

Blowing-down の一つの例について

琉大 理工 森 泰子

1. weakly 1-complete manifold に対する cohomology の消滅定理の応用の一つに、中野先生の、" Monoidal 変換の逆問題 " がある。即ち、 n 次元複素多様体 $\tilde{X}$ の、余次元 1 の部分多様体 S が、或る m 次元複素多様体 M 上に、 $\mathbb{P}^{r-1}$ -bundle の構造をもっており ($m+r=n$, $r \geq 2$) line bundle $[S]$ を、各 fibre L_a 上に制限したとき $[S]_{L_a} = [e]^{-1}$ ($[e]$ は $\mathbb{P}^{r-1}$ の超平面の定義する line bundle) が成り立っているならば、 M を含む m 次元複素多様体 X があって、 $\tilde{X}$ は M を中心とする X の monoidal 変換となっているものである。ここでは、同じ状況のもとで、 $[S]_{L_a} = [e]^{-k}$ ($k \geq 2$) が成り立つ場合に、このような X (今度は、特異点が出てくる) を作ることを考える。

2. $\mathbb{P}^{r-1}$ を k 次 Veronese 変換 ν_k で $\mathbb{P}^N$ に埋め込む。即ち、 $\mathbb{P}^{r-1}$ の齊次座標 $(\eta^1 : \dots : \eta^r)$ に対して、 $\eta^1, \dots, \eta^r$ の k 次

単項式 $M^p(\eta)$ ($p=1, \dots, N+1 = rH_k$) 全体を斉次座標とする.

$\mathbb{P}^N$ の部分多様体が $j(\mathbb{P}^{r-1}) = V$ である. V の cone $K \subset$

$\mathbb{C}^{N+1}$ は、 $\mathbb{C}^{N+1}$ の normal analytic set 頂点 (0) を唯一の特異点としてもつ. $\mathbb{C}^{N+1}$ を

(0) を中心として blow-up して $\tilde{\mathbb{C}}^{N+1}$ を作る. $\tilde{\mathbb{C}}^{N+1}$ は $\mathbb{P}^N$

上の line bundle で、covering $U_p = \{(z^1 : \dots : z^{N+1}) \in \mathbb{P}^N \mid$

$z^p \neq 0\}$ ($p=1, \dots, N+1$) に関して transition functions $\{\frac{z^i}{z^j}\}$

で表わされる. $\tilde{\mathbb{C}}^{N+1}$ 内の K 上の部分を $\tilde{K}$ とすれば、 $\tilde{K}$

は line bundle $(\tilde{\mathbb{C}}^{N+1} \rightarrow \mathbb{P}^N)$ を V 上に制限したのにな

っている. $\tilde{\mathbb{C}}^{N+1} \supset p^{-1}(0) \approx \mathbb{P}^N$ は line bundle $(\tilde{\mathbb{C}}^{N+1} \rightarrow \mathbb{P}^N)$

の θ -section だから $T \equiv p^{-1}(0) \cap \tilde{K}$ も line bundle

$(\tilde{K} \rightarrow V)$ の θ -section である. $p: \tilde{\mathbb{C}}^{N+1} - p^{-1}(0) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^{N+1} - 0$

から $\tilde{K} - T \approx K - 0$ となっている. $\tilde{K}$ の divisor T が

定義する line bundle $[T]$ を T 上に制限すると

$$[T]_T = T \text{ の } \tilde{K} \text{ に於ける normal bundle}$$

$$= (\tilde{K} \rightarrow V) = (\tilde{\mathbb{C}}^{N+1} \rightarrow \mathbb{P}^N)|_V.$$

ここで $M^{\alpha}(\eta) = (\eta^{\alpha})^k$ ($\alpha=1, \dots, r$) とすれば V は

r 個の $U_{p_{\alpha}} \supset \{(M^p(\eta)) \in \mathbb{P}^N \mid (\eta^{\alpha})^k \neq 0\}$ ($\alpha=1, \dots, r$) で

cover される. 従ってこのとき transition functions は

$$\frac{z^{\alpha}}{z^{\beta}} = \frac{(\eta^{\alpha})^k}{(\eta^{\beta})^k} = \left(\frac{\eta^{\alpha}}{\eta^{\beta}}\right)^k \quad \text{である. 他方 } \mathbb{P}^{r-1} \text{ 上の line bundle}$$

$[e]$ は covering $\{(\eta) \in \mathbb{P}^{r-1} \mid \eta^{\alpha} \neq 0\}$ ($\alpha=1, \dots, r$) に関して

transition functions $\{\frac{\eta^{\alpha}}{\eta^{\beta}}\}$ で定義されるから $(\tilde{\mathbb{C}}^{N+1} \rightarrow \mathbb{P}^N)|_V$

$= [e]^{-k}$ である。故に、1) $\hat{K} - T \approx K - 0$, 2) $\hat{K} \supset T$ (codim 1), 3) $T \xrightarrow{\mathbb{P}^{n-1}} 0$, 4) $[T]_T = [e]^{-k}$ なる状態が得られた。

3. [定理 1] (消滅定理)

weakly 1-complete manifold V と、 V 上の line bundle B 及び canonical line bundle K_V に対して、 $K_V^{-1} \otimes B > 0$ ならば

$$H^q(V, \mathcal{O}(B)) = 0 \quad (q=1, \dots, n-1).$$

証明の概略は、例えば 数理解析研究所講究録 116 の、中野先生の "モノイダル変換の逆向問題について" を見ればよい。

[定理 2(k)] 考えている問題の状況のもとで、即ち

$$\begin{array}{c} \hat{X} \supset S \\ \downarrow \mathbb{P}^{n-1} \\ M \end{array}, [S]_{L_a} = [e]^{-k} \text{ for } \forall a \in M$$

ならば、各点 $a \in M$ に対して、次の性質をもつ $\hat{X}$ に於ける L_a の近傍 V が存在する:

- i) $V \cap L_b \neq \emptyset$ ならば $L_b \subset V$.
- ii) V は weakly 1-complete manifold で、 $\varepsilon=1, 2$ に対して $K_V^{-1} \otimes [S]_V^{-\varepsilon} > 0$.

(証明) $a \in M$ を中心とする局所座標 $\zeta^1, \dots, \zeta^m$ を、座標近傍 $D = \{ \zeta \in \mathbb{C}^m \mid \phi(\zeta) < 1 \}$ ($\phi(\zeta) \equiv \sum_{j=1}^m |\zeta^j|^2$) に

対して $\pi^1(D) \approx D \times \mathbb{P}^{r-1}$ なるように取れば $[S]_{D \times \mathbb{P}} = [e]^{-k}$ である (但し $[e]$ は projection $D \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ を $D \times \mathbb{P}$ 上に引き戻している).

$\mathbb{P}^{r-1}$ の斉次座標 $(\eta^1: \dots: \eta^r)$ に対して $\xi_\alpha^\beta \equiv \frac{\eta^\beta}{\eta^\alpha}$ ($\beta = 1, \dots, \alpha, \dots, r$) は $U_\alpha = \{(\eta) \in \mathbb{P}^{r-1} \mid \eta^\alpha \neq 0\}$ 上の局所座標である. $D \times \mathbb{P}$ 上 $[e]$ は $(\{D \times U_\alpha\}, \{\frac{\eta^\beta}{\eta^\alpha}\})$ で定義される. $\varepsilon_{\alpha\beta} \equiv \frac{\eta^\beta}{\eta^\alpha} = \xi_\alpha^\beta$ とおく.
 $a_\alpha \equiv e^{\phi(s)} \sum_{\beta=1}^r |\xi_\alpha^\beta|^2$ なる fibre metric により $[e] > 0$ である.

$\tilde{X}$ の座標近傍 $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ で次のようなものが取れる:
 $V_\lambda \cap S = D \times U_\lambda$, $\mathbb{P} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ (finite), $\{U_\lambda\}$ は $\{U_\alpha\}$ の細分 (細分 $\sigma: \Lambda \rightarrow \{1, \dots, r\}$; $U_\lambda \subset U_{\sigma(\lambda)}$).

V_λ 上の局所座標 $(z_\lambda^1, \dots, z_\lambda^m, y_\lambda, x_\lambda^1, \dots, \hat{x}_\lambda^{\sigma(\lambda)}, \dots, x_\lambda^r)$ を次のように取る:

$$V_\lambda \cap S = \{y_\lambda = 0\}, \quad z_\lambda^i|_S = \zeta^i \quad (i=1, \dots, m), \quad x_\lambda^\alpha|_S = \xi_{\sigma(\lambda)}^\alpha \quad (\alpha=1, \dots, r), \quad \hat{x}_\lambda^{\sigma(\lambda)} \equiv 1.$$

このとき $V' \equiv \bigcup_\lambda V_\lambda$ は L_a の近傍で $V' \cap S = D \times \mathbb{P}$ である. 又 $[S]_{V'}$ は $(\{V_\lambda\}, \{\frac{y_\lambda}{y_\mu}\})$ で定義される.

$e_{\lambda\mu} \equiv \frac{y_\lambda}{y_\mu}$ とおく. $e_{\lambda\mu}|_S = \varepsilon_{\lambda\mu}^{-k}$ とできる ($\varepsilon_{\sigma(\lambda)\sigma(\mu)}$ を $\varepsilon_{\lambda\mu}$ と略記する).

adjunction formula: $K_{V' \cap S} = K_{V'}|_{V' \cap S} \otimes [S]_{V' \cap S}$

から $K_{V'}|_{V' \cap S} = K_{D \times \mathbb{P}^{r-1}} \otimes [S]_{D \times \mathbb{P}^{r-1}}^{-1} = [e]^{-r} \otimes [e]^k = [e]^{-(r-k)}$ である。従って $K_{V'}$ は $(\{V'_\lambda\}, \{k_{\lambda\mu}\})$, $k_{\lambda\mu}|_S = \varepsilon_{\lambda\mu}^{-(r-k)}$ で表わされる。

$H^1(D \times \mathbb{P}^r, \mathcal{O}([e]^k)) = 0$ ($k \geq 1$) を使って、正則関数 $\zeta^j \in \Gamma(D \times U'_\lambda, \mathcal{O})$ ($j=1, \dots, m$), holomorphic cross-sections $\tau^p \equiv \left\{ \frac{M^p(\gamma)}{(\eta^{\sigma(\lambda)})^k} \right\}_\lambda \in \Gamma(V' \cap S, \mathcal{O}([e]^k))$ ($p=1, \dots, N+1$) 及び $\omega^p(\varepsilon) \equiv \left\{ \frac{N^p(\gamma)}{(\eta^{\sigma(\lambda)})^{r+(\varepsilon-1)k}} \right\}_\lambda \in \Gamma(V' \cap S, \mathcal{O}([e]^{r+(\varepsilon-1)k}))$ ($p=1, \dots, rH_{r+(\varepsilon-1)k}$) ($N^p(\gamma)$ は $\gamma^1, \dots, \gamma^r$ の $r+(\varepsilon-1)k$ 次の全単項式を表わす) ($\varepsilon=1, 2$) を、 γ_λ の中を法として V'_λ 上に拡張する。例之は、 $\tau^p = \{\tau_\lambda^p\}_\lambda$ についてやってみる：

今、 p を一つ決めて、 p は略して書く。 $\tau_\lambda \in \Gamma(D \times U'_\lambda, \mathcal{O})$ の V'_λ 上への拡張を $t_\lambda \in \Gamma(V'_\lambda, \mathcal{O})$ とすれば、 $t_\lambda - \varepsilon_{\lambda\mu}^{-1} t_\mu$ は S 上で 0 になるから、或る正則関数 $g_{\lambda\mu}^{(1)} \in \Gamma(V'_\lambda \cap V'_\mu, \mathcal{O})$ があって、 $t_\lambda - \varepsilon_{\lambda\mu}^{-1} t_\mu = \gamma_\lambda g_{\lambda\mu}^{(1)}$ と書ける。

$g_{\lambda\mu}^{(1)} + \varepsilon_{\lambda\mu}^{-2} g_{\mu\nu}^{(1)} = g_{\lambda\nu}^{(1)}$ だから $\{g_{\lambda\mu}^{(1)}\} \in Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}([S]^{-2}))$ である。ここで、 V' の covering $\{V'_\lambda\}$ を $\mathcal{V}$ で、 $V' \cap S$ の covering $\{D \times U'_\lambda\}$ を $\mathcal{U}$ で表わす。 $g_{\lambda\mu}^{(1)}$ の S 上への制限を $\psi_{\lambda\mu}^{(1)}$ とすれば、 $\{\psi_{\lambda\mu}^{(1)}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}([e]^{2k}))$ である。

$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}([e]^{2k})) = 0$ を使うと、 $\psi_\lambda^{(1)} \in \Gamma(D \times U'_\lambda, \mathcal{O})$ があって、 $\psi_{\lambda\mu}^{(1)} = \psi_\lambda^{(1)} - \varepsilon_{\lambda\mu}^{2k} \psi_\mu^{(1)}$ となる。 $\psi_\lambda^{(1)}$ の V'_λ への拡張を $g_\lambda^{(1)} \in \Gamma(V'_\lambda, \mathcal{O})$ とし、 $t_\lambda^{(2)} \equiv t_\lambda - \gamma_\lambda g_\lambda^{(1)}$

とすれば, $t_\lambda^{(2)} - e_{\lambda\mu}^{-1} t_\mu^{(2)}$ は, S 上で, $(\gamma_\lambda)^2$ を法として

0 になる. 従って, 或る $g_{\lambda\mu}^{(2)} \in \Gamma(V'_\lambda \cap V'_\mu, \mathcal{Q})$ があって

$$t_\lambda^{(2)} - e_{\lambda\mu}^{-1} t_\mu^{(2)} = (\gamma_\lambda)^2 g_{\lambda\mu}^{(2)} \quad \text{と書ける. このとき,}$$

$\{g_{\lambda\mu}^{(2)}\} \in Z'(\mathcal{V}, \mathcal{Q}([S]^{-2}))$ である. 以下, 同様にして, λ

段階で, $t_\lambda^{(l)} - e_{\lambda\mu}^{-1} t_\mu^{(l)} = (\gamma_\lambda)^l g_{\lambda\mu}^{(l)}, \{g_{\lambda\mu}^{(l)}\} \in Z'(\mathcal{V}, \mathcal{Q}([S]^{-l}))$

を得る. この操作を $Z^\sharp$, $\omega^\sharp(\varepsilon) = \{\omega_\lambda^\sharp(\varepsilon)\}_\lambda$ にもやって

$z_\lambda^\sharp, t_\lambda^\sharp, w_\lambda^\sharp(\varepsilon) \in \Gamma(V'_\lambda, \mathcal{Q})$ を, 次を満すようにできる:

$$\begin{cases} z_\lambda^\sharp - z_\mu^\sharp = (\gamma_\lambda)^l t_{\lambda\mu}^\sharp, & \{t_{\lambda\mu}^\sharp\} \in Z'(\mathcal{V}, \mathcal{Q}([S]^{-l})) \\ t_\lambda^\sharp - e_{\lambda\mu}^{-1} t_\mu^\sharp = (\gamma_\lambda)^l g_{\lambda\mu}^\sharp, & \{g_{\lambda\mu}^\sharp\} \in Z'(\mathcal{V}, \mathcal{Q}([S]^{-l-1})) \\ w_\lambda^\sharp(\varepsilon) - e_{\lambda\mu}^{-1} e_{\lambda\mu}^{-\varepsilon} w_\mu^\sharp(\varepsilon) = (\gamma_\lambda)^l h_{\lambda\mu}^\sharp(\varepsilon), \\ & \{h_{\lambda\mu}^\sharp(\varepsilon)\} \in Z'(\mathcal{V}, \mathcal{Q}(K^{-1} \otimes [S]^{-l-\varepsilon})) \quad (\varepsilon=1, 2). \end{cases}$$

C^∞ -関数芽の層は fine sheaf だから

$$\begin{cases} f_{\lambda\mu}^\sharp = F_\lambda^\sharp - e_{\lambda\mu}^{-l} F_\mu^\sharp, & F_\lambda^\sharp \in \Gamma(V'_\lambda, C^\infty) \\ g_{\lambda\mu}^\sharp = G_\lambda^\sharp - e_{\lambda\mu}^{-l-1} G_\mu^\sharp, & G_\lambda^\sharp \in \Gamma(V'_\lambda, C^\infty) \\ h_{\lambda\mu}^\sharp(\varepsilon) = H_\lambda^\sharp(\varepsilon) - e_{\lambda\mu}^{-l-\varepsilon} H_\mu^\sharp(\varepsilon), & H_\lambda^\sharp(\varepsilon) \in \Gamma(V'_\lambda, C^\infty) \quad (\varepsilon=1, 2) \end{cases}$$

と表わされる.

$Z^\sharp \equiv z_\lambda^\sharp - (\gamma_\lambda)^l F_\lambda^\sharp$ は V' 全体での C^∞ -関数である.

又, $T_\lambda^\sharp \equiv t_\lambda^\sharp - (\gamma_\lambda)^l G_\lambda^\sharp \in \Gamma(V'_\lambda, C^\infty)$,

$W_\lambda^\sharp(\varepsilon) \equiv w_\lambda^\sharp(\varepsilon) - (\gamma_\lambda)^l H_\lambda^\sharp(\varepsilon) \in \Gamma(V'_\lambda, C^\infty)$ とすれば,

$\{T_\lambda^\sharp\}_\lambda \in \Gamma(V', C^\infty([S]^{-1})), \{W_\lambda^\sharp(\varepsilon)\}_\lambda \in \Gamma(V', C^\infty(K^{-1} \otimes [S]^{-\varepsilon}))$

$(\varepsilon=1, 2)$ である.

そこで $A_\lambda \equiv \sum_{p=1}^{N+1} |T_\lambda^p|^2$, $B_\lambda^{(\varepsilon)} \equiv \sum_p |W_\lambda^p(\varepsilon)|^2$
 とおくと $A_\lambda |y_\lambda|^2 = A_\mu |y_\mu|^2$ から
 $\psi \equiv \phi(Z) + e^{\phi(Z)} A_\lambda |y_\lambda|^2$ は V' 全体での
 C^∞ -関数である.

$(t_\lambda^1, \dots, t_\lambda^{p_{0\omega}} \equiv 1, \dots, t_\lambda^{N+1})$ は $(\xi_\lambda^1, \dots, \xi_\lambda^{r_{0\omega}} \equiv 1, \dots, \xi_\lambda^r)$ の 1次から k 次までの単項式全体から、それらの拡張 $(t_\lambda^1, \dots, t_\lambda^{p_{0\omega}} \equiv 1, \dots, t_\lambda^{N+1})$ は $(x_\lambda^1, \dots, x_\lambda^{r_{0\omega}} \equiv 1, \dots, x_\lambda^r)$ の 1次から k 次までの単項式全体とできる. このとき

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\sum_p |T^p|^2 \right) = x^\beta (1 + P_\beta(x)) + y^l(\) + \bar{y}^l(\) + |y|^{2l}(\),$$

$$\sum_p t^p \frac{\partial t^p}{\partial x^\beta} \equiv x^\beta (1 + P_\beta(x)) \quad (\beta=1, \dots, r),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \left(\sum_p |T^p|^2 \right) = \delta_{\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta}(x) + y^l(\) + \bar{y}^l(\) + |y|^{2l}(\),$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (x^\beta P_\beta(x)) \equiv Q_{\alpha\beta}(x) \quad (\alpha, \beta=1, \dots, r),$$

である. $P_\beta(x)$, $Q_{\alpha\beta}(x)$ は共に x の $(2k-2)$ 次の多項式で、
 例えば $k=2$ のとき $P_\beta(x) = 2|x^\beta|^2 + \sum_{\beta_1 \neq \beta} |x^{\beta_1}|^2$,

$$Q_{\alpha\beta}(x) = \begin{cases} 4|x^\alpha|^2 + \sum_{\alpha_1 \neq \alpha} |x^{\alpha_1}|^2 & (\alpha=\beta) \\ \bar{x}^\alpha x^\beta & (\alpha \neq \beta) \end{cases}$$

のような形をしている.

$\psi = \phi(Z) + e^{\phi(Z)} \left(\sum_p |T_\lambda^p|^2 \right) |y_\lambda|^2$ の Levi form
 を評価する: V'_λ を一つ決めて λ は省略する. V'_λ は
 小さく取り直してもよいから $G > 0$ を大きく取って

$\sum' |x^\alpha|^2 < G$ と考えてよい ($\sum'$ は $\alpha=1, \dots, \sigma(\lambda), \dots, r$ の和を表わす). $\eta > 0$ を $\eta G < \frac{1}{3}$ のように取る.

$$l \geq 3 \text{ のとき } \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{z}^j \partial \bar{z}^k} & \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{z}^j \partial \bar{y}} & \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{z}^j \partial \bar{x}^\beta} \\ & \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial \bar{y}} & \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial \bar{x}^\beta} \\ & & \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^\alpha \partial \bar{x}^\beta} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \delta_{jk} + O(|y|^2) e^{\phi(2)} (1 + \sum' |t^p|^2) \{ y \bar{z}^j + O(|y|^3) \} & e^{\phi(2)} |y|^2 \{ \bar{z}^j x^\beta (1 + P_\beta) + O(|y|) \} \\ e^{\phi(2)} (1 + \sum' |t^p|^2) + O(|y|^2) & e^{\phi(2)} \bar{y} \{ x^\beta (1 + P_\beta) + O(|y|) \} \\ e^{\phi(2)} |y|^2 \{ \delta_{\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta} + O(|y|) \} \end{bmatrix}$$

$$y=0 \text{ のとき } \begin{bmatrix} \delta_{jk} & 0 \\ 0 & e^{\phi(2)} (1 + \sum' |t^p|^2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0.$$

$y \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} & (1 + \sum' |t^p|^2) (dy, d\bar{y}) + \sum' y \bar{x}^\alpha (1 + P_\alpha) (dx^\alpha, d\bar{y}) \\ & + \sum'_\beta \bar{y} x^\beta (1 + P_\beta) (dy, d\bar{x}^\beta) + \sum'_{\alpha, \beta} |y|^2 (\delta_{\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta}) (dx^\alpha, d\bar{x}^\beta) \\ = & |dy|^2 + \sum' |x^\alpha dy + y dx^\alpha|^2 + \sum' |x^\alpha|^2 |x^\alpha dy + 2y dx^\alpha|^2 \\ & + \sum'_{\alpha < \beta} |x^\alpha x^\beta dy + y x^\beta dx^\alpha + y x^\alpha dx^\beta|^2 + \sum' |\dots|^2 + \dots + \sum' |\dots|^2 \\ \geq & |dy|^2 + \sum' |x^\alpha dy + y dx^\alpha|^2 \\ = & |dy|^2 + \sum' \{ (1+\eta)^{\frac{1}{2}} x^\alpha dy + (1+\eta)^{-\frac{1}{2}} y dx^\alpha \}^2 - \eta |x^\alpha|^2 |dy|^2 + (1 - \frac{1}{1+\eta}) |y|^2 |dx^\alpha|^2 \} \\ \geq & \{ 1 - \eta (\sum' |x^\alpha|^2) \} |dy|^2 + |y|^2 \sum' \frac{\eta}{1+\eta} |dx^\alpha|^2. \end{aligned}$$

$|y| > 0$ が小的时候 $1 - \eta (\sum' |x^\alpha|^2) + O(|y|^2) > \frac{2}{3}$,

$(\frac{\eta}{1+\eta} \delta_{\alpha\beta} + O(|y|)) > 0$ とできる. 後ろの Hermite 行列の最

小固有値 $\lambda > 0$ である.

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha} e^{\phi(z)} y \bar{a}_{\alpha} (dx^{\alpha}, d\bar{y}) + \sum_{\beta} e^{\phi(z)} \bar{y} a_{\beta} (dy, d\bar{x}^{\beta}) \\ & \geq - \left(\sum_{\alpha} |a_{\alpha}| \right) |dy|^2 - e^{\phi(z)} |y|^2 \sum_{\alpha} (e^{\phi(z)} |a_{\alpha}|) |dx^{\alpha}|^2 \\ & \quad (a_{\alpha} \text{ は } O(|y|) \text{ の量}). \end{aligned}$$

従って, 右下の4つの部分

$$\begin{aligned} & \geq \left[e^{\phi(z)} \left\{ 1 - \eta \left(\sum_{\alpha} |x^{\alpha}|^2 \right) + O(|y|^2) \right\} - \left(\sum_{\alpha} |a_{\alpha}| \right) \right] |dy|^2 \\ & \quad + e^{\phi(z)} |y|^2 \left[\sum_{\alpha, \beta} \left(\frac{\eta}{1+\eta} \delta_{\alpha\beta} + O(|y|) \right) (dx^{\alpha}, d\bar{x}^{\beta}) - \sum_{\alpha} (e^{\phi(z)} |a_{\alpha}|) |dx^{\alpha}|^2 \right] \end{aligned}$$

必要ならば, $|y| > 0$ を更に小さくして

$$\geq \frac{7}{12} |dy|^2 + e^{\phi(z)} |y|^2 \sum_{\alpha} \frac{\Delta}{2} |dx^{\alpha}|^2$$

とできる. 対角線以外の残りの4つも, 共役なもの同志

組にして, 下から評価してやれば, $|y| > 0$ が小, $\phi(z)$ も小の

とき, ψ の Levi form $\geq \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^m |dx^j|^2 + |dy|^2 \right)$ とで

きる. 故に, $|y|$ が小, $\phi(z)$ も小のとき, ψ の Levi form ≥ 0

がわかった.

$\varepsilon = 1, 2$ に対して, $C_{\lambda}^{(\varepsilon)} \equiv B_{\lambda}^{(\varepsilon)} e^{\ell\psi}$ とおけば $\{C_{\lambda}^{(\varepsilon)}\}_{\lambda}$

は $K_V^{-1} \otimes [S]_V^{-\varepsilon}$ の fibre metric を与える. $\ell \geq 3$ のとき,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \bar{z}^k} \log C_{\lambda}^{(1)} & \frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \bar{y}} \log C_{\lambda}^{(1)} & \frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \bar{x}^{\beta}} \log C_{\lambda}^{(1)} \\ & \frac{\partial^2}{\partial y \partial \bar{y}} \log C_{\lambda}^{(1)} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial \bar{x}^{\beta}} \log C_{\lambda}^{(1)} \\ & & \frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha} \partial \bar{x}^{\beta}} \log C_{\lambda}^{(1)} \end{bmatrix}$$

は, S 上に制限すると,

$$\begin{bmatrix} l \frac{\partial^2}{\partial \bar{s}^i \partial \bar{s}^k} \left(\sum_{j=1}^m |\bar{s}^j|^2 \right) & 0 \\ 0 & l e^{\phi(s)} \left(1 + \sum_{p=1}^{N+1} |\tau^p|^2 \right) \\ & \frac{\partial^2}{\partial \bar{s}^i \partial \bar{s}^k} \log \left(\sum_p |\omega^p(\varepsilon)|^2 \right) \end{bmatrix} > 0.$$

従って, $|s|$ が小的时候, $K_V^{-1} \otimes [S]_V^{-\varepsilon} > 0$ ($\varepsilon=1, 2$) である.
 十分小なる $\delta > 0$ に対して, $V \equiv \{ \psi < \delta \} \subset V'$ とできるから, V は $\bar{V} \equiv (1 - \frac{\psi}{\delta})^{-1}$ に関して weakly 1-complete, $K_V^{-1} \otimes [S]_V^{-\varepsilon} > 0$ ($\varepsilon=1, 2$) である. (終)

4. X を構成する. 点 $a \in M$ に対して, 定理 2(k) にいう U_a の近傍 V を取れば, $V \cap S \approx D \times \mathbb{P}$,
 $[S]_{V \cap S} = [e]^{-k}$ である.

cohomology の消滅定理 1 から, $H^i(V, \mathcal{O}([S]^{-\varepsilon})) = 0$ ($\varepsilon=1, 2$) を得る. これを, 層の完全列: $0 \rightarrow \mathcal{O}([S]^{-1}) \rightarrow \mathcal{Q}_V \rightarrow \mathcal{Q}_{V \cap S} \rightarrow 0$,
 $0 \rightarrow \mathcal{O}([S]^{-2}) \rightarrow \mathcal{O}([S]^{-1}) \rightarrow \mathcal{Q}_{V \cap S}([S]_{V \cap S}^{-1}) \rightarrow 0$ から得られる cohomology の完全列に使って, 制限写像:

$\Gamma(V, \mathcal{Q}_V) \rightarrow \Gamma(V \cap S, \mathcal{Q}_{V \cap S})$, $\Gamma(V, \mathcal{O}([S]^{-1})) \rightarrow \Gamma(V \cap S, \mathcal{O}([e]^k))$ が全射となる. 故に, D 上の局所座標 $\bar{s}^i \in \Gamma(D \times \mathbb{P}, \mathcal{O})$ の拡張 $\bar{z}^i \in \Gamma(V, \mathcal{Q}_V)$ ($i=1, \dots, m$), 及び $[e]^k$ の sections $\{\tau_\lambda^p\}_\lambda$ の拡張 $\{\bar{\tau}_\lambda^p\}_\lambda \in \Gamma(V, \mathcal{O}([S]^{-1}))$ ($p=1, \dots, N+1$) が存在し, 同型: $\Gamma(V, \mathcal{A}(S)) \approx \Gamma(V, \mathcal{O}([S]^{-1}))$ ($\mathcal{A}(S)$ は

S の定義する ideal の層) により, $f^p \equiv \gamma_\lambda f_\lambda^p \in \Gamma(V, \mathcal{I}(S))$ が決まる ($V = \bigcup_\lambda V_\lambda$ と, 座標近傍で cover (しておく)).

$$\begin{aligned} \Phi: V = \bigcup_\lambda V_\lambda &\longrightarrow \mathbb{C}^m \times \widehat{\mathbb{C}}^{N+1} \\ p &\longmapsto ((z^1(p), \dots, z^m(p)), (f^1(p), \dots, f^{N+1}(p)), (f^1(p), \dots, f^{N+1}(p))) \end{aligned}$$

なる holomorphic mapping は, L_a の各点で rank n ,

$\Phi(L_a) \approx (0) \times \mathbb{P}^{r-1}$ である. 従って, L_a の近傍 W と

$0 \in \mathbb{C}^m$ の近傍 $D' \subset D$ を適当に取って, $\Phi(W) = D' \times \widehat{K}$

とできる. $D' \times \widehat{K}$ は, $\Delta^* \equiv D' \times K$ を $\Gamma \equiv D' \times (0)$ を

中心として blow-up (したもので, $D' \times \widehat{K} - D' \times T \approx D' \times K - D' \times (0)$)

より $W - S \approx \Delta^* - \Gamma$ である. 又, Γ は, M に於ける a の近傍と同一視できる.

M の各点 a 毎に, このような $W_a, \Delta_a^*, \Gamma_a$ を作れば,

$\pi_a: W_a \rightarrow \Delta_a^*$, onto holomorphic s.t. 1) $W_a - S \approx \Delta_a^* - \Gamma_a$,

2) $W_a \supset S$ (codim 1), 3) $\pi_a: S \xrightarrow{\mathbb{P}^{r-1}} \Gamma_a$, 4) $[S]_{L_b} = [e]^{-k}$

for $\forall b \in D_a$ となっている. $W_a \cap W_b \neq \emptyset$ のとき,

$$\begin{array}{ccccc} W_a & \supset & W_a \cap W_b & \xrightarrow{id} & W_a \cap W_b \subset W_b \\ \pi_a \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \pi_b \\ \Delta_a^* & \supset & \pi_a(W_a \cap W_b) & \xrightarrow{\phi_{ab}} & \pi_b(W_a \cap W_b) \subset \Delta_b^* \end{array}$$

$$\phi_{ab} \equiv \pi_b \circ id \circ \pi_a^{-1}: \pi_a(W_a \cap W_b) - \Gamma_a \xrightarrow{\cong} \pi_b(W_a \cap W_b) - \Gamma_b$$

なる biholomorphic map は, $\pi_a(W_a \cap W_b) \rightarrow \pi_b(W_a \cap W_b)$

に, 連続に拡張でき, homeomorphic になる. Δ^* は $\mathbb{C}^{m+N+1}$ の

normal analytic set であるから、 $\phi_{ab} : \pi_a(W_a \cap W_b) \xrightarrow{\cong} \pi_b(W_a \cap W_b)$ は、解析空間としての同型を与える。故に、 $\{\Delta_a^*\}$, $\{\Gamma_a\}$ はうまくつながって、解析空間 X^* と、その特異点の全体 (それ自身は X^* の部分多様体で、 M と同型) をなす。

$\bigcup_{a \in M} W_a$ は S を cover (している)。

$X \equiv (\tilde{X} - S) \cup X^* = (\tilde{X} - \bigcup_{a \in M} W_a) \cup (\bigcup_{a \in M} \Delta_a^*)$ が求めるものである。

参考文献

- [1] A. Fujiki - S. Nakano, Supplement to "On the inverse of monoidal transformation", Publ. R.I.M.S., Vol. 7 (1971-72), pp. 637-644.
- [2] S. Nakano, On the inverse of monoidal transformation, Publ. R.I.M.S., Vol. 6 (1970-71), pp. 483-502.