

アンダーソン局在とくりこみ群

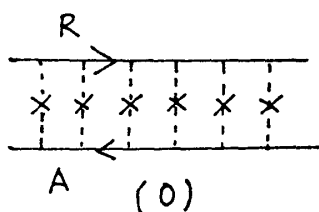
東大教養基礎科学科 氷上 忍

1. はじめに

不純物散乱による電子の局在化の問題は、二次元が臨界次元数になるという考察に基づき、くりこみ群により理論的に研究され、また多くの実験結果との比較が行われてきた。理論的には、まず金属相から出発し、拡散モードの自分自身との相互作用を摂動論で計算し、それが金属相の不安定性を引起すことを調べるアプローチがある程度成果があったと思われる。この方法が有効である為には、くりこみ群が使えないことが条件であり、また高次の項についても予測がつかなくては定量的な事が議論でなないと思われる。最近、この問題の持つ対称性を見直して見て、微分幾何学的方法で4次の項 $O(1/E_F^4)$ まで計算出来たので¹⁾、以下その事を中心に述べてみたい。

2. 拡散に対する有効ハミルトニアン

電子と空孔を扱う retarded Green function と advanced Green function, G_R と G_A による梯子型ダイアグラムにより通常の拡散モード $(D_0 z^2 - i\omega)^{-1}$ が得られるのはよく知られた事である。 D_0 は裸の拡散定数で $E_F \tau$ に等しい。不純物での散乱はボルン近似で、エネルギーと運動量は保存されるが、 G_R と G_A との間にはエネルギーのやりとりは無く τ は運動量のやりとりがあるところ。図(0)はこの梯子型ダイアグラム



(0)

で、この補正として図(1-a), (1-b), (1-c)があり、その大きさは図(0)に較べて $1/E_F \tau$ だけ小さい。

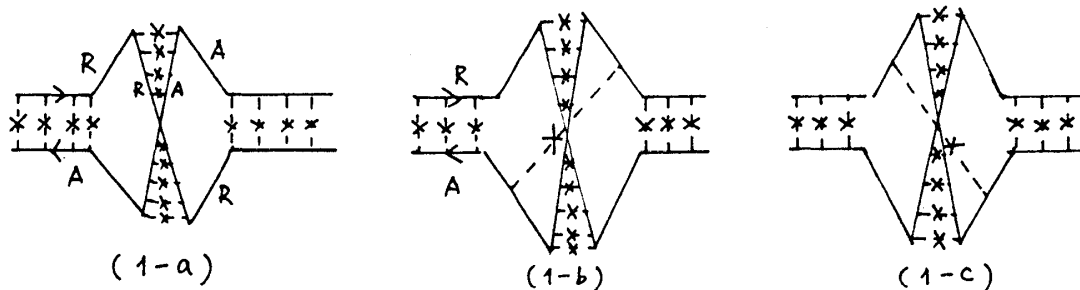
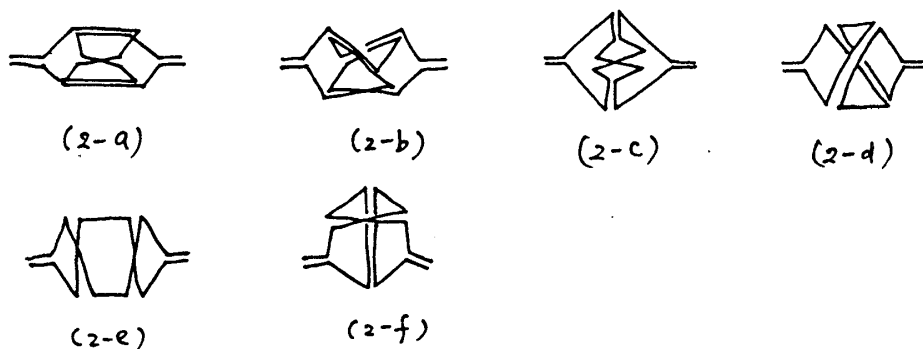


図 (1-a), (1-b), (1-c) を考え ω 二次の σ - ρ - π は $D = D_0 \left(1 - \frac{\hbar}{2\pi E_F \tau} \ln \frac{1}{\omega \tau} \right)$ とする。^{2), 3)} ω 二次の σ - ρ - π はさらに次のダイアグラムがある。⁴⁾



三次, 四次のダイアグラムはさらに数が多くなり, 四次は数百の数
のダイアグラムがある。計算も非常に労力を必要とする。しかしながら,
対称性の考察から四次までの散乱係数 D が簡易な方法
で計算できる。その方法は散乱モードの相互作用を表わす有効
ハミルトニアンを導出し, その幾何学的性質を考慮することによる。実際
この方法により三次までは前に考えられたが^{4), 5)} さらに新しい関係式
が見出されたので四次まで可能になった。図 (1-a) ~ (2-f) の二重線
は $(D_0 \omega^2 - i\omega)^{-1}$ を表わし, 二重線以外は二重線の足の数 n と n 点
vertex が残る。 ω 二次の σ - ρ - π は 4 点 vertex が, ω 三次の σ - ρ - π
は 6 点 vertex ((2-d), (2-e), (2-f)) が, ω 四次の σ - ρ - π は 8 点 vertex が,
四次の σ - ρ - π は 10 点 vertex が表われる。4 点 vertex の足の運動
量を $q_1, \dots, q_4$ とすると

$$V_4(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_4) = D_0 \tau^4 \left[-2(\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_3 + \vec{q}_2 \cdot \vec{q}_4) - (\vec{q}_1 + \vec{q}_3) \cdot (\vec{q}_2 + \vec{q}_4) \right]$$

6 点 vertex は

$$V_6(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_6) = D_0 \tau^6 \left[2(\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 + \vec{q}_2 \cdot \vec{q}_3 + \dots + \vec{q}_6 \cdot \vec{q}_1) + 4(\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_3 + \vec{q}_2 \cdot \vec{q}_4 + \dots + \vec{q}_6 \cdot \vec{q}_2) + 4(\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_4 + \vec{q}_2 \cdot \vec{q}_5 + \vec{q}_3 \cdot \vec{q}_6) \right]$$

と補正を入れて計算される。このような $V_{2m}(\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{2m})$ を自動的に算出する簡便な模型として、二次元の相転移の模型として有名な非線形シグマ模型の一般化を考えよう。磁性体のハイゼンベルグ模型やXY模型, イジング模型あるいは超伝導模型はこのシグマ模型に含まれる。ハミルトニアン密度は次の式で与えられる。

$$H = \frac{1}{2t} \text{tr} (\partial_\mu V)(\partial_\mu V) \quad \dots\dots (1)$$

ここで tr は V が $2m \times 2m$ のマトリックスの形をしていてのトレースと取りこく意味し, t は $1/E_F t$ を表わす。 ∂_μ は d 次元空間での微分。マトリックス V は次の様に書けるという条件がついてる。

$$V = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \phi^t \phi} & i\phi \\ i^t \phi & \sqrt{1 + {}^t \phi \phi} \end{pmatrix} \quad \dots\dots (2)$$

ここで ϕ は $m \times m$ のマトリックスで i は純虚数。 ${}^t \phi$ は $\phi_{i\alpha}$ の i と α を入れ替えたものである。(2)を(1)に代入すると

$$H = -\frac{1}{2t} \left(\sum g^2 \phi_{i\alpha}(g) \phi_{i\alpha}(-g) - \frac{1}{2} \sum V_4(g_1, \dots, g_4) \phi_{i\alpha}(g_1) \phi_{i\alpha}(g_2) \phi_{j\beta}(g_3) \phi_{j\beta}(g_4) \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \sum V_6 \phi_{i\alpha}(g_1) \phi_{i\alpha}(g_2) \phi_{j\beta}(g_3) \phi_{j\beta}(g_4) \phi_{k\gamma}(g_5) \phi_{k\gamma}(g_6) + \dots \right)$$

と無限に続く項の和になる。ここで V_4 や V_6 は前ページの V_4, V_6 に等しい。 $\phi_{i\alpha}$ の i と α は電子と空孔に対応するインデックスで, $i=1 \dots m$, $\alpha=1 \dots m$ とすると, 相互作用は電子, 空孔が一本づつダイアグラムに表わされる事に对应して, $m \rightarrow 0$ の極限をとる。

くりこみ群の方法とは, 無限大の発散が出てくるを, 今の場合は $\ln \omega t$ であるが, くりこみ定数に吸収して有限な結果を得る方法で, 特に高次の項の計算には単純な運動量の切断 Λ というのはよくつかず, 次元正規化法と呼ぶべき一般次元数で計算し, $1/(d-2)$ のポールをくりこみ方法が適当であることが知られている。実際は(1)のハミルトニアンをこの方法で二次元で計算するのは容易であるが, 四次元ではダイアグラムの数が多すぎて不適当である。(1)のハミルトニアンは

性質の良形式として、数学的には今世紀始めに E. Cartan により研究された対称空間に属する。その為、数多くの同値 (isomorphism) 関係が存在し、その幾何学的関係式から、クリニ群関数 (β -函数) を決定することが出来る。特に Sp に依る場合、普通の P - γ -局在の場合と Sp に軌道相対作用が強い場合とでは完全に逆の関係にあることが解る。クリニ群 D はクリニ群の規格運動量 μ に依るものだから

$$\mu \frac{d}{d\mu} D = 0$$

これを D が t と μ , ω の函数であるとして 2 次の微分方程式を得る

$$\left\{ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(t) \frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{\beta(t)}{t} - (d-2) \right) (-i\omega t) \frac{\partial}{\partial (-i\omega t)} \right\} D(t, \mu, \omega) = 0$$

ここで $\beta(t)$ は P - γ -函数で、4 次の結果で次のようになる。

$$\beta(t) \equiv \mu \frac{\partial t}{\partial \mu} = (d-2)t - 2t^2 + 0t^3 + 0t^4 + 0t^5 + O(t^6)$$

幾何学的方法はこの $\beta(t)$ -函数の係数を決定するのは簡便な方法と云えよう。上の微分方程式の解は 2 次元では ($d=2$),

$$D \exp \left(D - \frac{1}{t} \right) = - \frac{i\omega}{\mu^2}$$

で、この式は 4 次の P - γ -形式正しい事になる。

参考文献

- 1) S. Hikami, Nuclear Physics B 215 [FS7] (1983) 555
- 2) E. Abrahams, P.W. Anderson, D.C. Licciardello and T. V. Ramakrishnan, P. R. L. 42 (1979) 673
- 3) L.P. Gorkov, A.I. Larkin and D.E. Khmel'nitskij, Sov. Phys. JETP Lett. 43 (1979) 228
- 4) S. Hikami, Phys. Rev. B 24 (1981) 2671
- 5) S. Hikami, Prog. Theor. Phys. 64 (1980) 1466.