

天然ガスの拡散や太陽の紅炎の持続を記述する縮退
した非線型発展方程式のオレイニクの意味の弱解の
非線型半群論的構成法——Abstract——

東大 理 小 西 芳 雄

次の非線型拡散問題を考える: $u = u(t, x)$ として

$$(1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial x^2}, \quad 0 \leq t \leq T < \infty, \quad -\pi \leq x \leq \pi,$$

$$(1.2) \quad u(0, x) = u_0(x), \quad -\pi \leq x \leq \pi,$$

$$(1.3) \quad u(t, -\pi) = u(t, \pi), \quad 0 \leq t \leq T;$$

ここに φ は $\mathbb{R}$ 上の連続, 単調増加函数とする.

最近の非線型半群の理論を使うと, φ が必ずしも微分可能でなくとも ($\varphi(u_0)$ にある程度の滑らかさを仮定すれば)

(1.1)-(1.2)-(1.3) のオレイニクの意味の弱解¹⁾が構成できる.

定義. $u \in C([0, T] \times [-\pi, \pi])$ が (1.1)-(1.2)-(1.3) の弱

1) Олейник, Калашников, Юй-Линь: Известия Акад. наук СССР 22 (1958), 667-704.

解であるとは次の事が成立することとしよう:

$$(1.4) \quad u(t, -\pi) = u(t, \pi), \quad \forall t \in [0, T],$$

$$(1.5) \quad \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} \in L^\infty((0, T) \times (-\pi, \pi))$$

$$(1.6) \quad \int_0^T dt \int_{-\pi}^{\pi} dx \left[\frac{\partial f}{\partial t} u - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} \right] + \int_{-\pi}^{\pi} f(0, x) u_0(x) dx = 0$$

$$\forall f \in C^1([0, T] \times [-\pi, \pi]) \text{ s.t.}$$

$$f(T, x) = 0, \quad \forall x \in [-\pi, \pi], \quad f(t, -\pi) = f(t, \pi), \quad \forall t \in [0, T]$$

一意性はオレイニクと同様に来る。

解の存在定理:

定理 u_0 は次を満足するとしよう:

$$(1.7) \quad \varphi(u_0), \frac{d\varphi(u_0)}{dx}, \frac{d^2\varphi(u_0)}{dx^2} \in L^1(-\pi, \pi)$$

$$(1.8) \quad u_0(-\pi) = u_0(\pi), \quad \frac{d\varphi(u_0)}{dx}(-\pi) = \frac{d\varphi(u_0)}{dx}(\pi).$$

このとき (1.1)-(1.2)-(1.3) の弱解は存在する。

この定理の証明の方法は大体次のようである:

$$A : D(A) \subset L^1(-\pi, \pi) \longrightarrow L^1(-\pi, \pi)$$

$$\text{を } D(A) = \left\{ u \in L^1(-\pi, \pi); \varphi(u), \frac{d\varphi(u)}{dx}, \frac{d^2\varphi(u)}{dx^2} \in L^1(-\pi, \pi) \right\}$$

$$\text{且 } u(-\pi) = u(\pi), \frac{d\varphi(u)}{dx}(-\pi) = \frac{d\varphi(u)}{dx}(\pi)$$

$$Au = \frac{d^2\varphi(u)}{dx^2}$$

と定義すると A は dissipative 且 $R(I - \lambda A) \supset D(A) \quad \forall \lambda > 0$

が証明出来る。従って Crandall - Liggett ²⁾ の意味で $L^1(-\pi, \pi)$

2) Crandall and Liggett : Amer. J. Math. 93 (1971),

265-298.

上の縮小半群 $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ が定義される。 $u(t) = e^{tA} u_0$ が求めるものである。

以上詳細は次の論文を参照されたい。

Une méthode de résolution d'une équation
d'évolution non linéaire dégénérée. J. Fac. Sci.
Univ. Tokyo (à paraître).