

ハミングスキームのモジュラー標準加群について

岐阜聖徳学園大学 教育学部 島袋 修*

Osamu Shimabukuro

Faculty of Education, Gifu Shotoku Gakuen University

1 はじめに

複素数体上では、アソシエーションスキームの隣接代数は半単純であり、主に固有値による特徴付けによる多くの結果が知られている。一方、正標数 p の体上で考えた場合、必ずしもその隣接代数は半単純になるとは限らない。正標数 p の体上でアソシエーションスキームの隣接代数を考える研究が始まったのは、1990 年代に入ってからである。Brouwer 氏, van Eijl 氏, Peeters 氏は、同じパラメーターを持つ強正則グラフや距離正則グラフなどの隣接行列を標数 p の体上で階数 (p ランク) を計算することにより、それらが異なる p ランクを持つことがあることを指摘した [3, 9]。その後、花木氏 (信州大) と吉川氏 (兵庫教育大) は、強正則グラフの隣接行列の p ランクが、そのグラフの隣接代数のモジュラー表現からえられる標準加群の直既約直和分解から決定できることを指摘し、標準加群が p ランクよりも組合せ構造に関する情報を含んでいる可能性を示唆した [8]。現状では、アソシエーションスキームのモジュラー表現の一般的な性質は、ほとんどわかっていないので、まずは様々なアソシエーションスキームの構造を明らかにすることを試みている。本稿では、ハミングスキームのモジュラー隣接代数とその標準加群の直既約直和分解を考察する。

2 アソシエーションスキーム

ここでは必要なアソシエーションスキームの定義を述べる。詳しくは [2, 4] を参照してほしい。

* 〒501-6194 岐阜市柳津町高桑西 1-1, shimabukuro@gifu.shotoku.ac.jp

X を有限集合とし, S を $X \times X$ の空でない部分集合族とする. (X, S) がアソシエーションスキームとは次を満たすときをいう.

- (1) $S := \{R_0, R_1, \dots, R_d\}$ は $X \times X$ の分割である;
- (2) $R_0 := \{(x, x) \mid x \in X\}$;
- (3) $R_{i^*} := \{(z, y) \mid (y, z) \in R_i\} \in S$;
- (4) 任意の $i, j, k \in \{0, \dots, d\}$ に対して, ある非負整数 p_{ij}^k が存在して, R_k の元 (x, y) の選び方によらずに $(x, z) \in R_i, (z, y) \in R_j$ となる $z \in X$ の個数が一定である. これを $p_{i,j}^k$ と表し, **交叉数**とよぶ.

このとき, X を**頂点集合**, $\{R_i\}_{0 \leq i \leq d}$ を**隣接関係**とよぶ. (X, S) の各隣接関係 R_i から行と列を X で添字付けされた隣接行列 A_i が定義できる.

$$(A_i)_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{if } (x, y) \in R_i, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

アソシエーションスキームの定義から

$$\mathbb{Z}S = \bigoplus_{i=0}^d \mathbb{Z}A_i$$

は $M_X(\mathbb{Z})$ の部分代数になる. R を単位的可換環とすると, $M_X(R)$ の R -部分代数 $RS = R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}S$ が定義できて, これを R 上の (X, S) の**隣接代数**とよぶ. R 上の (X, S) の表現は RS からある次数の全行列環への R 代数準同型であるが, RS は $M_X(R)$ の部分代数なので, 埋め込み写像が表現であり, これを**標準表現**とよぶ. 対応する(右) RS -加群を R 上 (X, S) の**標準加群**とよび, 基底として X を取ることができ, これを RX とかく. F を正標数 p の体とし, FS を**モジュラー隣接代数**, FX を**モジュラー標準加群**とよぶことにする. 考えたいことはアソシエーションスキーム (X, S) に対して, FS と FX の構造である.

3 ハミングスキーム

Ω を q 個の元からなる有限集合とし, X を Ω の n 個の直積集合とする. X 上に距離を次のように定義する. X の元 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ と $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ に対し,

$$d_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := |\{i \mid x_i \neq y_i\}|.$$

と定めると、距離の公理を満たしハミング距離とよぶ。ハミング距離を用いて隣接関係を定義する。

$$R_i = \{(x, y) \in X \times X \mid d_H(x, y) = i\}$$

とすると、 $(X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq n})$ は全ての隣接行列が対称行列であるアソシエーションスキームとなる。これをハミングスキームとよび、 $H(n, q)$ と表す。

4 ハミングスキームのモジュラー隣接代数

ハミングスキームのモジュラー標準加群の構造を調べるにはモジュラー隣接代数の構造を理解する必要があるが、吉川氏 (兵庫教育大) によって完全に解明されている。

Proposition 1 ([10]). F を正標数 p の体とし、 $FH(n, q)$ を $H(n, q)$ から得られる F 上隣接代数とする。

- $p \mid q$ の場合、 $FH(n, q) \cong FH(n, p)$ (as F -algebra),
- $p \nmid q$ の場合、 $FH(n, q)$ は半単純。

この Proposition より半単純でない場合は $FH(n, p)$ を考えれば十分であることがわかる。 $H(n, p)$ の頂点集合の位数は p^n であるが、花木氏 (信州大) により一般に頂点集合の位数が素数 p べきのアソシエーションスキームは正標数 p の体 F 上にて局所環であることが証明されている [7]。特に F は $FH(n, p)$ の分解体である。さらに、 $FH(n, p)$ については次の構造を持つことが分かっている。

Proposition 2 ([10]). $n < p^r$ なる整数 r に対して

$$B_r/I_n \cong FH(n, p) \text{ (as } F\text{-algebra).}$$

ただし、 B_r は、 $F[X_1, X_2, \dots, X_r]/(X_1^p, X_2^p, \dots, X_r^p)$ とし、 I_n は、重みが定義された単項式のうち、重みが n より大きい単項式で生成される B_r のイデアル。

5 標準加群

一般の正標数 p の体 F 上で $H(n, p)$ の標準加群 FX を考えたいが、現在のところ難しく $p = 2$ の場合で考える。これ以降は、 F を 2 元体とし、ハミングスキーム $H(n, 2)$ を (X, S) とする。 $|X| = 2^n$ で $|S| = n + 1$ である。次のような F 代数 V_n を考える。

$$V_n = F[x_1, x_2, \dots, x_n]/(x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2).$$

また, 次の W_n は V_n の元で変数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ の添字を入れ替えても不変な元の集合とする. W_n は V_n の部分代数で, 基本対称式 $\{e_i\}_{0 \leq i \leq n}$ で生成される.

$$W_n = \{f(\mathbf{x}) \in V_n \mid f^\tau(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \tau \in \mathcal{S}_n\} = \{f(\mathbf{x}) \in V_n \mid f(\mathbf{x}^\tau) = f(\mathbf{x}), \tau \in \mathcal{S}_n\}.$$

次の定理は浜辺氏 (信州大) によって証明された.

Theorem 3 ([6]). F を 2 元体とし, ハミングスキーム $H(n, 2)$ を (X, S) とする.

- $FS \cong W_n$ (as F -algebra),
- $FX \cong V_n$ (as FS -module).

単項式順序は次数付き辞書式順序とする. 目標は V_n の直既約直和分解であるが, まず, ある規則に従っていくつかの V_n の部分加群を構成し, それらから V_n の直和分解が得られることを示す. 最後に, それぞれの直和因子が直既約であることを示す.

6 対称くさり

V_n の直和分解を得るために対称くさり分解を用いる [1]. 次数付き有限半順序集合とは階数関数

$$r : P \longrightarrow \mathbb{N}$$

で $r(q) = r(p) + 1$ ($q \prec p, p, q \in P$) が与えられた有限な半順序集合 $(P, \prec)$ である. 次数付き有限半順序集合 $(P, \prec)$ における対称くさりとは P の元の列 $(p_1, \dots, p_h)$ で, 以下を満たす.

- (1) 各 i ($< h$) に対して $p_i \prec p_{i+1}$,
- (2) $h \geq 2$ について $r(p_1) + r(p_h) = r(P)$,
- (3) $h = 1$ ならば $2r(p_1) = r(P)$,

ただし, $r(P)$ は $(P, \prec)$ の階数関数の最大値を表すとする. 対称くさに含まれる元は対称的で i 番目と $h - i + 1$ 番目の階数関数値の和が最大値と一致する. つまり,

$$r(p_i) + r(p_{h-i+1}) = r(P) \quad (1 \leq i \leq h).$$

途中の階数関数値をスキップせず得られた対称くさがり P 全体を重複なく分割できるとき対称くさりの集合を対称くさり分解といい $(P, \prec)$ は対称くさり分解可能という.

7 対称くさり分解

対称くさり分解について、次の定理がわかっている。

Theorem 4 ([5]). $n \geq 1$ に対して、べき集合 $(\mathcal{P}(\{1, \dots, n\}), \subset)$ に階数関数を濃度で定義した次数付き有限半順序集合は対称くさり分解可能である。

実際、べき集合 $(\mathcal{P}(\{1, \dots, n\}), \subset)$ の対称くさり $C = (p_k, \dots, p_{n-k})$ に対して次のような表が作れる。

$$\begin{array}{c|ccc} C' & p_k & \cdots p_{n-k-1} & p_{n-k} \\ \hline C'' & p_k \cup \{n+1\} & \cdots p_{n-k-1} \cup \{n+1\} & p_{n-k} \cup \{n+1\} \end{array} .$$

C' は一行目と二行目の最後の元からなり、 C'' は二行目の最後の元を除いた元からなる。 C' , C'' は $(\mathcal{P}(\{1, \dots, n+1\}), \subset)$ の対称くさりである。特に、帰納法の仮定からこのようにして作られた対称くさり達は互いに素である。 C の長さが 1 の場合も、対称くさりになる。対称くさり分解は一意的ではないが、この分解を**標準対称くさり分解**とよぶ。

また、べき集合 $(\mathcal{P}(\{1, \dots, n\}), \subset)$ の対称くさり分解では括弧を用いた考え方があり、 V_n の直和分解を考える上で役に立つ。まず、 $\mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$ の元を特性ベクトルとして考える。つまり、各元に含まれる元の成分の座標を 1 として他を 0 とする n 次元ベクトルを対応させる。次に、このベクトルの各成分について、左から最も近い 0 と 1 の組を括弧にする。つまり 0 を “(” に 1 を “)” に対応付けする。こうして出来た括弧と 0, 1 の元について、最も左にある組になっていない 0 を 1 に、逆に最も右にある 1 を 0 にすることで対称くさに属する元が得られる。更に、括弧の組になっている 0-1 ペアの座標をインデックスとする二項の和を因数とし、組になっていない 1 の座標をインデックスとする単項を考え、それらの積からできる多項式は V_n の元として考えることができる。 V_n の標準基底としての単項式から二項因子の積を含む多項式への変換行列は三角行列で特に正則なので、二項因子の積の多項式たちも V_n の基底になる。

Proposition 5. べき集合 $(\mathcal{P}(\{1, \dots, n\}), \subset)$ から得られる二項因子の積を含む多項式は V_n の基底となる。

8 基底

べき集合 $(\mathcal{P}(\{1, \dots, n\}), \subset)$ の対称くさり分解において, 最も長い対称くさりに対応する V_n の基底を新たに構成する. n に対して, ℓ を $2^\ell - 1 \leq n \leq 2^{\ell+1} - 2$ を満たす整数とし, h を $n = 2^\ell - 1 + h$ ($0 \leq h \leq 2^\ell - 1$) を満たす整数とする. $h \neq 0$ のとき, h を相異なる 2 べきの和で表し, この時現れる 2 べきからなる集合を $P(h)$ とする. $h = 0$ の時は $P(h) = \emptyset$ とする. また, $\overline{P(h)}$ は $P(2^\ell - 1) \setminus P(h)$ とする. $h \neq 0$ のとき, $P(h)$ の部分集合 L と $0 \leq i \leq 2^\ell - 1$ に対して,

$$v_{L,i} := \sum_{S \subset \overline{P(h)}} \sum_{\Lambda_1 \in \binom{\{1, \dots, 2^\ell - 1\}}{[L] + [S]}} x^{\Lambda_1} \sum_{\Lambda_2 \in \binom{\{2^\ell, \dots, n\}}{i - [S]}} x^{\Lambda_2}. \quad (1)$$

ただし, 正整数の部分集合 N に対して, $[N]$ は N に属する元の総和とし, $\binom{N}{m}$ は N の m 元部分集合族とする. $h = 0$ のとき, $0 \leq i \leq 2^\ell - 1$ に対して,

$$v_{\emptyset,i} := \sum_{\Lambda \in \binom{\{1, \dots, 2^\ell - 1\}}{i}} x^\Lambda = e_i. \quad (2)$$

とする. このようにして得られた V_n の元は次のような性質を持つ.

Proposition 6. (1), (2) のようにして得られた V_n の元について, 以下が成り立つ.

- $\{v_{L,i}\}_{L \subset P(h), 0 \leq i \leq 2^\ell - 1}$ は一次独立
- $e_j = \sum_{L \subset P(h)} v_{L,j-[L]}$,
- $v_{L,i} \cdot v_{L',i'} = v_{L \cup L', i+i'}$ or 0.
- $\{e_j\}$ は, $\{v_{L,i}\}$ に作用する.
- $\{v_{L,0} \cdot e_j\}_{L \subset P(h), 0 \leq j \leq 2^\ell - 1}$ は一次独立

この性質をもとに V_n の W_n -部分加群 U を次のように定義する.

$$U := \bigoplus_{L \subset P(h), 0 \leq i \leq 2^\ell - 1} Fv_{L,i} = \bigoplus_{L \subset P(h), 0 \leq j \leq 2^\ell - 1} Fv_{L,0} \cdot e_j.$$

これ以外の V_n の元については, $\{1, \dots, n\}$ から相異なる k 個の組からなる集合 $\lambda = \{(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)\}$ に対して, 二項因子の積を構成する.

$$\Delta_\lambda := \prod_{\lambda} (x_{a_1} + x_{b_1})(x_{a_2} + x_{b_2}) \dots (x_{a_k} + x_{b_k})$$

$\{x_1, \dots, x_n\} \setminus \bigcup_{i=1}^k \{x_{a_i}, x_{b_i}\}$ 上で (1), (2) と同様に $n' := n - 2k = 2^{\ell'} - 1 + h'$ ($0 \leq h' \leq 2^{\ell'} - 1$) に対して $\{\mathbf{v}_{L', i'}^{(\lambda)}\}_{L' \subset P(h'), 0 \leq i' \leq 2^{\ell'} - 1}$ において,

$$\begin{aligned} U_\lambda &:= \bigoplus_{L' \subset P(h'), 0 \leq i' \leq 2^{\ell'} - 1} F \Delta_\lambda \mathbf{v}_{L', i'}^{(\lambda)} \\ &= \bigoplus_{L' \subset P(h'), 0 \leq i \leq 2^\ell - 1} F \left(\Delta_\lambda \mathbf{v}_{L', 0}^{(\lambda)} \cdot e_i \right). \end{aligned}$$

このようにして作られた W_n -部分加群達について, 次の命題が得られる.

Proposition 7. $U, \{U_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ と U_λ は, 先に定義した W_n -部分加群とする.

$$\left(U \oplus \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma \right) \cap U_\lambda = \{0\}$$

であるための必要十分条件は

$$\left(U \oplus \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma \right) \cap \{\Delta_\lambda\} = \{0\}$$

この命題と対称くさり分解を用いて V_n の直和分解ができる. まず, U の元は対称くさり分解における最も長い対称くさりに対応する. 次に, それ以外の対称くさり分解における対称くさりから Proposition 5 で述べた二項因子の積を含む多項式において Proposition 7 を満たすように $\{\Delta_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ を取ることで V_n の直和分解が得られる.

9 例 $n = 4$ の場合

ここまでの内容を $n = 4$ に対して述べる. べき集合 $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}), \subset)$ の対称くさり分解は,

$$\begin{aligned} C_0 &:= \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}, \\ C_1 &:= \{\{4\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 4\}\}, \\ C_2 &:= \{\{3\}, \{1, 3\}, \{1, 3, 4\}\}, \\ C_3 &:= \{\{3, 4\}\}, \\ C_4 &:= \{\{2\}, \{2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}, \\ C_5 &:= \{\{2, 4\}\}. \end{aligned}$$

対応する二項因子の積は,

$$\begin{aligned}
C_0 &\mapsto \{1, x_1, x_1x_2, x_1x_2x_3, x_1x_2x_3x_4\}, \\
C_1 &\mapsto \{(x_3 + x_4), x_1(x_3 + x_4), x_1x_2(x_3 + x_4)\}, \\
C_2 &\mapsto \{(x_2 + x_3), x_1(x_2 + x_3), x_1(x_2 + x_3)x_4\}, \\
C_3 &\mapsto \{(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)\}, \\
C_4 &\mapsto \{(x_1 + x_2), (x_1 + x_2)x_3, (x_1 + x_2)x_3x_4\}, \\
C_5 &\mapsto \{(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)\}.
\end{aligned}$$

$n = 4 = 2^2 - 1 + 1$ より, $P(1) = \{1\}$ かつ $\overline{P(1)} = \{2\}$ である. U の基底は

$$\begin{aligned}
v_{\emptyset,0} &= 1, \\
v_{\{1\},0} &= x_1 + x_2 + x_3, \\
v_{\emptyset,1} &= x_4, \\
v_{\emptyset,2} &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \\
v_{\{1\},1} &= (x_1 + x_2 + x_3)x_4, \\
v_{\emptyset,3} &= (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x_4, \\
v_{\{1\},2} &= x_1x_2x_3, \\
v_{\{1\},3} &= x_1x_2x_3x_4.
\end{aligned}$$

対称くさり C_1, C_2 と C_4 に対して, $\Delta_\lambda := (x_3 + x_4)$, $\Delta_\mu := (x_2 + x_3)$, $\Delta_\nu := (x_1 + x_2)$, とおき, $n_1 = 4 - 2 = 2^1 - 1 + 1 = 2$ より, $P(1) = \{1\}$ and $\overline{P(1)} = \emptyset$ である. Proposition 7 より, $U \cup \{\Delta_\lambda\} = \{0\}$ なので, 次の U_λ の基底を U に加える.

$$\begin{aligned}
(x_3 + x_4)v_{\emptyset,0}^{(\lambda)} &= x_3 + x_4, \\
(x_3 + x_4)v_{\emptyset,1}^{(\lambda)} &= x_2(x_3 + x_4), \\
(x_3 + x_4)v_{\{1\},0}^{(\lambda)} &= x_1(x_3 + x_4), \\
(x_3 + x_4)v_{\{1\},1}^{(\lambda)} &= x_1x_2(x_3 + x_4).
\end{aligned}$$

再び Proposition 7 より, $(U \oplus U_\lambda) \cap \{\Delta_\nu\} \neq \{0\}$ であるが, $(U \oplus U_\lambda) \cap \{\Delta_\mu\} = \{0\}$ なので $(U \oplus U_\lambda)$ には U_ν ではなく, 次の U_μ を加える.

$$\begin{aligned}
(x_2 + x_3)v_{\emptyset,0}^{(\mu)} &= x_2 + x_3, \\
(x_2 + x_3)v_{\emptyset,1}^{(\mu)} &= (x_2 + x_3)x_4, \\
(x_2 + x_3)v_{\{1\},0}^{(\mu)} &= x_1(x_2 + x_3), \\
(x_2 + x_3)v_{\{1\},1}^{(\mu)} &= x_1(x_2 + x_3)x_4.
\end{aligned}$$

U_λ と U_μ は W_4 -加群として同型である. 一次独立な 2^4 個の基底が得られたので V_4 の直和分解がわかった:

$$V_4 = U \oplus U_\lambda \oplus U_\mu.$$

10 直既約性

Theorem 8. U と $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ は直既約である.

U について説明する. 各 U_γ ($\gamma \in \Gamma$) についても同様に証明できる. U の直既約性を証明するために $\text{End}_{W_n}(U)$ が局所環であること, つまり, 任意のべき等元 $f \in \text{End}_{W_n}(U)$ が 0 と id_U であることを証明する. これは, Proposition 6 より, 任意のべき等元 $f \in \text{End}_{W_n}(U)$ と $L \subset P(h)$ に対して,

$$f(\mathbf{v}_{L,0} \cdot e_i) = \begin{cases} 0 \\ \mathbf{v}_{L,0} \cdot e_i. \end{cases}$$

を証明すれば良い. そこで, 任意のべき等元 $f \in \text{End}_{W_n}(U)$ と $L \subset P(h)$ に対して, $f(\mathbf{v}_{L,0})$ の一次結合として

$$f(\mathbf{v}_{L,0}) = \sum_{\substack{N \subset P(h) \\ 0 \leq j \leq 2^\ell - 1}} \alpha_{N,j}^L \mathbf{v}_{N,0} \cdot e_j$$

とおく. ただし, $\alpha_{N,j}^L \in F$ ($N \subset P(h)$) とする. 実際, $L \subset P(h)$ と $0 \leq i \leq 2^\ell - 1$ に対して,

$$f(\mathbf{v}_{L,0} \cdot e_i) = \begin{cases} 0 & (\alpha_{\emptyset,0}^\emptyset = 0) , \\ \mathbf{v}_{L,0} \cdot e_i & (\alpha_{\emptyset,0}^\emptyset = 1) \end{cases}$$

が成り立つ. このようにして直既約性が証明できる.

参考文献

- [1] Ian Anderson, *Combinatorics of finite sets*, Oxford England : Clarendon Press ; New York : Oxford University Press, 1989.
- [2] Eiichi Bannai and Tatsuro Ito, *Algebraic Combinatorics I Association Schemes*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., Menlo Park, California, 1984.

- [3] A. E. Brouwer and C. A. Van Eijl, *On the p -Rank of the Adjacency Matrices of Strongly Regular Graphs*, Journal of Algebraic Combinatorics: An International Journal **1** (1992), no. 4, 329–346.
- [4] Andries E. Brouwer, Arjeh M. Cohen, and Arnold Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, 1 ed., Springer Berlin, United States of America, 1989.
- [5] N. G. Bruijin, de, C. Ebbenhorst Tengbergen, van, and D. Kruyswijk, *On the set of divisors of a number*, Nieuw Archief voor Wiskunde, **2** (1951), no. 23, 191–193.
- [6] Takahiro Hamabe, *On the indecomposable direct decomposition of standard modules of Hamming Scheme $H(n,2)$ (unpublished)*, 2018.
- [7] Akihide Hanaki, *Locality of a modular adjacency algebra of an association scheme of prime power order*, Archiv der Mathematik **79** (2002), no. 3, 167–170.
- [8] Akihide Hanaki and Masayoshi Yoshikawa, *On Modular Standard Modules of Association Schemes*, Journal of Algebraic Combinatorics **21** (2005), no. 3, 269–279.
- [9] René Peeters, *On the p -Ranks of the Adjacency Matrices of Distance-Regular Graphs*, Journal of Algebraic Combinatorics **15** (2002), no. 2, 127–149.
- [10] Masayoshi Yoshikawa, *Modular adjacency algebras of Hamming schemes*, Journal of Algebraic Combinatorics **20** (2004), no. 3, 331–340.