 F において下図のようになっているものがみつかる。これは F' が

∂ -incomp. であることに反する。

$r \neq 0$ のときは、 $\partial X'$ が 2-sided incompressible surface となっており、 $M(K; r/2)$ は sufficiently-large である。□



Definition. Theorem の条件で $p=0$, $n=4$ の場合をみたす knot 全体の class を $\mathcal{K}$ とかくことにする。

Corollary 1. $K \in \mathcal{K}$ とする。このとき、任意の $r \in \mathbb{Q}$ に対して K は性質 $\mathcal{P}(r)$ をもたず、 $M(K; r)$ は irreducible かつ sufficiently-large である。

Corollary 2. 任意の knot $K \in \mathcal{K}$ は Property R をもつ。

Corollary 3. 任意の knot $K \in \mathcal{K}$ は Property P をもつ。

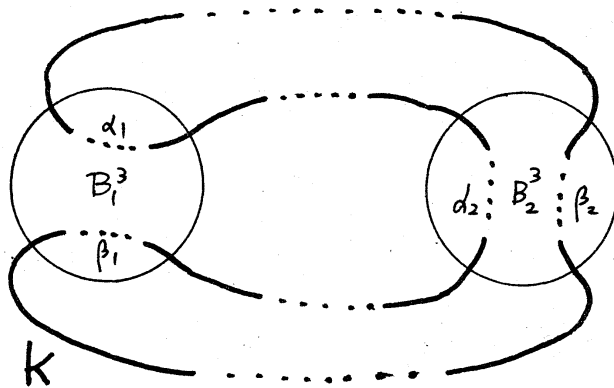
次に $\mathcal{K}$ に属する knot の構成について考える。

α_i, β_i を 3-ball B_i^3 に embed された arcs ($i=1,2$) で、次の条件をみたすものとする。

(*) $B_i^3 - N(\alpha_i \cup \beta_i)$ の closure は ∂ -irreducible である。

(**) $i_*: \pi_1(\partial B_2^3 - (\partial \alpha_2 \cup \partial \beta_2)) \rightarrow \pi_1(B_2^3 - (\alpha_2 \cup \beta_2))$ は injective である。

このとき、 B_1^3, B_2^3 を S^3 の中に互いに disjoint に embed し、下図のように $B_1^3 \cup B_2^3$ の外で、 α_i, β_i ($i=1,2$) の端点を 4 本の arcs で任意に結んで得られる knot K は $\mathcal{K}$ に属する。

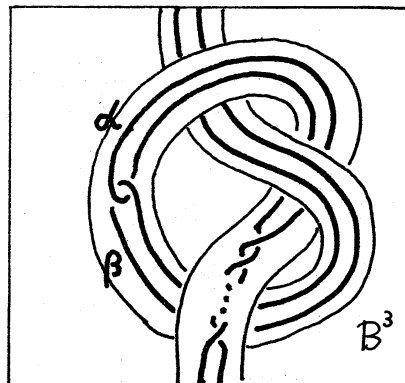
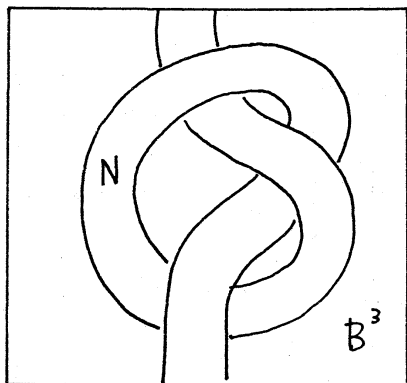


逆に、 $\mathcal{K}$ に属する任意の knot は上記の方法で得られる。

以下において、3-ball と 2 本の arcs との pair $(B^3, \alpha \cup \beta)$ で条件(*) または (**) をみたすものの例を与える。ただし、その証明は略す。

Remark. (*) をみたす $\Rightarrow$ (**) をみたす。

Example 1. 条件 (*) をみたす例。

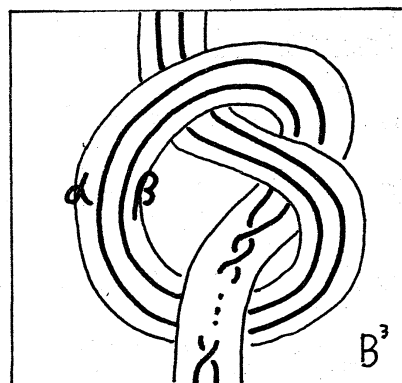


knotted arc の regular nbd. N を考える。

N の中に α, β を上図のように入れる。

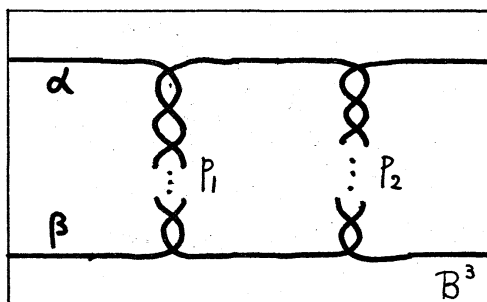
Example 2. 条件 (**) をみたす例。

Example 1. と同様に. knotted arc の reg. nbd. N の中に右図のように α, β を入れる。

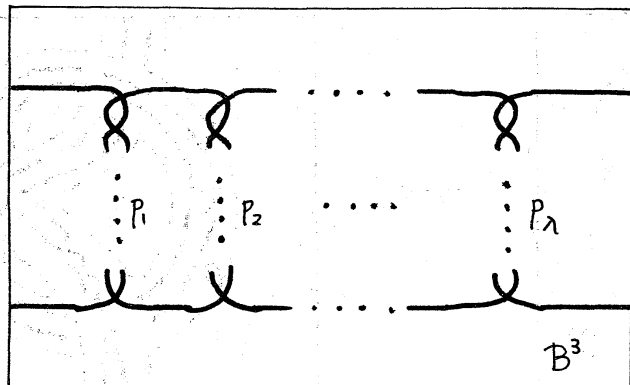


Example 3. 条件 (*) をみたす例。

$$|P_1| = |P_2| \geq 2$$



Example 4. 条件 $(**)$ をみたす例。



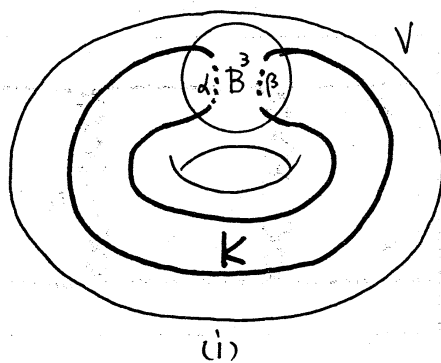
$|p_1|, |p_2|, \dots, |p_n|$ のうち
2以上のものが、2つ以上
ある。

最後に、 $\mathcal{K}$ に属する knot の例を与える。

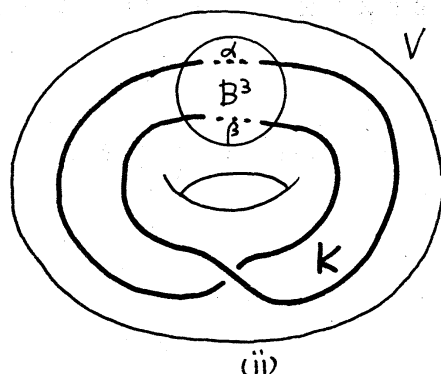
Proposition 2. $(B^3, \alpha \cup \beta)$ が 条件 $(*)$ をみたし、 K を solid torus V 内の knot で 図1の(i)または(ii)のものとする。

また、 $\tilde{K} \subset S^3$ を non-trivial knot、 $h: V \xrightarrow{\cong} N(\tilde{K})$ を homeo. とする。このとき、 $h(K) \in \mathcal{K}$ である。

proof) $(S^3 - h(\dot{B}^3), h(K) \cap (S^3 - h(\dot{B}^3)))$ は Example 2 より、条件 $(**)$ をみたすから。□



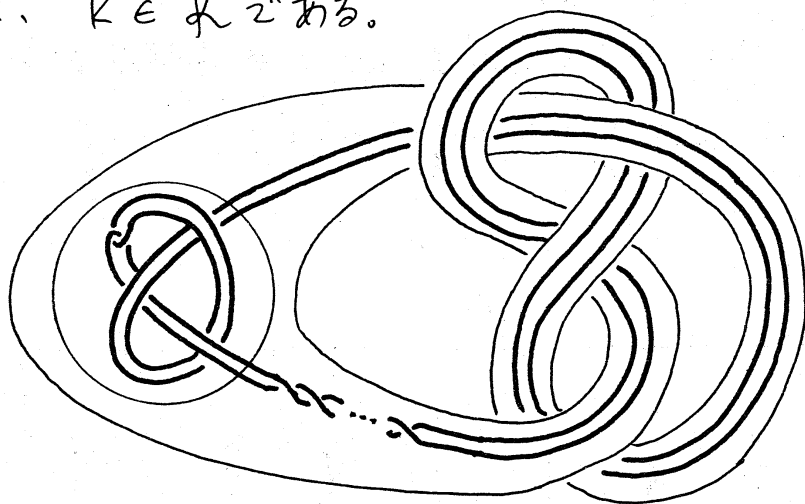
(i)



(ii)

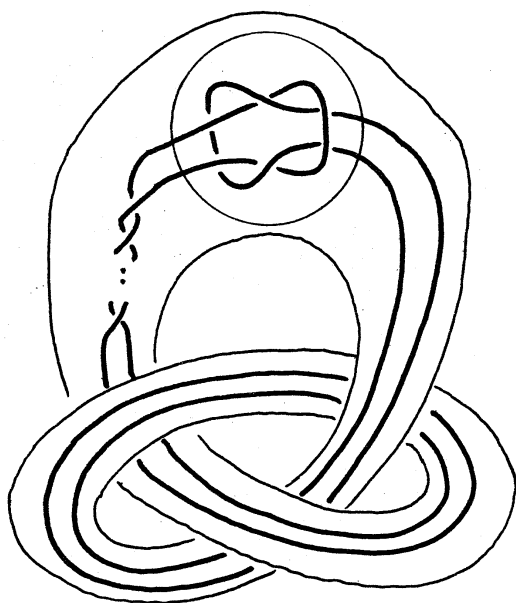
図 1.

Example 5. K が composite knot を companion とする doubled knot のとき、 $K \in \mathcal{K}$ である。



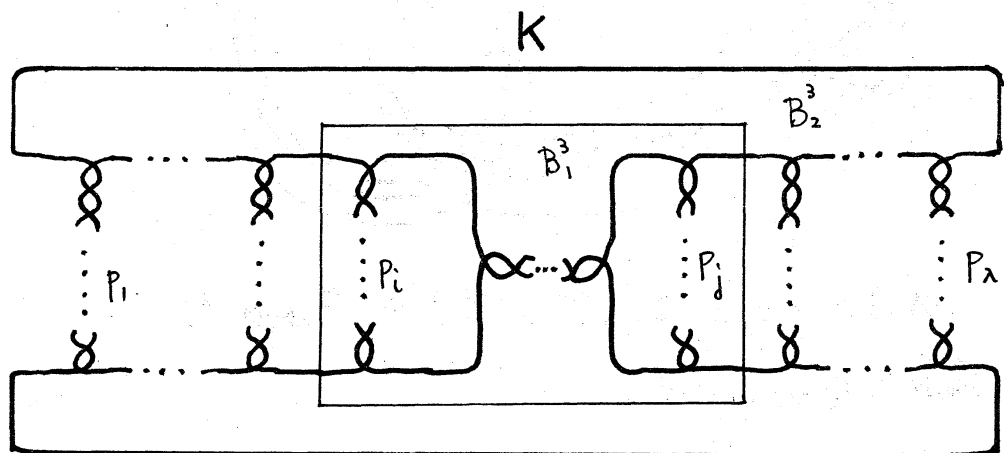
これは、Prop. 2. の $(B^3, \alpha \cup \beta)$ が Example 1. のものである場合になっている。

Example 6. Prop. 2. の $(B^3, \alpha \cup \beta)$ が Example 3. のものである場合、特に下図のような Whitehead's double は $\mathcal{K}$ に属する。



Example 7. $p_1, p_2, \dots, p_\lambda$ が次の条件 (i), (ii) をみたすとき、pretzel knot $K(p_1, p_2, \dots, p_\lambda) \in \mathcal{K}$ である。

- (i) $|p_1|, |p_2|, \dots, |p_\lambda|$ のうち 2 以上のものが 4 個以上ある。
- (ii) $|p_i| = |p_j|$ か $|p_k| = 1$ ($i < k < j$) をみたす $i < j$ が存在する。



$(B_1^3, K \cap B_1^3)$ は Example 3 より 条件(*)をみたす。

$(B_2^3, K \cap B_2^3)$ は Example 4 より 条件(**)をみたす。

— References —

- [1] C. McA. Gordon : Dehn surgery and satellite knots, preprint.
- [2] A. Hatcher, W. Thurston : Incompressible surfaces in 2-bridge knot complements, to appear.
- [3] W. Jaco, R. Myers : An algebraic determination of closed orientable 3-manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 253 (1979). 149 - 170.
- [4] W. Menasco : Incompressible surfaces in the complement of alternating knots and links, preprint.
- [5] Moser : Elementary surgery along a torus knot, Pacific. J. Math., 38 (1971) 737-745.
- [6] D. Rolfsen : Knots and Links, Math. Lecture Series 7, Publish or Perish Inc., Berkeley, (1976)
- [7] K. Takahashi : Dehn's Construction and Irreducibility of Three-Manifolds, Master Thesis, Kobe Univ. (1983).