

Weighted generalized Morrey smoothness spaces

追手門学院大学 野井貴弘¹

Takahiro Noi

Otemon Gakuin University

2020 Classification 46B35; 42B35.

1 導入

本稿では斉次の Triebel-Lizorkin 空間 $\dot{F}_{q,r}^s(\mathbb{R}^n)$ を weighted genralized Morrey 空間の枠組みで一般化することで得られる weighted generalized Triebel-Lizorkin-Morrey 空間 $\dot{\mathcal{E}}_{\mathcal{M}_{q,r}^\varphi}^s(w)$ と weighted generalized Triebel-Lizorkin 型空間 $\dot{F}_{q,r}^{s,\varphi}(w)$ について, 基本的な性質を紹介する. 原子分解などのより詳しい内容は [12] にまとめている.

Besov 空間 $B_{q,r}^s(\mathbb{R}^n)$ と Triebel-Lizorkin 空間 $F_{q,r}^s(\mathbb{R}^n)$ の一般化として, Besov-Morrey 空間 $\mathcal{N}_{u,q,r}^s(\mathbb{R}^n)$ や Triebel-Lizorkin-Morrey 空間 $\mathcal{E}_{u,q,r}^s(\mathbb{R}^n)$ と呼ばれる関数空間と Besov 型関数空間 $B_{q,r}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ や Triebel-Lizorkin 型関数空間 $F_{q,r}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ と呼ばれる関数空間がある. 著者は中村氏と澤野氏との共同研究 [11] にて, Besov-Morrey 空間 $\mathcal{N}_{u,q,r}^s(\mathbb{R}^n)$ と Triebel-Lizorkin-Morrey 空間 $\mathcal{E}_{u,q,r}^s(\mathbb{R}^n)$ のノルムに登場する Morrey 空間 $\mathcal{M}_q^u(\mathbb{R}^n)$ のノルムの部分を generalized Morrey 空間 $\mathcal{M}_q^\varphi(\mathbb{R}^n)$ のノルムに置き換えることによって一般化した関数空間 generalized Besov-Morrey 空間 $\mathcal{N}_{\mathcal{M}_q^\varphi}^s(\mathbb{R}^n)$ と generalized Triebel-Lizorkin-Morrey 空間 $\mathcal{E}_{\mathcal{M}_q^\varphi}^s(\mathbb{R}^n)$ を導入し, これらの関数空間に対して, 関数の分解法である原子分解やトレース作用素の有界性について考察した. [11] では Besov 型関数空間 $B_{q,r}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ や Triebel-Lizorkin 型関数空間 $F_{q,r}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ に対しても, generalized Morrey 空間 $\mathcal{M}_q^\varphi(\mathbb{R}^n)$ の要素を取り込むことで一般化した generalized Besov 型関数空間 $B_{q,r}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ と generalized Triebel-Lizorkin 型関数空間 $F_{q,r}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ を導入し², それぞれの関数空間におけるトレース作用素の有界性も研究している. その後, Haroske et al. [7, 8] によっ

¹E-mail adress: t-noi@otemon.ac.jp

²Liang et al. [9] は Nakamura et al. [11] よりも前に, [11] とは異なる generalized Besov 型関数空間と generalized Triebel-Lizorkin 型関数空間を定義し, 原子分解やウェーブレット分解などを考察してい

て $B_{q,r}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ と $F_{q,r}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ におけるウェーブレット分解が研究され, その応用としていくつかの埋め込みの結果が得られている. 近年 Sun et al. [16] により, 非斉次な場合に対して quasi-Ball Banach function space を土台にしたより一般的な関数空間が考察されており, この関数空間は特別な場合には $B_{q,r}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ や $F_{q,r}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ と一致することから, [16] における関数空間は Liang et al. [9] で定義された関数空間よりも一般的なものになっている.

以上のことから, 本稿では斉次の generalized Triebel-Lizorkin-Morrey 空間 $\dot{\mathcal{E}}_{\mathcal{M}_{q,r}^\varphi}^s(\mathbb{R}^n)$ と generalized Triebel-Lizorkin 型空間 $\dot{F}_{q,r}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ に対して, さらに荷重 w を付けて一般化した weighted generalized Triebel-Lizorkin-Morrey 空間 $\dot{\mathcal{E}}_{\mathcal{M}_{q,r}^\varphi}^s(w)$ と weighted Triebel-Lizorkin 型空間 $\dot{F}_{q,r}^{s,\varphi}(w)$ に対して基本的な性質を考察している³.

2 関数空間

この章では weighted generalized Triebel-Lizorkin-Morrey 空間 $\dot{\mathcal{E}}_{\mathcal{M}_{q,r}^\varphi}^s(w)$ と weighted Triebel-Lizorkin 型空間 $\dot{F}_{q,r}^{s,\varphi}(w)$ の定義を与える. どちらの関数空間も weighted generalized Morrey 空間 $\mathcal{M}_q^\varphi(w)$ と関連しており, 特に $\dot{\mathcal{E}}_{\mathcal{M}_{q,r}^\varphi}^s(w)$ の (準) ノルムは $\mathcal{M}_q^\varphi(w)$ の (準) ノルムを用いて定義される.

まず始めに $\mathcal{M}_q^\varphi(w)$ を定義し, その後, 2.1節で $\dot{\mathcal{E}}_{\mathcal{M}_{q,r}^\varphi}^s(w)$ と $\dot{F}_{q,r}^{s,\varphi}(w)$ を定義するために必要な記号などをまとめる. そして, 2.2節で $\dot{\mathcal{E}}_{\mathcal{M}_{q,r}^\varphi}^s(w)$ と $\dot{F}_{q,r}^{s,\varphi}(w)$ を定義する.

generalized Morrey 空間の定義においてよく用いられるクラス $\mathcal{G}_q$ の定義を与える.

$0 < q < \infty$ とする. 非減少関数 $\varphi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ で

$$\varphi(t_1)t_1^{-n/q} \geq \varphi(t_2)t_2^{-n/q} \quad (0 < t_1 \leq t_2 < \infty). \quad (2.1)$$

をみたすものの全体を $\mathcal{G}_q(\mathbb{R}^n)$ で表す.

$\mathbb{R}^n$ 上ほとんどいたるところ正值な局所可積分関数を荷重 (weight) という.

る. Liang et al. [9] における generalized Besov 型関数空間と generalized Triebel-Lizorkin 型関数空間は [11] で定義した generalized Besov 型関数空間, generalized Triebel-Lizorkin 型関数空間とは若干異なる関数空間であることに注意されたい.

³[12] では weighted generalized Besov-Morrey 空間 $\dot{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}_{q,r}^\varphi}^s(w)$ と weighted Besov 型空間 $\dot{B}_{q,r}^{s,\varphi}(w)$ についても考察している.

定義 2.1 (weighted generalized Morrey 空間 $\mathcal{M}_q^\varphi(w)$). $0 < q < \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q(\mathbb{R}^n)$ とし, w を荷重とする. $\mathbb{R}^n$ 上の可測関数 f で

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^\varphi(w)} := \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \varphi(\ell(Q)) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)|^q w(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \quad (2.2)$$

をみたすものの全体の集合を weighted generalized Morrey 空間 $\mathcal{M}_q^\varphi(w)$ という.

2.1 いくつかの記号と用語の準備

weighted generalized Triebel-Lizorkin-Morrey 空間 $\dot{\mathcal{E}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^s(w)$ と weighted Triebel-Lizorkin 型空間 $\dot{F}_{q, r}^{s, \varphi}(w)$ を定義するにあたり, 必要となる立方体などについて, 次の記号を用いる.

- (1) 可測集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ に対して, $|E|$ で E のルベーグ測度を表すものとする. また, χ_E を E の特性関数とする.
- (2) $\mathbb{R}^n$ において, 各辺が座標軸に平行な立方体全体の集合を $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ または単に $\mathcal{Q}$ で表す.
- (3) $Q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ の辺長を $\ell(Q)$ で表す. つまり, $\ell(Q) = |Q|^{1/n}$ である.
- (4) $Q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ に対して, $j_Q := -\log_2 \ell(Q)$ と定義する. 2 進立方体

$$Q_{jk} = \prod_{i=1}^n \left[2^{-j} k_i, 2^{-j} (k_i + 1) \right) \quad (j \in \mathbb{Z}, \quad k = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n)$$

に対して, $j_{Q_{jk}} = j$ である.

- (5) a を正数とし, $Q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ とする. 中心が Q と同じであり, 辺長が $a\ell(Q)$ である立方体を aQ で表す.
- (6) $\mathbb{R}^n$ における 2 進立方体全体の集合を $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ または単に $\mathcal{D}$ で表す.
- (7) $\lfloor \cdot \rfloor$ をガウス記号とする.

2.2 関数空間の定義

2.1節に引き続き, $\dot{\mathcal{E}}_{\mathcal{M}_{q,r}^\varphi}^s(w)$ と $\dot{F}_{q,r}^{s,\varphi}(w)$ を定義するための準備を行う.

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ を急減少関数の空間とする. $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は

$$\text{supp } \hat{\phi} \subset \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} < |\xi| \leq 2 \right\}, \quad (2.3)$$

$$|\hat{\phi}(\xi)| \geq C > 0 \quad \text{if} \quad \frac{3}{5} \leq |\xi| \leq \frac{5}{3} \quad (2.4)$$

をみたすものを考える. ここで, $\hat{\phi}$ は ϕ のフーリエ変換, つまり

$$\hat{\phi}(\xi) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) e^{-ix \cdot \xi} dx \quad (\xi \in \mathbb{R}^n)$$

である.

(2.3) をみたす $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は

$$\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n) = \left\{ \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \phi(x) dx = 0 \quad (\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n) \right\}.$$

に属する. $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ を $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ の部分空間として扱う. このとき, $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ は完備距離空間であることが知られている (例えば [15, (3.7)] を参照). $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ を $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ の双対空間とする. $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ に弱 $*$ -位相を導入すると $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ は完備であることが知られている (例えば [3], [15, (3.7)] を参照). $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ における多項式全体の集合とすると, $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n) \sim \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$ (位相同型) である (例えば [18, Proposition 8.1], [13, Theorem 2.7], [14, Theorem 2.25] あるいは [11, Theorem 6.28] を参照). $f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ と $g \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して, $\langle f, g \rangle := f(g)$ とし, ϕ と f の畳み込みを $\phi * f = \langle f, \phi(x - \cdot) \rangle$ ($x \in \mathbb{R}^n$) と定義する.

$\dot{\mathcal{E}}_{\mathcal{M}_{q,r}^\varphi}^s(w)$ と $\dot{F}_{q,r}^{s,\varphi}(w)$ はそれぞれ, 次の混合ノルム $\mathcal{M}_q^\varphi(w, \ell^r)$ と $L_\varphi^q(w, \ell^r)$ によって定義される.

定義 2.2. $0 < q < \infty$, $0 < r \leq \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q(\mathbb{R}^n)$ とし, w を荷重とする.

(1) $\mathbb{R}^n$ 上の可測関数列 $G = \{g_j\}_{j=-\infty}^\infty$ で

$$\|G\|_{\mathcal{M}_q^\varphi(w, \ell^r)} := \left\| \left\| \{g_j\}_{j=-\infty}^\infty \right\|_{\ell^r} \right\|_{\mathcal{M}_q^\varphi(w)} < \infty$$

をみたすものの全体の集合を $\mathcal{M}_q^\varphi(w, \ell^r)$ と表す.

(2) $\mathbb{R}^n$ 上の可測関数列 $G = \{g_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ に対して

$$\|G\|_{L_\varphi^q(w, \ell^r)} := \sup_{P \in \mathcal{Q}} \frac{\varphi(\ell(P))}{|P|^{\frac{1}{q}}} \left[\int_P \left\| \{ |g_j(x)| \}_{j=\lfloor j_P \rfloor}^{\infty} \right\|_{\ell^r}^q w(x) dx \right]^{\frac{1}{q}}$$

とする. $\|G\|_{L_\varphi^q(w, \ell^r)}$ が有限となる $G = \{g_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ の集合を $L_\varphi^q(w, \ell^r) = L_\varphi^q(\mathbb{R}^n, w, \ell^r)$ と表す.

(3) $w \equiv 1$ であるとき, $\mathcal{M}_q^\varphi(w, \ell^r)$ を $\mathcal{M}_q^\varphi(\ell^r)$ と表す. 同様に $L_\varphi^q(w, \ell^r)$ を $L_\varphi^q(\ell^r)$ と表す.

$\dot{\mathcal{E}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^s(w)$ と $\dot{F}_{q, r}^{s, \varphi}(w)$ を順に定義していく. それぞれの定義において, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して $\phi_j(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{Z}$) を $\phi_j(x) := 2^{jn} \phi(2^j x)$ と定義する.

定義 2.3 (generalized Triebel-Lizorkin-Morrey 空間 $\dot{\mathcal{E}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^s(w)$). $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は (2.3) と (2.4) をみたすとする. $s \in \mathbb{R}, 0 < q < \infty, 0 < r \leq \infty, \varphi \in \mathcal{G}_q$ とし, w は荷重とする. 次に定義する $\|f\|_{\dot{\mathcal{E}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^s(w)}$ が有限となる $f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ 全体の集合を weighted generalized Triebel-Lizorkin-Morrey 空間 $\dot{\mathcal{E}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^s(w)$ という:

$$\begin{aligned} \|f\|_{\dot{\mathcal{E}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^s(w)} &:= \left\| \left\{ 2^{js} |\phi_j * f(\cdot)| \right\}_{j=-\infty}^{\infty} \right\|_{\mathcal{M}_q^\varphi(w, \ell^r)} \\ &= \sup_{P \in \mathcal{Q}} \frac{\varphi(\ell(P))}{|P|^{\frac{1}{q}}} \left[\int_P \left\| \left\{ 2^{js} |\phi_j * f(x)| \right\}_{j=-\infty}^{\infty} \right\|_{\ell^r}^q w(x) dx \right]^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

注意 2.4. (1) $\|f\|_{\dot{\mathcal{E}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^s(w)}$ において, $\sup_{P \in \mathcal{Q}}$ は $\sup_{P \in \mathcal{D}}$ に置き換えてもよい. 実際, 同値な (準) ノルムになる.

(2) $\dot{\mathcal{E}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^s(w)$ が適切に定義されているためには, (準) ノルムが (2.3) と (2.4) をみたす ϕ の取り方に依らないことを示す必要がある. そのためには荷重 w に条件が必要となり, 例えば w は定理 3.3 で述べるような $A_q(\mathbb{R}^n)$ や $\mathcal{B}_{\varphi, q}(\mathbb{R}^n)$ といった集合に属し, さらに weighted integral condition (2.11) をみたすなどの条件が必要である. w がこれらの条件をみたすときには $\dot{\mathcal{E}}_{\mathcal{M}_q^\varphi, r}^s(w)$ は ϕ の取り方に依らないことを示すことができる (定理 3.3).

定義 2.5 (generalized Triebel-Lizorkin 型空間 $\dot{F}_{q,r}^{s,\varphi}(w)$). $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は (2.3) と (2.4) をみたすとする. $s \in \mathbb{R}$, $0 < q < \infty$, $0 < r \leq \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ とし, w は荷重とする. 次に定義する $\|f\|_{\dot{F}_{q,r}^{s,\varphi}(w)}$ が有限となる $f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ 全体の集合を weighted generalized Triebel-Lizorkin 型空間 $\dot{F}_{q,r}^{s,\varphi}(w)$ という:

$$\begin{aligned} \|f\|_{\dot{F}_{q,r}^{s,\varphi}(w)} &:= \left\| \left\{ 2^{js} |\phi_j * f(\cdot)| \right\}_{j=-\infty}^{\infty} \right\|_{L_\varphi^q(w, \ell^r)} \\ &= \sup_{P \in \mathcal{Q}} \frac{\varphi(\ell(P))}{|P|^{\frac{1}{q}}} \left[\int_P \left\| \left\{ 2^{js} |\phi_j * f(x)| \right\}_{j=\lfloor j_P \rfloor}^{\infty} \right\|_{\ell^r}^q w(x) dx \right]^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

$w \equiv 1$ の場合, $\dot{F}_{q,r}^{s,\varphi}(w)$ を $\dot{F}_{q,r}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ と表す.

注意 2.6. (1) $\|f\|_{\dot{F}_{q,r}^{s,\varphi}(w)}$ において, $\sup_{P \in \mathcal{Q}}$ は $\sup_{P \in \mathcal{D}}$ に置き換えてもよい. 実際, 同値な (準) ノルムになる.

(2) $\dot{\mathcal{E}}_{\mathcal{M}_{q,r}^\varphi}^s(w)$ の場合と同様に, $\dot{F}_{q,r}^{s,\varphi}(w)$ の (準) ノルムが (2.3) と (2.4) をみたす ϕ の取り方に依らないことを示す必要がある. そのためには荷重 w に条件が必要となる. 例えば定理 3.1 で述べるように, $w \in A_\infty(\mathbb{R}^n)$ であれば $\dot{F}_{q,r}^{s,\varphi}(w)$ は ϕ の取り方に依らないことを示すことができる.

2.3 荷重クラスと最大不等式について

荷重 w と可測集合 E に対して,

$$w(E) := \int_E w(x) dx, \quad \langle w \rangle_E := |E|^{-1} \int_E w(x) dx$$

と定義する.

ボレル可測関数 f に対して, weighted Hardy-Littlewood maximal operator M_w を

$$M_w f(x) := \sup_{Q \in \mathcal{Q}: x \in Q} \frac{1}{w(Q)} \int_Q |f(y)| w(y) dy \quad (2.5)$$

により定義する. $w \equiv 1$ であるときは M_w を単に M と表し, これを Hardy-Littlewood maximal operator という.

定義 2.7 (Muchenhoupt class A_q). 荷重 w に対して

$$[w]_{A_1} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{Mw(x)}{w(x)} = \inf \{ \alpha > 0 : \forall Q \in \mathcal{D}, \langle w \rangle_Q \leq \alpha \operatorname{ess\,inf}_{x \in Q} w(x) \}$$

と定義する. $1 < q < \infty$ に対して $[w]_{A_q}$ を

$$[w]_{A_q} := \sup_{Q \in \mathcal{D}} \frac{w(Q)}{|Q|} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-\frac{q'}{q}} dx \right)^{\frac{q}{q'}}$$

と定義し, $[w]_{A_\infty}$ を

$$[w]_{A_\infty} := \sup_{Q \in \mathcal{D}} \frac{w(Q)}{|Q|} \exp \left(-\frac{1}{|Q|} \int_Q \log[w(x)] dx \right)$$

と定義する. $1 \leq q \leq \infty$ に対して

$$A_q(\mathbb{R}^n) = A_q := \{ w : \text{weight}, [w]_{A_q} < \infty \}$$

と定義する.

注意 2.8. A_q について次の性質が成り立つことが知られている:

- (1) $1 \leq p \leq q$ とするとき, $A_p \subset A_q$ (例えば [2, Proposition 7.2] を参照).
- (2) $A_\infty = \bigcup_{q \geq 1} A_q$ (例えば [5, Corollary 9.3.4] を参照).
- (3) $w \in A_\infty$ とする. このとき, ある正定数 $C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2$ が存在し, 任意の立方体 E と立方体 $Q \subset E$ に対して

$$C_1 \left(\frac{|E|}{|Q|} \right)^{\alpha_1} \leq \frac{w(E)}{w(Q)} \leq C_2 \left(\frac{|E|}{|Q|} \right)^{\alpha_2} \quad (2.6)$$

が成り立つ. $w \in A_q$ であるときは $\alpha_2 = q$ である. (例えば [2, p. 133-140] を参照).

例 2.9 ([4]). $|x|^\alpha \in A_q(\mathbb{R}^n)$ である必要十分条件は $-n < \alpha < n(q-1)$ である.

$\eta > 0$ とする. べき乗最大作用素 $M^{(\eta)}$ を $M^{(\eta)}f := M[|f|^\eta]^{\frac{1}{\eta}}$ により定義する. つぎの不等式が成り立つことがよく知られている.

定理 2.10 (weighted Fefferman-Stein inequalities). $0 < q < \infty$ とし, $0 < r \leq \infty$ とする.

(1) $0 < \eta < \min\{1, q\}$ かつ $w \in A_{\frac{q}{\eta}}$ ならば, ある正定数 C が存在し, 任意の $f \in L^q(w)$ に対して

$$\|M^{(\eta)}f\|_{L^q(w)} \leq C \|f\|_{L^q(w)}. \quad (2.7)$$

(2) $0 < \eta < \min\{1, q, r\}$ かつ $w \in A_{\frac{q}{\eta}}$ ならば, ある正定数 C が存在し, 任意の $\{f_j\}_{j=-\infty}^{\infty} \subset L^q(w)$ に対して

$$\left\| \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |M^{(\eta)}f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^q(w)} \leq C \left\| \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^q(w)}. \quad (2.8)$$

証明は, (2.7) については例えば Duoandikoetxea [2, Theorem 7.3] を, (2.8) については例えば Torchinsky [17, §XII. 6.3] を参照されたい.

さらに, 次の不等式が成り立つことも知られている. (例えば [1] や [6] を参照).

定理 2.11 (weighted Fefferman-Stein vector valued inequality). $1 < q < \infty$, $1 < r \leq \infty$ とし, $w \in A_{\infty}$ とする. このとき, ある正定数 C が存在し, 任意の $\{f_j\}_{j=-\infty}^{\infty} \subset L^q(w)$ に対して

$$\left\| \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |M_w f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^q(w)} \leq C \left\| \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^q(w)}. \quad (2.9)$$

Weighted generalized Morrey 空間 $\mathcal{M}_q^{\varphi}(w)$ における Hardy-Littlewood maximal operator M の有界性については w が A_q に属するだけでは不十分であることが知られている. 本研究では中村 [10] によって導入された荷重クラス $\mathcal{B}_{\varphi,q}(\mathbb{R}^n)$ と weighted integral condition (2.15) が重要な役割を果たす.

定義 2.12 (荷重クラス $\mathcal{B}_{\varphi,q}(\mathbb{R}^n)$). $0 < q < \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ とし,

$$\Phi_{\varphi,q,w}(Q) := \varphi(\ell(Q)) \left(\frac{w(Q)}{|Q|} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (Q \in \mathcal{Q})$$

と定義する. 荷重 w が $\mathcal{B}_{\varphi,q}(\mathbb{R}^n)$ に属するとは, ある定数 $C_{\varphi,q} > 0$ が存在して, 任意の $Q_0 \in \mathcal{Q}$ に対して

$$\sup_{Q \in \mathcal{Q}: Q \subset Q_0} \Phi_{\varphi,q,w}(Q) \leq C_{\varphi,q} \Phi_{\varphi,q,w}(Q_0) \quad (2.10)$$

が成り立つときをいう。

例 2.13 ([10, Example 2.3]). $1 \leq q < \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q$, $\alpha > -n$ とする. $w(x) = |x|^\alpha \in \mathcal{B}_{\varphi,q}$ である必要十分条件は, ある定数 $C_{\varphi,q} > 0$ が存在して,

$$\varphi(R_0)R_0^{\frac{\alpha}{q}} \leq C_{\varphi,q} \varphi(R_1)R_1^{\frac{\alpha}{q}} \quad (R_0 \leq R_1)$$

が成り立つことである. 特に, $\varphi(t) = t^{\frac{n}{p}}$ ($1 \leq q \leq p < \infty$) であるとき,

$$|x|^\alpha \in \mathcal{B}_{\varphi,q} \iff \alpha \geq -\frac{q}{p} \cdot n$$

である.

定理 2.14 ([10, Theorem 1.3]). $1 < q < \infty$ とし $\varphi \in \mathcal{G}_q(\mathbb{R}^n)$ とする. $w \in A_q(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}_{\varphi,q}(\mathbb{R}^n)$ ならば, *Hardy-Littlewood maximal operator* M は $\mathcal{M}_q^\varphi(w)$ 上の有界作用素である.

w が $\mathcal{B}_{\varphi,q}(\mathbb{R}^n)$ に属するだけでは $\mathcal{M}_q^\varphi(w, \ell^r)$ における Hardy-Littlewood maximal operator M の有界性は示すことができず, 例えば次に定義する weighted integral condition が必要になる.

定義 2.15 (weighted integral condition). $0 < q < \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ とし, w を荷重とする. φ, w, q が weighted integral condition をみたすとは, ある定数 $C > 0$ が存在して,

$$\int_1^\infty \frac{1}{\Phi_{\varphi,w,q}(sQ)} \frac{ds}{s} \leq \frac{C}{\Phi_{\varphi,w,q}(Q)} \quad (Q \in \mathcal{Q}) \quad (2.11)$$

が成り立つときをいう.

注意 2.16. $w \equiv 1$ であるとき, φ, w, q に対する weighted integral condition (2.11) は

$$\int_r^\infty \frac{1}{\varphi(s)} \frac{ds}{s} \leq \frac{C}{\varphi(r)} \quad (r \leq s)$$

と同じである. さらに [11, Proposition 2.7] によって, 次の条件と同値であることが知られている: ある $\varepsilon > 0$ と $C > 0$ が存在し,

$$\varphi(r)r^{-\varepsilon} \leq C\varphi(s)s^{-\varepsilon} \quad (r \leq s) \quad (2.12)$$

が成り立つ. (2.12) は [11, Definition 1.3] において, $r < \infty$ の場合に $\dot{\mathcal{E}}_{\mathcal{M}_{q,r}^\varphi}^s(\mathbb{R}^n)$ を定義する際に仮定した条件である. また, 非斉次の generalized Triebel-Lizorkin 型空間 $F_{q,r}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ を定義する際にも仮定された条件である ([7, Definition 4.1]).

$\mathcal{M}_q^\varphi(w, \ell^r)$ における次の不等式は [10, Theorem 1.4] の直接の系である.

定理 2.17. $1 < q < \infty$, $1 < r < \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q(\mathbb{R}^n)$ とし $w \in A_q(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}_{\varphi, q}(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき, 次は同値である.

- (1) φ, w, q に対する *weighted integral condition* (2.11) が成り立つ.
- (2) ある定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{M}_q^\varphi(w, \ell^r)$ に対し

$$\| \{Mg_j\}_{j=-\infty}^\infty \|_{\mathcal{M}_q^\varphi(w, \ell^r)} \leq C \| \{g_j\}_{j=-\infty}^\infty \|_{\mathcal{M}_q^\varphi(w, \ell^r)}. \quad (2.13)$$

$\dot{F}_{q,r}^{s,\varphi}(w)$ の基本的な性質を調べるために $L_\varphi^q(w, \ell^r)$ における Hardy-Littlewood maximal operator M の有界性を用いようとするのは自然な発想であるが, 定理 2.17 と同様に w は $A_\infty(\mathbb{R}^n)$ に属するだけでは不十分で, 例えば $\mathcal{B}_{\varphi, q}(\mathbb{R}^n)$ にも属する必要がある. さらに, φ, w, q に対する *weighted integral condition* (2.11) が成立する必要がある. 具体的には次の定理が成り立つ.

定理 2.18. $1 < q < \infty$, $1 < r < \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q(\mathbb{R}^n)$ とし $w \in A_q(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}_{\varphi, q}(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき, 次は同値である.

- (1) φ, w, q に対する *weighted integral condition* (2.11) が成り立つ.
- (2) ある定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $\{g_j\}_{j=-\infty}^\infty \in L_\varphi^q(w, \ell^r)$ に対して

$$\left\| \{Mg_j\}_{j=-\infty}^\infty \right\|_{L_\varphi^q(w, \ell^r)} \leq C \left\| \{g_j\}_{j=-\infty}^\infty \right\|_{L_\varphi^q(w, \ell^r)}. \quad (2.14)$$

証明は [7, proof of Theorem 3.6 (ii)] と [10, proof of Theorem 1.4] における議論を用いればよいので割愛する.

注意 2.19. Haroske と Liu[7] は非斉次の generalized Triebel-Lizorkin 型空間 $F_{q,r}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ について考察しており, この関数空間が適切に定義されていることを示すために定理 2.18 の非斉次版で $w = 1$ の場合の結果 [7, Theorem 3.6 (ii)] を用いている. そのため, [7] では $F_{q,r}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ の定義において, $r < \infty$ の場合に $\varphi \in \mathcal{G}_q$ は (2.12) をみたすことを仮定している. 一方, 本研究では定理 2.18 の代わりに定理 2.11 を用いるため, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ が (2.12) をみたすという仮定がなくても $\dot{F}_{q,r}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ が適切に定義されていることを示すことができる.

3 主結果

本講演 (RIMS 共同研究 (公開型) 「実解析・複素解析・函数解析の総合的研究」) で発表した主結果は以下のとおりである.

定理 3.1. $s \in \mathbb{R}$, $0 < q < \infty$, $0 < r \leq \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ とし, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は (2.3) と (2.4) をみたすとする. $w \in A_\infty(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき, 以下が成立する.

(1) *weighted generalized Triebel-Lizorkin* 型空間 $\dot{F}_{q,r}^{s,\varphi}(w)$ の (準) ノルムは ϕ の取り方によらない.

(2) $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{F}_{q,r}^{s,\varphi}(w) \hookrightarrow S'_\infty(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ.

命題 3.2. $s \in \mathbb{R}$, $0 < q < \infty$, $0 < r \leq \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q(\mathbb{R}^n)$ とし, $w \in \mathcal{B}_{\varphi,q}(\mathbb{R}^n) \cap A_\infty(\mathbb{R}^n)$ とする. さらに, $r < \infty$ であるときは, φ, w, q は *weighted integral condition* (2.11) をみたすとする. このとき, $\dot{\mathcal{E}}_{\mathcal{M}_{q,r}^\varphi}^s(w) = \dot{F}_{q,r}^{s,\varphi}(w)$ (ノルム同値) が成り立つ.

定理 3.3. $s \in \mathbb{R}$, $0 < q < \infty$, $0 < r \leq \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ とし, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は (2.3) と (2.4) をみたすとする. $w \in \mathcal{B}_{\varphi,q}(\mathbb{R}^n) \cap A_\infty(\mathbb{R}^n)$ とし, さらに, $r < \infty$ であるときは, φ, w, q は *weighted integral condition* (2.11) をみたすとする.

(1) *weighted generalized Triebel-Lizorkin-Morrey* 空間 $\dot{\mathcal{E}}_{\mathcal{M}_{q,r}^\varphi}^s(w)$ の (準) ノルムは ϕ の取り方によらない.

(2) $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{\mathcal{E}}_{\mathcal{M}_{q,r}^\varphi}^s(w) \hookrightarrow S'_\infty(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ.

定理 3.1 の証明は大変長く, 多くの補題が必要となるため, [12] を参照されたい. 定理 3.3 は命題 3.2 と定理 3.1 の系である.

命題 3.2 は次に述べる定理 3.4 と補題 3.5 によって示すことができる. 定理 3.4 の証明についても [12] を参照されたい.

定理 3.4. $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は (2.3) と (2.4) をみたすとする. $a \in (0, \infty)$ とする. 任意の $j \in \mathbb{Z}$, $f \in S'_\infty(\mathbb{R}^n)$ と $x \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$\phi_j^{*,a} f(x) := \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|\phi_j * f(y)|}{(1 + 2^j |x - y|)^a}.$$

と定義する. $s \in \mathbb{R}$, $0 < q < \infty$, $0 < r \leq \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q(\mathbb{R}^n)$ とし, ある $u \in [1, \infty)$ に対して $w \in A_u(\mathbb{R}^n)$ であるとする. $a > n(1+u)/\min\{q, r\}$ ならば

$$\sup_{P \in \mathcal{Q}} \frac{\varphi(\ell(P))}{|P|^{\frac{1}{q}}} \left[\int_P \left(\sum_{j=\lfloor j_P \rfloor}^{\infty} 2^{jsr} |\phi_j^{*,a} f(x)|^r \right)^{\frac{q}{r}} w(x) dx \right]^{\frac{1}{q}}$$

は $\dot{F}_{q,r}^{s,\varphi}(w)$ の同値なノルムである. $r = \infty$ の場合も同様である.

補題 3.5. $0 < q < \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q(\mathbb{R}^n)$ とし, $\eta > 0$ とする.

(1) w が $\mathcal{B}_{\varphi^\eta, \frac{q}{\eta}}(\mathbb{R}^n)$ に属する必要十分条件は $w \in \mathcal{B}_{\varphi, q}(\mathbb{R}^n)$.

(2) φ^η , w , $\frac{q}{\eta}$ に対する *weighted integral condition*

$$\int_1^\infty \frac{1}{\Phi_{\varphi^\eta, w, \frac{q}{\eta}}(sQ)} \frac{ds}{s} \leq \frac{C}{\Phi_{\varphi^\eta, w, \frac{q}{\eta}}(Q)} \quad (Q \in \mathcal{Q}) \quad (3.1)$$

が成り立つ必要十分条件は, φ , w , q に対する *weighted integral condition*

$$\int_1^\infty \frac{1}{\Phi_{\varphi, w, q}(sQ)} \frac{ds}{s} \leq \frac{C}{\Phi_{\varphi, w, q}(Q)} \quad (Q \in \mathcal{Q})$$

が成り立つことである.

証明. (1) $\Phi_{\varphi^\eta, w, \frac{q}{\eta}} = (\Phi_{\varphi, w, q})^\eta$ より自明である. (2) $\Phi_{\varphi^\eta, w, \frac{q}{\eta}} = (\Phi_{\varphi, w, q})^\eta$ と [10, Lemma 2.2] より示すことができる. $\square$

以上の準備の下, 命題 3.2 を示す.

命題 3.2 の証明. 各空間のノルムの定義より, $\|f\|_{\dot{F}_{q,r}^{s,\varphi}(w)} \leq \|f\|_{\dot{\mathcal{M}}_{q,r}^{s,\varphi}(w)}$ は自明である. よって, 逆向きの不等式が成り立つことを示す. そのためには, ある正定数 C が存在し, 任意の $P \in \mathcal{D}$ に対して

$$I_P := \frac{\varphi(\ell(P))}{|P|^{\frac{1}{q}}} \left(\int_P \left(\sum_{j=-\infty}^{j_P} 2^{jsr} |\phi_j * f(x)|^r \right)^{\frac{q}{r}} w(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \|f\|_{\dot{F}_{q,r}^{s,\varphi}(w)} \quad (3.2)$$

が成立することを示せばよい.

$j \leq j_P$ とし, $x, y \in \mathbb{R}^n$ は $|x - y| \leq n \cdot 2^{-j}$ をみたすとする. このとき, 任意の正数 a に対して

$$|\phi_j * f(x)| \lesssim \frac{|\phi_j * f(x)|}{(1 + 2^j|x - y|)^a} \lesssim \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|\phi_j * f(x)|}{(1 + 2^j|x - y|)^a} \sim \phi_j^{*,a} f(y)$$

が成り立つ⁴. $A_\infty(\mathbb{R}^n)$ の性質より, $w \in A_u(\mathbb{R}^n)$ となる $u \in [1, \infty)$ が存在する. この u に対して a を $a > n(1 + u)/\min\{q, r\}$ をみたすようにとる. x を中心とする辺長が 2^{-j} の立方体を $Q(x, 2^{-j})$ と表す. $j_{Q(x, 2^{-j})} = j$ であることに注意すると, 定理 3.4 より, 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ と $j \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$\begin{aligned} 2^{jsq} |\phi_j * f(x)|^q &\lesssim \frac{1}{w(Q(x, 2^{-j}))} \int_{Q(x, 2^{-j})} 2^{jsq} |\phi_j^{*,a} f(y)|^q w(y) dy \\ &\lesssim \frac{1}{w(Q(x, 2^{-j}))} \int_{Q(x, 2^{-j})} \left(\sum_{i=j_{Q(x, 2^{-j})}}^{\infty} 2^{isr} |\phi_i^{*,a} f(y)|^r \right)^{\frac{q}{r}} w(y) dy \\ &\lesssim \frac{1}{w(Q(x, 2^{-j}))} \left(\frac{\varphi(\ell(Q(x, 2^{-j})))}{|Q(x, 2^{-j})|^{\frac{1}{q}}} \right)^{-q} \times \\ &\quad \times \left(\frac{\varphi(\ell(Q(x, 2^{-j})))}{|Q(x, 2^{-j})|^{\frac{1}{q}}} \right)^q \int_{Q(x, 2^{-j})} \left(\sum_{i=j_{Q(x, 2^{-j})}}^{\infty} 2^{isr} |\phi_i^{*,a} f(y)|^r \right)^{\frac{q}{r}} w(y) dy \\ &\lesssim \frac{1}{w(Q(x, 2^{-j}))} \left(\frac{\varphi(\ell(Q(x, 2^{-j})))}{|Q(x, 2^{-j})|^{\frac{1}{q}}} \right)^{-q} \|f\|_{\dot{F}_{q,r}^{s,\varphi}(w)}^q \end{aligned}$$

を得る. 式を整理すると, 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ と $j \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$2^{js} |\phi_j * f(x)| \lesssim \Phi_{\varphi,w,q}(Q(x, 2^{-j}))^{-q} \|f\|_{\dot{F}_{q,r}^{s,\varphi}(w)}$$

となる. この不等式より

$$I_P = \frac{\varphi(\ell(P))}{|P|^{\frac{1}{q}}} \left(\int_P \left(\sum_{j=-\infty}^{j_P} 2^{jsr} |\phi_j * f(x)|^r \right)^{\frac{q}{r}} w(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

⁴ $\lesssim$ と $\sim$ の意味は次のとおりである: $A, B \geq 0$ とする. 示すべき内容において重要なパラメータや要素に依存しない正定数 C で $A \leq CB$ をみたすものが存在するとき, この不等式を $A \lesssim B$ と表す. 同様に, $A \geq CB$ をみたす正定数 C が存在するとき, この不等式を $A \gtrsim B$ と表す. さらに, $A \lesssim B \lesssim A$ であるとき, $A \sim B$ と表す.

$$\lesssim \|f\|_{\dot{F}_{q,r}^{s,\varphi}(w)} \frac{\varphi(\ell(P))}{|P|^{\frac{1}{q}}} \left(\int_P \left(\sum_{j=-\infty}^{j_P} \Phi_{\varphi,w,q}(Q(x, 2^{-j}))^{-qr} \right)^{\frac{q}{r}} w(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

を得る. よって, (3.2) を示すためには, 任意の $P \in \mathcal{D}$ に対して

$$J_P := \frac{\varphi(\ell(P))}{|P|^{\frac{1}{q}}} \left(\int_P \left(\sum_{j=-\infty}^{j_P} \Phi_{\varphi,w,q}(Q(x, 2^{-j}))^{-qr} \right)^{\frac{q}{r}} w(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \lesssim 1 \quad (3.3)$$

が成り立つことを示せばよいことがわかる. 以下, このことを示す. まず, $j \leq j_P$ であるので,

$$\bigcup_{x \in P} Q(x, 2^{-j}) = \left(1 + \frac{2^{-j}}{2^{-j_P}}\right) P \subset 2 \cdot 2^{j_P-j} P$$

が成り立つことに注意する. (2.6) より, 任意の $x \in P$ に対して

$$\frac{1}{w(Q(x, 2^{-j}))} = \frac{1}{w(2 \cdot 2^{j_P-j} P)} \cdot \frac{w(2 \cdot 2^{j_P-j} P)}{w(Q(x, 2^{-j}))} \lesssim \frac{1}{w(2 \cdot 2^{j_P-j} P)}$$

が成立する. この不等式と $\varphi \in \mathcal{G}_q$ より

$$\begin{aligned} J_P &= \frac{\varphi(\ell(P))}{|P|^{\frac{1}{q}}} \left(\int_P \left(\sum_{j=-\infty}^{j_P} \Phi_{\varphi,w,q}(Q(x, 2^{-j}))^{-qr} \right)^{\frac{q}{r}} w(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \frac{\varphi(\ell(P))}{|P|^{\frac{1}{q}}} \left(\int_P \left(\sum_{j=-\infty}^{j_P} \frac{1}{w(Q(x, 2^{-j}))^{\frac{r}{q}}} \left(\frac{\varphi(\ell(Q(x, 2^{-j})))}{|Q(x, 2^{-j})|^{\frac{1}{q}}} \right)^{-r} \right)^{\frac{q}{r}} w(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\lesssim \frac{\varphi(\ell(P))}{|P|^{\frac{1}{q}}} \left(\int_P \left(\sum_{j=-\infty}^{j_P} \frac{1}{w(2 \cdot 2^{j_P-j} P)^{\frac{r}{q}}} \left(\frac{\varphi(\ell(Q(x, 2^{-j})))}{|Q(x, 2^{-j})|^{\frac{1}{q}}} \right)^{-r} \right)^{\frac{q}{r}} w(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\lesssim \varphi(\ell(P)) \left(\frac{w(P)}{|P|} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=-\infty}^{j_P} \frac{1}{w(2 \cdot 2^{j_P-j} P)^{\frac{r}{q}}} \left(\frac{\varphi(\ell(2 \cdot 2^{j_P-j} P))}{|2 \cdot 2^{j_P-j} P|^{\frac{1}{q}}} \right)^{-r} \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\sim \Phi_{\varphi,w,q}(P) \left(\sum_{j=-\infty}^{j_P} \frac{1}{\Phi_{\varphi^r,w,\frac{q}{r}}(2 \cdot 2^{j_P-j} P)} \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\sim \Phi_{\varphi,w,q}(P) \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\Phi_{\varphi^r,w,\frac{q}{r}}(2^i P)} \right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

を得る．最後の式における級数は補題 3.5, (2.10) と weighted integral condition (3.1) より

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\Phi_{\varphi^r, w, \frac{q}{r}}(2^i P)} \lesssim \int_1^{\infty} \frac{1}{\Phi_{\varphi^r, w, \frac{q}{r}}(sP)} \frac{ds}{s} \lesssim \frac{1}{\Phi_{\varphi^r, w, \frac{q}{r}}(P)} \quad (3.5)$$

と評価できる．実際, (2.10) より

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\Phi_{\varphi^r, w, \frac{q}{r}}(sP)} \frac{ds}{s} \gtrsim \sum_{i=1}^{\infty} \int_{2^{i-1}}^{2^i} \frac{1}{\Phi_{\varphi^r, w, \frac{q}{r}}(2^i P)} \frac{ds}{s} \sim \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\Phi_{\varphi^r, w, \frac{q}{r}}(2^i P)}$$

が成り立つ．(3.4) と (3.5) より, 各 $P \in \mathcal{D}$ に対して

$$\begin{aligned} J_P &\lesssim \Phi_{\varphi, w, q}(P) \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\Phi_{\varphi^r, w, \frac{q}{r}}(2^i P)} \right)^{\frac{1}{r}} \lesssim \Phi_{\varphi, w, q}(P) \left(\frac{1}{\Phi_{\varphi^r, w, \frac{q}{r}}(P)} \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\lesssim \Phi_{\varphi, w, q}(P) \cdot \frac{1}{\Phi_{\varphi, w, q}(P)} \lesssim 1 \end{aligned}$$

となり, (3.3) が成り立つ. □

参考文献

- [1] M. Bownik, Anisotropic Triebel-Lizorkin spaces with doubling measures, J Geom Anal, vol. 17, no. 3, pp. 387–424, 2007.
- [2] J. Duoandikoetxea, Fourier Analysis, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [3] I. M. Gel'fand and G. E. Shilov, Generalized Functions, Academic Press, London, UK, 1968.
- [4] L. Grafakos, Classical Fourier Analysis, Third Edition, Springer, GTM249.
- [5] L. Grafakos, Modern Fourier Analysis, Second Edition, Springer, GTM250.
- [6] L. Grafakos, L. Liu and D. Yang, Vector-valued singular integrals and maximal functions on spaces of homogeneous type, Math. Scand. 104 (2009), 296–310.

- [7] D. D. Haroske and Z. Liu, Generalized Besov-type and Triebel-Lizorkin-type spaces, *Studia Math.* **273** (2023), 161-199
- [8] D. D. Haroske, Z. Liu, S.D.Moura and L. Skrzypczak, Embeddings of generalized Morrey smoothness spaces, *Acta. Math. Sin.-English Ser.* **41**, 413–456 (2025).
<https://doi.org/10.1007/s10114-025-3553-3>
- [9] Y. Liang, Y. Sawano, T. Ullrich, D. Yang and W. Yuan, A new framework for generalized Besov-type and Triebel-Lizorkin-type spaces, *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)* **489** (2013), 114 pp.
- [10] S. Nakamura, Generalized weighted Morrey spaces and classical operators, *Math. Nachr.* **289** (2016), 2235–2262.
- [11] S. Nakamura, T. Noi and Y. Sawano, Generalized Morrey spaces and trace operator, *Sci. China Math.* **59** (2016), 281–336.
- [12] T. Noi, Weighted generalized Morrey smoothness spaces, to be submitted.
- [13] Y. Sawano, Homogeneous Besov spaces, *Kyoto J Math.* **60** (1) 1 - 43, April 2020.
- [14] Y. Sawano, *Theory of Besov Spaces*. Springer: Springer Singapore, 2018.
- [15] E. M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.
- [16] J. Sun, D. Yang and W. Yuan, W. A framework of Besov-Triebel-Lizorkin type spaces via ball quasi-Banach function sequence spaces I: real-variable characterizations, *Math. Ann.* **390**, 4283–4360 (2024).
- [17] A. Torchinsky, *Real-Variable Methods in Harmonic Analysis*, Academic Press, San Diego, 1986
- [18] W. Yuan, W. Sickel and D. Yang, *Morrey and Campanato Meet Besov, Lizorkin and Triebel*. Lecture Notes in Math., vol. 2005, Springer, Berlin, 2010.