

モニジュ・アペル 方程式

阪大・理 角田秀一郎

1. Introduction. 標数正の代数多様体上に、(リーマン)計量, 曲率, リッチ曲率等を定義し, それから得られる微分方程式を解いてみようという一試みをニニで述べてみる. 筆者は上の試みから, 代数幾何に新しい幾何を生み出すと信じているが, 単なる空想かもしれないし, 幸運にも上記のような概念が存在したとしても, ニニから述べる定義とは全く異なるかもしれない. 読者はひとりの試みとしてとらえられたことを筆者は望む. なお, 我々は標数正の多様体上に“微分幾何的類似物”としてクリスタルコホモロジーを持っているが, ニニと以下の諸概念との関係ははっきりしていない. (したがって以下述べる事からすべて既知の事実のやき直しという可能性もあることに注意されたい).

2. Definition. V を標数正の代数閉体 k ($k = \overline{k}$, $\text{char}(k) = p > 0$) 上の非特異代数多様体とする. 閉点 $P \in V$

の局所環の完備化 $\hat{\mathcal{O}}_{p,V}$, $n = \dim V$ 変数の形式的な中級数環に同型である。Wert がついた環 $R = W(k)$ 上の n 変数形式的中級数環 $R[[T_1, \dots, T_n]]$, 二つで R の複素数体 $\mathbb{C}$ の埋め込み ι をひと固定し, $R\{T_1, \dots, T_n\} \subseteq R[[T_1, \dots, T_n]]$ と $\mathbb{C}\{T_1, \dots, T_n\}$ (収束中級数環) の共通部分とする。二つで, 自然な準同型 $R\{T_1, \dots, T_n\} \xrightarrow{\pi_p} \hat{\mathcal{O}}_{p,V}$ をひととり, 固定する。自然な単射準同型 $\{V \text{ の正則関数 } \} \rightarrow$

$\{V \rightarrow \coprod_{p \in V} \hat{\mathcal{O}}_{p,V}\}$ ($V = \{V \text{ の点 } \}$) により V 上の正則関数 f を V から $\coprod_{p \in V} \hat{\mathcal{O}}_{p,V}$ への写像とみなす。二つで, 正則関数の持ち上げ"を定義する。正則関数の持ち上げ" $\varphi: V \rightarrow R\{T_1, \dots, T_n\}$ とは, $\pi_p(\varphi(p))$ で定義した $V \rightarrow \coprod_{p \in V} \hat{\mathcal{O}}_{p,V}$ からの意味で正則関数になっていることという。直観的にいえば" $\varphi: V \rightarrow R\{T_1, \dots, T_n\}$ を"正則関数"と見て議論を進めていくということである。二つで $R\{T_1, \dots, T_n\}$ は $\mathbb{C}$ 上の解析関数の集まりと見て"値"を考慮することができるとに注意する(後で極限操作がとま有交力となる)。上の議論と全く同様に, 正則関数の微分の持ち上げ, 標準層 (canonical bundle) の持ち上げ, 可逆層, Wert バンダルの持ち上げ"を定義できる。残念なことにこれだけでは充分な議論が展開できず, 有限射を使ってより多くの"関数"を考慮に入れておいたほうがよい。

まず, $k[[T_1, \dots, T_n]]$ の商体の代数閉包内の整閉包 S
 $= k[[T_1, \dots, T_n]]'_{Q(k[[T_1, \dots, T_n]])}$ とおく. これは S が持ち上り
 が存在する. すなわち, T' という整域で, $T = R[[T_1, \dots, T_n]]$ 上整で
 T' から S へ自然な準同型がある. $\{U_\alpha \rightarrow V\}$ と
 V のある開集合 U の分離有限射の集まりとして, U と同
 様に持ち上り"と定義する. その際局所環の持ち上り"は,
 T' の中で作り, $T' \rightarrow S$ と compatible になるようにする.

$f_{\alpha i}, g_{\alpha i}$ と U_α 上の正則関数の持ち上り"とすると, "関数"
 $\sum f_{\alpha i} \bar{g}_{\alpha i}$ と表さることも出来る. ここで $\bar{g}_{\alpha i}$ は $g_{\alpha i}$ の共役
 である ($T = R[[T_1, \dots, T_n]] \hookrightarrow \mathbb{C}[[T_1, \dots, T_n]]$) であり $\sum f_{\alpha i} \bar{g}_{\alpha i}$ がい.

各点 $p \in \text{image}(U_\alpha)$ で, $\mathbb{C}[[T_1, \dots, T_n]]$ に対応する $d\alpha$ 上の
 関数となるととき, $\sum f_{\alpha i} \bar{g}_{\alpha i}$ と擬連続関数と呼び,
 これは C^k 関数 (微分可算) のとき, 擬 C^k 関数と呼び,

擬 C^∞ 関数の列 $\{F_n\}$ があり, 任意 $\epsilon > 0$ に対して,
 F_n の ϵ 回微分が $n \rightarrow \infty$ のとき, 収束するとき, $\lim F_n$
 と擬 C^∞ 関数と呼び, 擬 C^∞ 関数については, その
 関数の値, 微分を定義できることに注意されたい.

3. 計量, 曲率. 任意の階数のベクトルバンドルに
 ついて定義できるが, 記号が煩雑になるだけなので,
 ラインバンドルのときに説明する. 擬 C^∞ 関数
 が局所的に, $\int |f_\alpha|^2$ とかけかつ各点で値が

正のとき, 正と呼ぶ。同様に $\int H_i^2$ の形の擬複素
関数の極限となる擬複素関数は値(各点での)が
正のとき, 正と呼ぶ。南被覆 $\{U_\alpha\}$ に対して, U_α 上
定義された擬複素関数 f_α について, 正擬複素関数の比で
あらわされ, かつ line bundle L の変換も compatible
のとき, $\{f_\alpha\}$ を L の計量と呼ぶ。このとき,
 $\partial\bar{\partial} \log F_\alpha$ が "well-defined" になれる Ricci 曲率
と呼ぶ。ここで "well-defined" は自明ではない。
ことに注意する。実際, $ch(k) \neq 2$ のとき,

$$\partial\bar{\partial} \log \int H_i^2 = \frac{1}{2} \int (f_i df_j - f_j df_i) \wedge (\bar{f}_i d\bar{f}_j - \bar{f}_j d\bar{f}_i) \quad \text{という公式を使う。}$$

$ch(k) = 2$ のとき, 及ぶ詳細は [1] を参照されたい。

4. 予想 (あるいは期待)。ここでは V は非特異射影
多様体とする。接ベクトルバンドル T_V の計量 (正確
には定義してないが, 以下から推測していいだろう) ω がい。
局所的に $\partial\bar{\partial} \log$ (正擬複素関数の商) とかけるとき,
 ω を Kähler 計量と呼ぶ。

予想 1. V は上の通り。もし 1) K_V ample

2) $K_V \sim \mathcal{O}(\frac{3}{2})$ - K_V ample $Pic(V) = 1$ ならば,

V は Einstein Kähler 計量をもつ。すなわち,

Kähler 計量 ω が存在して,

$$\partial \bar{\partial} \log \det \omega = c(\omega) \quad (c \text{ は定数})$$

予想2. $H \in \text{ample line bundle}$ として,
 E が H -stable vector bundle であるならば,
 E は hermitian-Einstein 計量をもつ.

5. 結果

定理. $\dim V = 1$ のとき, 予想1, 2 は正しい.

証明 $\Leftarrow$ こと述べる事はできず、簡単に「 $\Rightarrow$ 」は「 $\Leftarrow$ 」.
 予想1, 2 に関して 標数 $c = 0$ のときは、具体的に解が
 かけている事をつかえる. つまり $\mathbb{P}^1$ のとき, $E, K, \text{計量}$
 は 非同次座標 z をつかって $\frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2} = \partial \bar{\partial} \log(1+|z|^2)$,
 E 楕円曲線のときは、普通被覆 $C \rightarrow E$ の座標,
 とをつかって $dz \wedge d\bar{z} = \partial \bar{\partial} \log e^{|z|^2}$, $g \geq 2$ の曲線 C に対しては,
 普通被覆 $D = \{z \in C \mid |z| < 1\} \rightarrow C$ を使って $\frac{dz \wedge d\bar{z}}{1-|z|^2} = (\Sigma |z|^2) dz \wedge d\bar{z}$
 $= \partial \bar{\partial} \log(\Sigma |z|^2)$. 予想2 に関しては,
 stable vector bundle は ユニタリ表現から
 くるという有名な定理に注目する

標数 $c > 0$ の場合 普通被覆は存在しないから、
 有限被覆は「充分」存在するので それを使って,
 $E, K, \text{計量}$ があるならば, $H, E, \text{計量}$ に 収束する列を

を見つけておくことができる。

6. 蛇足。域 Ω 奇 Ω もお話ししたことでいい、通常の C^∞ 関数、正則関数についても、擬 C^∞ 関数から、擬 C^∞ 関数をつくる操作を考えることができる。
 $\mathcal{D}' = \mathcal{D}' = \mathcal{D}'$ 問題として下にまとめておく。

問題1. C^∞ 関数の列が各点収束し、すべての偏導関数も各点収束するとき、極限関数について
 何と何とこといえるか。

問題2. 正則関数の列について問題1と同様のことを問う。

最後に、表題の Monge-Ampère 方程式
 説明すると、予想1の ω を見つけてと、上の意味での微分方程式を解くことは同等で、その微分方程式は、複素数体上では、Monge-Ampère の一種とわかっているので、Monge-Ampère という名も使ったのでいい、擬 Monge-Ampère などと呼ぶ方が適切なかもしれません。(後述の注意)。

文 献

[1] S. Tanimoto. Monge-Ampere equations on an algebraic variety with positive characteristic, Algebraic and Topological Theories - In the memory of Dr. Takehiko Miyata, Kinokuniya, 1985.