

動的パーコレーション転移と自己組織化臨界現象

福井大・工 大月、俊也、 海老原 剛志

1. はじめに

動的パーコレーション系と自己組織化臨界現象は臨界的振舞いを示す無限粒子系の代表例として、また多くの類似点を共有するモデルとして、最近注目を集めている。動的パーコレーション転移については以前に報告したので¹⁾、ここでは主として自己組織化臨界現象の説明を行ない、両者の比較についても触れる。

$1/f$ ゆらぎに代表される、ベキ法則は自然界において広く観測されるが、そのほとんどは現象論あるいは経験則として得られている。指数則に比べて、ベキ則は個々の出来事の中に強い相関があることを示し、特にその指数が非整数で与えられる場合、その非解析的挙動を微視的に導くことは一般に非常に難しい。近年、これらのベキ法則をフラクタルの観点から説明することが試みられている。フラクタルとは自然界に存在する複雑な空間的構造、例えば海岸線や樹木、川の形などを記述するため、一つの数学的モデルとして10年程前にMandelbrot²⁾が提案した概念である。その名前はフラクション（分数）という言葉に由来しており、例えばコッホ曲線のフラクタル次元は1.26というように整数でないところからつけられている。非整数値をとるフラクタル次元は、一般にその物体が幾何学的に自己相似であることを示し、また形の複雑さを定量的に表現している。そして、スケーリング則を通してベキ法則を自然な形で与える。

従来、物理の分野でよく研究されているフラクタル現象の例としては、熱的臨界現象³⁾、パーコレーション⁴⁾、DLA⁵⁾(拡散に支配された凝集)、アバランシュモデル⁶⁾などが挙げられる。このうち、熱的臨界現象、パーコレーションなどでは臨界点近傍においてのみフラクタル性が成立する。つまり、パラメーター（温度、圧力、浸透確率等）を調節することによって始めてフラクタル的振舞いを示す。これとは対照的に、アバランシュモデルやDLAではパラメーターの調節を必要とはせず、初期条件のいかんにかかわらず系は固有の時間スケールや空間スケールを何も持たない臨界状態（フラクタル）に向かって自然に発達する。このような意味でアバランシュモデルなどは自己組織的である。これらの自己組織化臨界現象は、自然界に存在する多様なベキ法則をミクロな立場から基礎づけると期待されており、非常に注目されているが、その本質はまだほとんどわかっていない。

本研究では、その中でも Bak, Tang 及び Wiesenfeld⁶⁾ の提案したアバランシュモデルに目を向ける。彼らのモデルのダイナミクスは極簡単であるにもかかわらず散逸的な結合系を支配する普遍的な構成原理として注目されている。自己組織化臨界現象の本質を解明する一環として、このアバランシュモデルの時間的・空間的構造をコンピューターシミュレーションにより調べる。次節では、アバランシュモデルについて簡単に説明する。3、4節では、長短2つのタイムスケールでの構造に対する計算結果を報告する。

2. アバランシュモデル

アバランシュモデルは、局所的に相互作用する離散的な力学系で、確率的なセル・オートマトン型である。ダイナミクスとしては、ある整数変数 ($= z$) がしきい値 (z_c) に達すると、信号 (z) が隣りへと伝えられることが基本となる。

具体的には大きさ $L \times L$ の二次元正方格子上的全てのサイト (i, j) 上で整数変数 z を定義する。初期条件は全ての z が 0 とする。この系にランダムに z を加えていく (図 2.1a)。

$$z(i, j) \rightarrow z(i, j) + 1 \quad (2.1)$$

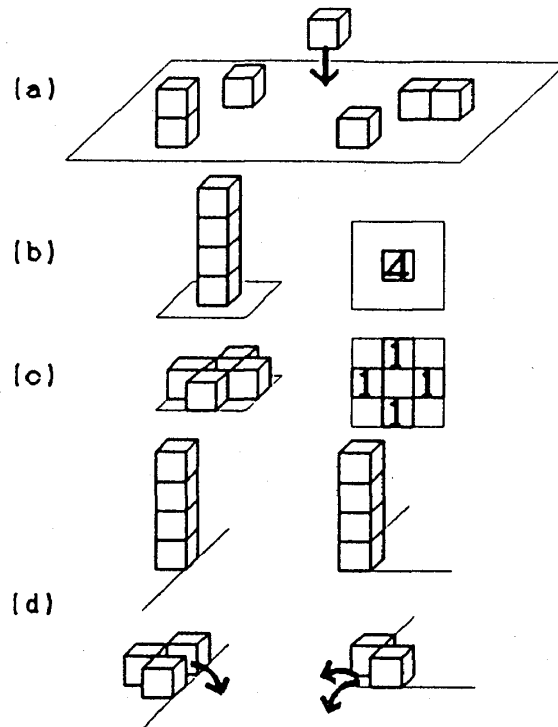


図 2.1 基本ダイナミクス

この場合しきい値 z_c は 4 である。 $z = 4$ となった時 (図 2.1b)、崩れる (スライドする) (図 2.1c)。

$$z(i, j) \rightarrow z(i, j) - 4 \quad (2.2)$$

$$z(i \pm 1, j) \rightarrow z(i \pm 1, j) + 1 \quad (2.3)$$

$$z(i, j \pm 1) \rightarrow z(i, j \pm 1) + 1 \quad (2.4)$$

境界条件は、 z はへりからこぼれるとする (図 2.1d)。このとき、加えられる z と境界からこぼれ落ちる z とが釣り合い、最終的に系は統計的な定常状態に達する。この定常状態における系の振舞いを、各種の物理量を計算することにより調べる。

ここで、砂山崩しの場合、 z はサイトの上にある粒子 (例えば砂) の量 (高さ) ではなく、最近接のサイトとの高低差 (傾き) に相当するものである。高さ $h(i)$ と傾き $z(i)$ は

$$z(i) = h(i) - h(i+1) \quad (2.5)$$

と表される。図 2.2 に示すように、一次元系で砂がひとつ崩れる様子は z では次の様に記述される。

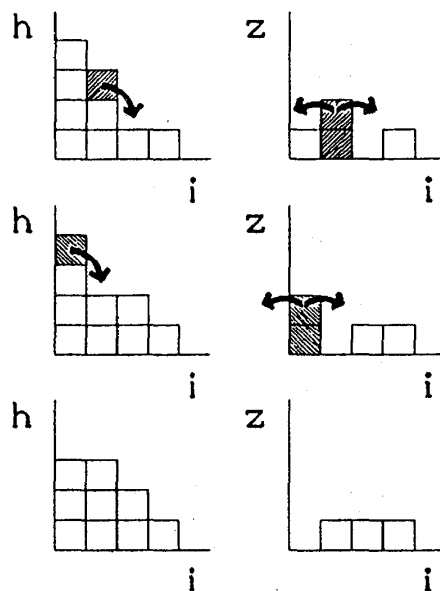


図 2.2 一次元系での $z-h$ 対応

$$z(i) \rightarrow z(i) - 2 \quad (2.6)$$

$$z(i \pm 1) \rightarrow z(i \pm 1) + 1 \quad (2.7)$$

二次元系では、式 (2.1) – (2.4) で表されるダイナミクスは、砂がひとつ崩れる状況には厳密には対応しないが、本質的には等価であると考えられる。さらに z は、砂山崩しの傾きにだけ相当するものではない。地震なら蓄えられたエネルギーに相当し、破壊なら応力に相当する。また、「アバランシュ」というのも「雪崩」にだけ相当するものではなく、エネルギーがある値に達したら「地震」が起こり、エネルギーを放出するものであったり、応力がある値を越えると起こる破壊などの現象をモデル化している。

ひとつのサイトが z_c になって崩れる時、この「スライド」はドミノ倒しの様に次から次へと伝わっていく。図 2.3 に二次元系でのスライドの様子を示した。安定な状態にある系において、ランダムに z が加えられ、 $z = 3 \rightarrow z = 4$ となったサイトがスライドする。このサイトは最近接のサイトに z を渡す。渡された z により $z = 4$ となったサイトがスライドし、その隣りもスライドする。この一連の崩壊過程全体を一つのサイト上でのスライドと区別して「アバランシュ」と呼ぶ。

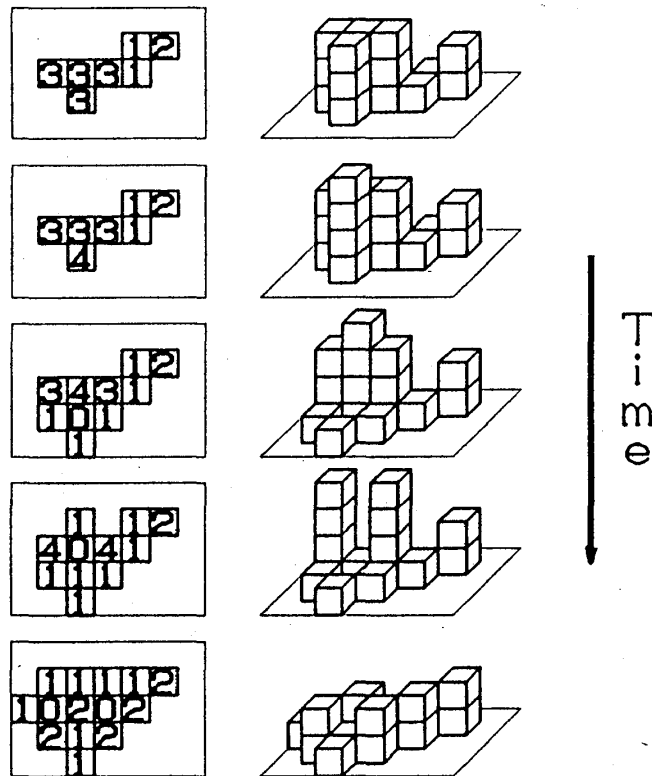


図 2.3 ドミノ効果

シミュレーションではこのアバランシュの構造を表わす各種の物理量、例えば継続時間やアバランシュサイズなどを測定する。継続時間とは、ドミノ効果の持続時間である。図 2.3 における継続時間は 3 となる。アバランシュサイズとは、起きたスライド ($z \rightarrow z-4$) の延べ数である。図 2.3 におけるアバランシュサイズは 4 となる。今までの研究によりそれぞれの分布は系のスケール不変性を反映して、べき則に従うことがわかっている。

アバランシュモデルにおいては一般に 2 通りのタイムスケールが存在する。図 2.4 の左の図はスライドがドミノ効果により時空間上へ広がっていく様子を、つまり一つのアバランシュの時空間構造を模式的に表わしたものである。×印は一つのスライドを示している。ここでの単位時間はスライドのドミノ効果の 1 ステップである。右の図は、アバランシュの時空間での分布の様子を模式的に表わしたもので、○印は一つのアバランシュに対応し、その空間での位置は砂が加えられ最初にスライドが起きた地点としている。ここでの単位時間は、砂が一つ加えられてから次の砂が加えられるまでの時間である。例えば地震の場合、一回の地震の持続時間、つまりアバランシュの寿命は高々数秒であるのに対して、地震が起き次の地震が起きるまでは数時間、あるいは数日とそれに比べて十分長くなる。このように 2 つのタイムスケールは一般に大きく異なっており分離できると考えられる。そこで左の図は「短いタイムスケール」での、右の図は「長いタイムスケール」での構造を表わしているとしてそれぞれを別々に調べる。

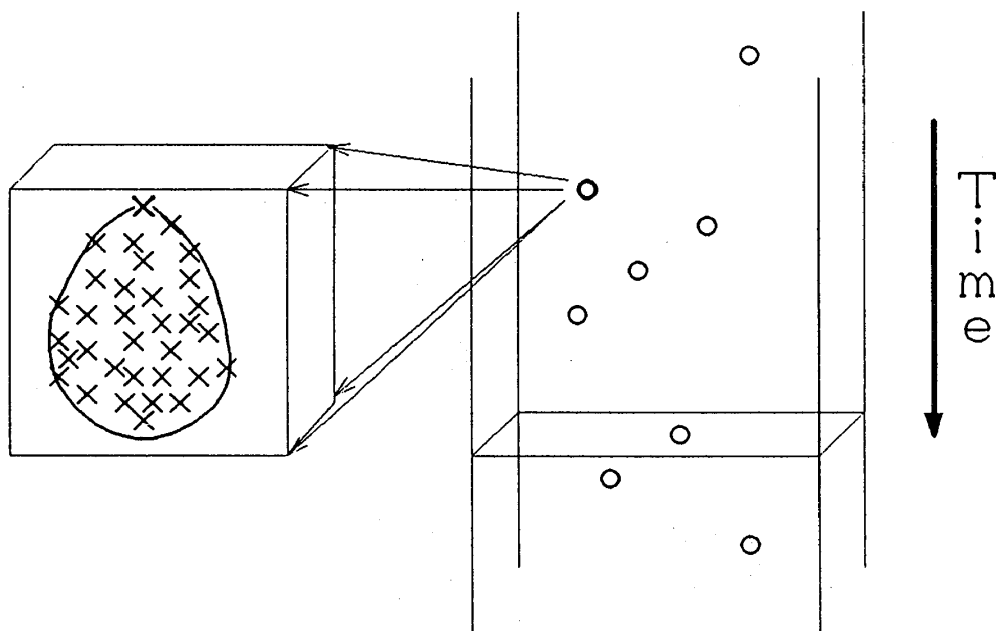


図 2.4 2 つのタイムスケール

3. アバランシュ構造 — 短いタイムスケールでの構造 —

(1) アバランシュサイズとクラスターサイズ

まず最初にアバランシュサイズ S_a とクラスターサイズ S_c の違いについて議論する。 前述したようにアバランシュサイズは 1 回のアバランシュの間に起きたスライドの延べ数で与えられるのに対して、クラスターサイズはスライドを起こしたサイトの延べ数であり、一般に両者は異なる。 通常の等方的パーコレーション系もクラスターが時間と共に成長して行く動的過程として記述できるが¹⁾、この場合はスライドに対応する成長過程は同じサイトで 2 度と再び起こることはないので $S_a = S_c$ となる。 アバランシュモデルでは同じサイトで 2 回以上スライドが起きることがあるがその確率は小さく、 $S_a > S_c$ ではあるが従来その差はほとんど無視されてきた。 そこでここでは

$$S_a \propto S_c^\chi \quad (3.1)$$

と表わしたときの指数 χ が 1 より小さいかどうかに関心を当てて調べる。 シミュレーションはシステムサイズ $L = 200$ 、定常状態に達してから加えた z の数 $N = 10^5$ で行なった。

図 3.1 は横軸に $1/S_a$ 、縦軸に S_c/S_a をプロットしたものである。 もし指数 χ が 1 に等しいならば $S_a \rightarrow \infty (1/S_a \rightarrow 0)$ の極限で S_c/S_a はある有限の値に収束するはずである。 ここでは明らかに 0 に近づいているので χ は 1 より小さいことがわかる。 次に図 3.2 に S_a と S_c の関係を直接示す。 実線は傾き 1 の直線を表わす。 図より S_c は S_a のべきに比例し、その指数は 1 より小さく

$$\chi = 0.95 \pm 0.02 \quad (3.2)$$

となることがわかる。 以上の結果よりアバランシュサイズ S_a とクラスターサイズ S_c は異なる指数を伴う別の物理量であり、アバランシュモデルでは同一のサイトで何回もスライドが起こる重なり効果は有意であることが明らかになった。 またこの点に関してはアバランシュモデルと動的パーコレーション系は本質的に異なっている（違うユニバーサリティクラスに属す）ことが確かめられた。

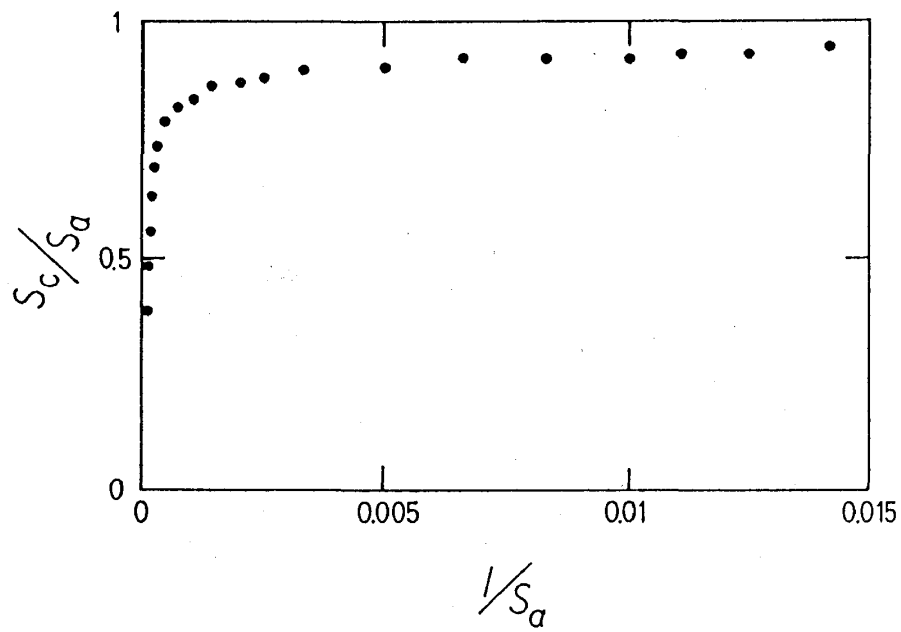


図 3.1 アバランシュサイズ S_a とクラスターサイズ S_c (1)

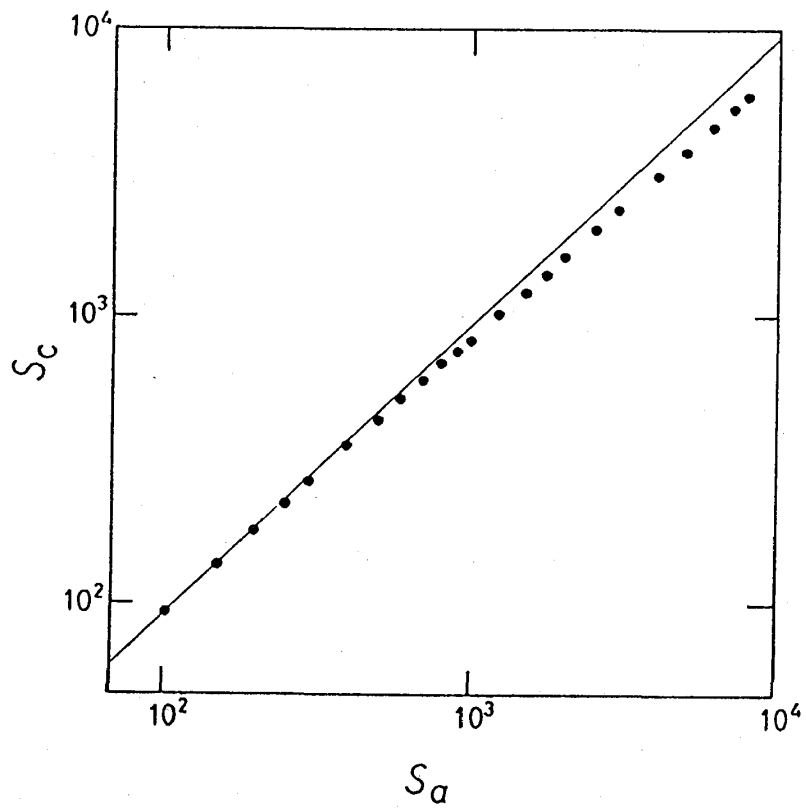


図 3.2 アバランシュサイズ S_a とクラスターサイズ S_c (2)

(2) 枝分かれ構造

ここではスライドの時空間上への拡がりがどのように進行しているのかをクラスターの枝分かれ構造に着目して調べる。具体的には一つのスライドが次のステップで子供をいくつ作るか、つまり一つのスライドによって四方のサイトに与えられた z で、しきい値4に達したサイトがいくつできるかを数える。その値は一つのスライドに対して0から4の5つの状態をとり、0ならば次のステップでスライドは起こらず、1ならば直線的に伸び、2以上ならば枝分かれして平面的に拡がる。図3.3に i 個の子スライドの出現確率 p_i が時間 t と共にどのように変化するのを示す。また、 p_i の S_a 依存性を図3.4に、 $S_a \rightarrow \infty$ の極限での p_i の外挿値を表3.1に示す。スライドが枝分かれして増える確率($p_2 + 2p_3 + 3p_4$)とそこで終わる確率(p_0)とがほぼ等しい、つまり各ステップでのスライドの増減がほぼ釣り合っただけで確かに系が臨界状態にあることがわかる。

次に各スライドの親の数、つまり一つのサイトがしきい値4に達するのにいくつのサイトから z を受け取ったかを調べる。この場合、親が0であることはないので1から4の4つの状態が存在する。表3.1にそれぞれの状態の存在確率 q_j の S_a 無限大の極限での外挿値を示す。スライドはほとんどが $z=3$ のクラスター上で起こり、 $z=2$ 以下のサイトがスライドする確率($q_2 + q_3 + q_4$)は10%程度である。

さらに比較のため、同じ計算を臨界点における動的パーコレーションモデルに関しても行なった。同じく表3.1に結果を示す。これより両者の枝分かれ構造はほぼ等しく、アバランシュクラスターの形成は、ミクロには臨界パーコレーションクラスターの形成とよく似ていることがわかる。

表 3.1 子スライド及び親スライドの存在確率 p_i, q_i

p	avalanche	percolation
0	0.239	0.248
1	0.447	0.427
2	0.263	0.267
3	0.049	0.055
4	0.000	0.000

q	avalanche	percolation
1	0.878	0.881
2	0.118	0.115
3	0.002	0.002
4	0.000	0.000

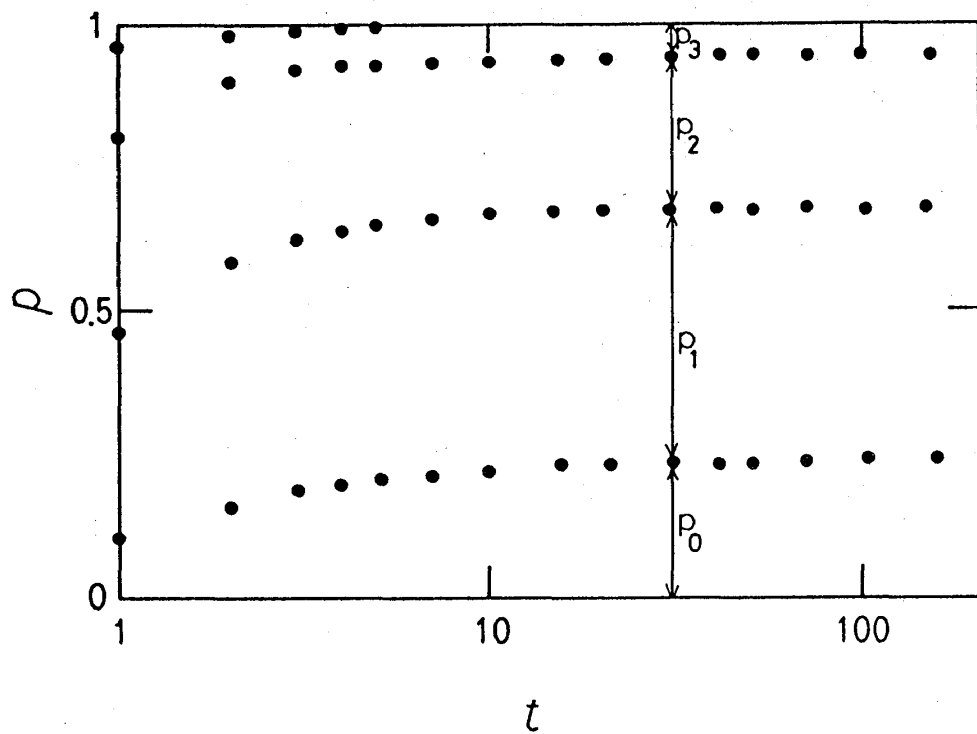


図 3.3 子スライドの存在確率 p_i の時間変化

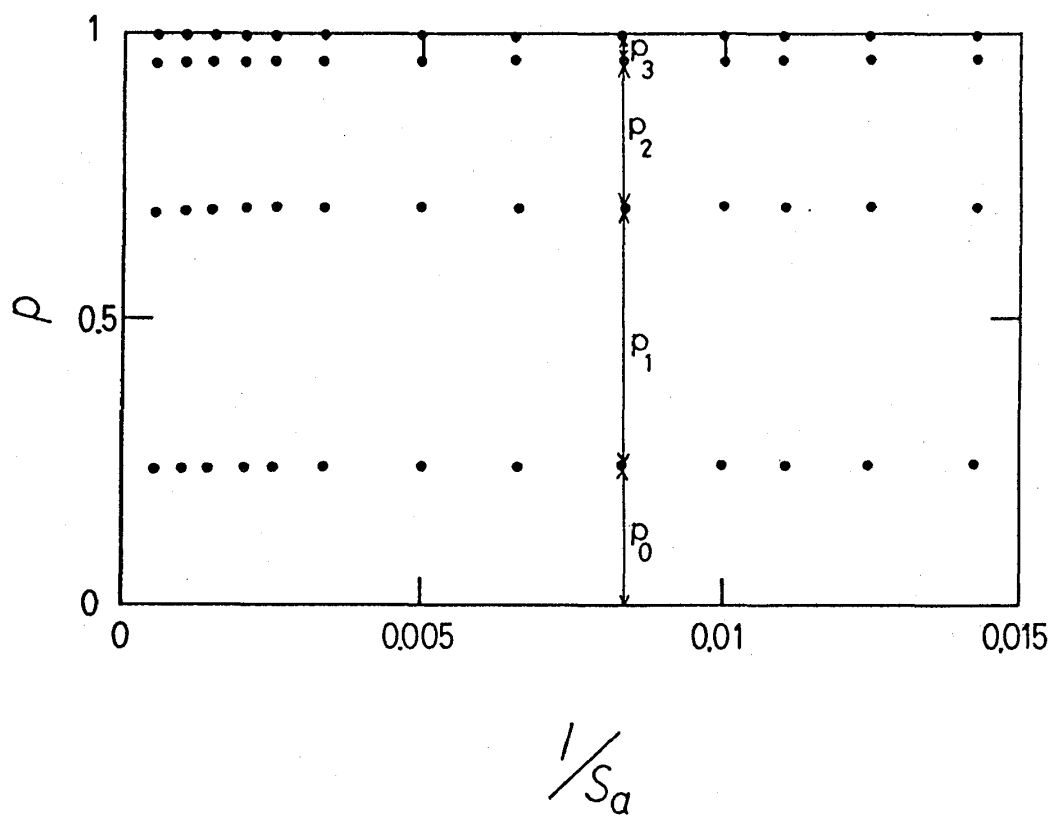


図 3.4 子スライドの存在確率 p_i の S_a 依存性

4. アバランシュ分布 —長いタイムスケールでの構造—

本節では長いタイムスケールでのアバランシュ分布における時間的・空間的相関の有無について議論する。図 4.1 は、アバランシュ全体の分布を示しており、○印は一つのアバランシュを表わしている。この時空間内で 1 つのアバランシュが起きてから次のアバランシュが起きるまでのインターバルの分布をすべてのアバランシュについて求めると完全に二項分布に従い、アバランシュという事象は全くランダムに起きている。アバランシュモデルが地震のモデルであるならば、予知はできないことになる。そこで、アバランシュサイズがある値より大きなアバランシュ（大地震？）のみに着目すれば、その前後においては相関があるかどうか調べる。具体的には大きなアバランシュの前後である限られた時空間を考え、この時空間内で 1 つが加えられたときアバランシュの起きる確率を計算し、系全体の平均値と比べる。限られた時空間としては図 4.1 に示すように注目するアバランシュを底面の中心とする円柱を採用する。ここで空間的拡がりを表わす円柱の直径 R と時間的拡がりを表わす円柱の高さ T とは関係式

$$T = R^{1.2} \quad (4.1)$$

を満たすようにする。この指数 1.2 は動的臨界指数で、係数は代表的な値 1 をとった。シミュレーションは $L = 100, N = 10^7$ で行なった。

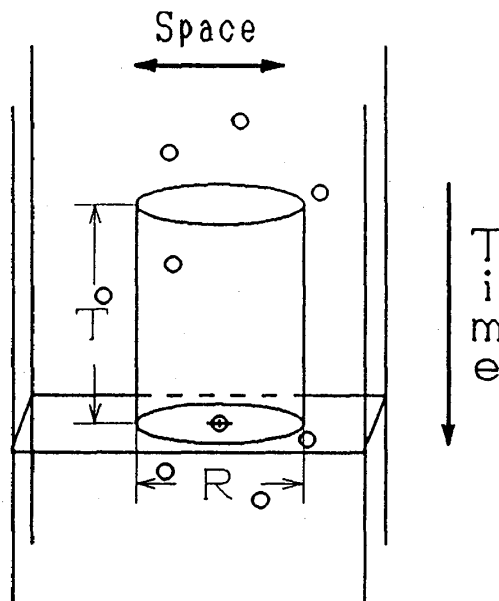


図 4.1. アバランシュ分布

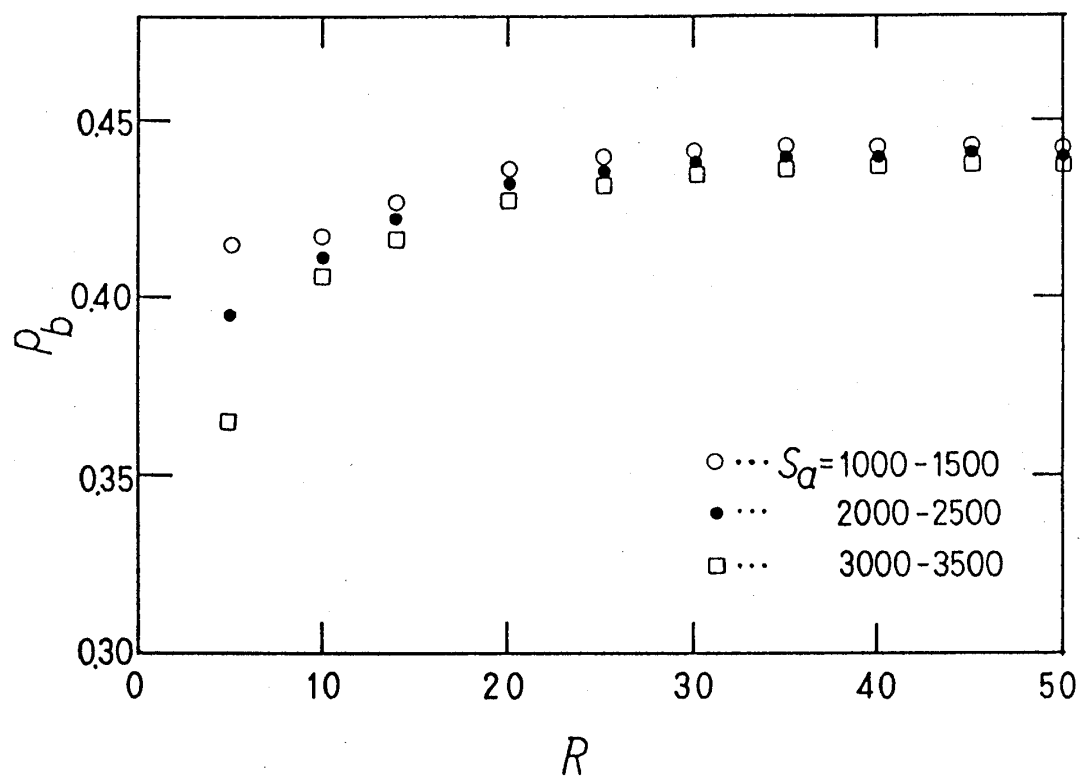


図 4.2 崩壊前のアバランシュ頻度 p_b

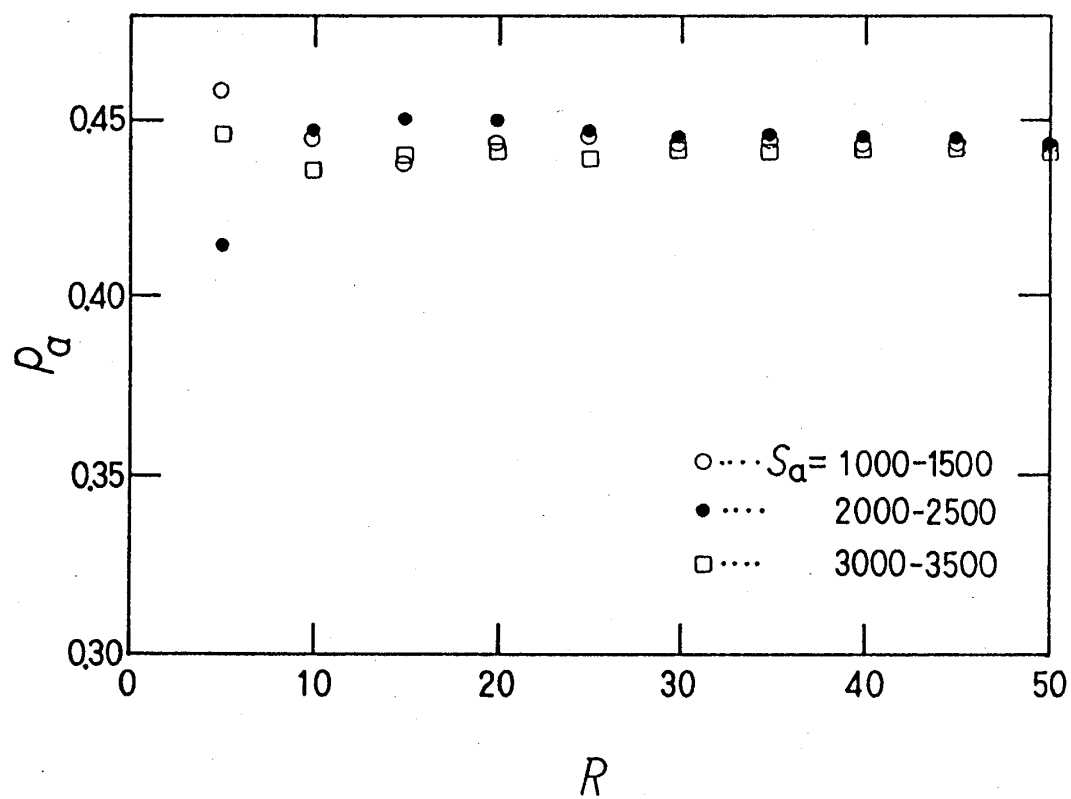


図 4.3 崩壊後のアバランシュ頻度 p_a

図 4.2 は、ある一定の範囲の大きさのアバランシュの起きる前の時空間内で円柱の大きさを変えて測定した結果を示したものである。横軸に円柱の大きさを表わす R 、縦軸に円柱内で一つ z が加えられたときアバランシュの起きる確率 p_b をとっている。また注目するアバランシュの大きさをいくつか変えて計算した。大きな円柱内での確率は系全体の平均値 0.44 にほぼ等しくなるが、小さな円柱内では明らかに確率の減少が見られる。

同じ計算をアバランシュの起きた後の時空間内で行なった結果を図 4.3 に示す。後については前と異なり多少のばらつきはあるがアバランシュの起きる確率 p_a は、円柱の直径 R によらずほぼ一定である。このように大きなアバランシュに関しては、小さな円柱内つまり直前では相関が存在しアバランシュ頻度の減少が見られるが、後には相関が無く何も影響が残っていないということが明らかになった。言い換えると大きなアバランシュ（大地震）の予知は可能と言うことになる。しかし、これらの結果はまだ統計的に不十分であり、定性的な結果は得られたが、具体的にどの程度の確率でアバランシュの起きることが予測できるかなどの定量的な結果を得るにはいたっていない。

5. おわりに

アバランシュモデルの時間的・空間的構造を短いタイムスケール、長いタイムスケールの両者について調べ、次のようなことが明らかになった。(i) アバランシュサイズ S_a とクラスターサイズ S_c は異なる指数を持つ別の物理量で、 S_c は S_a の 0.95 乗に比例する。このことに関してはアバランシュモデルと動的パーコレーションモデルは本質的に異なる。

一方、クラスターの枝別れ構造などのミクロな性質についてはアバランシュクラスターは臨界パーコレーションクラスターとよく似ている。

(ii) 大きなアバランシュの起きる前ではアバランシュ頻度の減少が観測されたが、後では見られなかった。従って、大きなアバランシュの予知はある程度可能であると言える。

(ii) の結果は実際の地震現象では大地震の前で観測される静穏期に相当すると考えられる。大きな地震の前には地震頻度が通常値より小さくなる静穏期が存在することはよく知られているが⁷⁾、そのメカニズムはよくわかっていない。アバランシュモデルのような簡単なモデルでも類似の現象が見られることは静穏期の本質の解明に有力な手がかりを与えると期待される。このようにアバランシュモデルは地震や破壊現象の示す様々な動的挙動の簡単且つ有効なモデルと考えられ、その研究の今後の一層の発展が望まれる。

参考文献

1. 大月俊也、物性研究 51 (1989) 413.
2. B.B.Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* (Freeman, San Francisco, 1982).
3. H.E.Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena* (Clarendon, Oxford, 1971). [松野孝一郎訳、相転移と臨界現象 (東京図書、1974) .]
4. D. Stauffer, *Introduction to Percolation Theory* (Taylor & Francis, London, 1985). [小田垣孝訳、浸透理論の基礎 (吉岡書店、1988) .]
5. T. Vicsek, *Fractal Growth Phenomena* (World Scientific, Singapore, 1989). [宮島佐介訳、フラクタル成長現象 (朝倉書店、1990) .]
6. P.Bak, C. Tang and K.Wiesenfeld, Phys. Rev. Lett. 59 (1987) 381 ; *ibid*, Phys. Rev. A38 (1988) 364.
7. R.S.Matsu'ura, Bull. Earthquake Res. Inst., Univ. Tokyo 61 (1986) 1 ; Y. Ogata, Tectonophysics 169 (1989) 159.