

4次元空間内のホモロジー球面

神戸大 理 鈴木 晋一

研究集会の講演では、4次元ユークリッド空間 R^4 に埋込まれた3次元ホモロジー球面が、3次元球面 S^3 と同相になるための十分条件を与えたが、その後そこで議論に飛躍があることが判明したので、本稿では講演時に省略した最初の部分について報告する。読者のお許を乞う。

尚、 R^4 に埋込まれた3次元ホモロジー球面について、永瀬氏の報告[4]があるので参照されたい。

§1. 準備

考察はすべて Combinatorial Category で行う。

R^n を n 次元ユークリッド空間, $S^n = R^n \cup \{\infty\}$ を n 次元球面とする。 D^n で R^n における標準的な n 次元球体を示す。

M^3 を、方向付可能な3次元閉多様体とする。特に本稿では R^4 (従って S^4 に) に埋込み可能なもののみを取扱う。

対 $(M^3 \subset S^4)$, $(M^3 \subset R^4)$ によって、3次元閉多様体 M^3 の S^4 または R^4 への「埋込み」と、 S^4 または R^4 に埋込まれた M^3 とを、適時、表わす。次のことが知られる:

1.1. 命題 (本間): 任意の $(M^3 \subset R^4)$ に対し, ambient isotopy $H: R^4 \times I \rightarrow R^4 \times I$ が存在し, 対 $(H_1(M^3) \subset R^4)$ は次の条件を満たす: $R^4 = R^3 \times R^1$ の 4 座標軸 R^1 の座標を高さと考えて, R^1 に関する $H_1(M^3)$ の Morse 関数を与えたとき,

指数 0 の臨界点の臨界値は, $-\infty < t < -2$,

指数 1 の " , $-2 < t < -1$,

指数 2 の " , $1 < t < 2$,

指数 3 の " , $2 < t < +\infty$

内に, それぞれある。◀

(1) 上記のように, 臨界点をその指数の順に揃えた埋込みを, 整列埋込み と呼ぶ。以後ほとんど整列埋込みのみを考察することになる。

(2) 一般に, 同じ指数の臨界点同志の順序は変えられない。順序の交換が可能な場合の一般的取扱いが永瀬[4]である。

(3) $(M^3 \subset R^4)$ を整列埋込みとする。有限個の臨界値を除いて, $M^3 \cap R^3 \times \{t\} \equiv M_t$ は方向付可能な閉曲面である。特に, $M_0 = M^3 \cap R^3 \times \{0\}$ は連結となる。そこで, $G(M^3 \subset R^4) = g(M_0)$, 曲面 M_0 の種数, と定める。

1.2. 命題 (本間): $(M^3 \subset \mathbb{R}^4)$ を整列埋込みとすると, $(M^3; M^3 \cap \mathbb{R}_+^4, M^3 \cap \mathbb{R}_-^4; M_0)$ は M^3 の Heegaard 分解である。

ただし, $\mathbb{R}_+^4 = \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$, $\mathbb{R}_-^4 = \mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0]$ とする。◀

これらの命題から, M^3 に關する多くの情報が, $M_0 = M^3 \cap \mathbb{R}^3[0]$ に反映していることが予想される。

1.3. M_0 の構成: $(M^3 \subset \mathbb{R}^4)$ を整列埋込みとし, $G(M^3 \subset \mathbb{R}^4) = g(M_0) = p$ とする。 $M_{-2} = M^3 \cap \mathbb{R}^3 \times \{-2\}$ は、指数 0 の臨界点の個数 s 個の、互いに交わらない 2 次元球面 $\Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_s$ から成る。 M_{-2} は $\mathbb{R}^3 \times \{-2\}$ を $s+1$ 個の領域に分割する。そのうちでコンパクトでない領域を 外側 と名付け、以下この領域と境界を共有する領域を 内側 とし、残りの領域で内側と境界を共有する領域を 外側 とし、 $\dots$, と同じように続けて、 $s+1$ 個の領域を、内側と外側の 2 種に分ける。一般に有限個の閉曲面 $F_1 \cup \dots \cup F_s$ が $\mathbb{R}^3$ 内にあるときも、このルールに従って、 $s+1$ 個の領域に内側と外側の区別をするものとする。

さて, $\mathbb{R}^3 \times (-2, -1)$ 内では, $s+p-1$ 個の指数 1 の臨界点があるが, これらは普通に、指数 1 のハンドル $h_i: D^1 \times D^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \{t\}$, $-2 < t < -1$, $i=1, 2, \dots, s+p-1$, が順次 M_{-2} に付加されると考へる。閉曲面 M_{-2} にハンドル h_1 を付加して得られる曲面を

$$M_{-2}(h_1) \equiv M_{-2} - h_1(\partial D^1 \times D^2) \cup h_1(D^1 \times \partial D^2)$$

のように書き, 帰納的に $M_{-2}(h_1)(h_2) = M_{-2}(h_1, h_2)$ のように書き

ば, $M_2(h_1, h_2, \dots, h_{s+p-1}) = M_0$ と考えることが出来る。ここで
 Rouke-Sanderson [6, §6] の notation を借用しよう。ハンドル
 h_i の b -sphere $h_i(\{0\} \times \partial D^2)$ を b_i で, b -tube $h_i(\{0\} \times D^2)$
 を B_i , $i=1, 2, \dots, s+p-1$, で示すことにする。ところで, いわ
 ゆる handle-isotopy ([8], §2, p.116) を使えば, p 個のハン
 ドルについてはその a -sphere (2点) が $\Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_s$ のうちの同
 一の球面上にあり, 残り $s-1$ 個のハンドルについてはその
 a -sphere が異なる球面上にあるように出来る, [8] Th. 2.3.
 タイプ 1 のハンドルを 本質的ハンドル, タイプ 2 のタイプ
 のハンドルを 繋ぎハンドルと呼ぼう。 $h_{\lambda_1}, h_{\lambda_2}, \dots, h_{\lambda_p}$ を本質的
 ハンドルとすると, $\{b_{\lambda_1}, b_{\lambda_2}, \dots, b_{\lambda_p}\}$ はハンドル体 $M^3 \cap \mathbb{R}^4$
 の meridian 系となる。さらに, M_0 上は, 互いに素な単純閉曲
 線の族 $\{b_{\lambda_1}^*, b_{\lambda_2}^*, \dots, b_{\lambda_p}^*\}$ で次の性質をもつものが送れる:
 $b_j^* \cap b_j$ は唯一つの交叉点から成り, $b_j^* \cap b_k = \emptyset$ ($j \neq k$). $b_{\lambda_i}^*$
 を b_{λ_i} の dual と呼ぶ。これは一意ではないが, ハンドル体
 $M^3 \cap \mathbb{R}^4$ の 1st ホモロジー群の基底となる。特に $b_{\lambda_i}^* \subset \mathbb{R}^3 \times \{0\}$
 が結び目として平凡に送れるとき, ハンドル h_{λ_i} は unknotted
 であるという。

一般に i 番目のハンドル h_i の core $h_i(D^1 \times \{0\})$ が $M_2(h_1, \dots, h_{s+p-1})$ の内側にあるとき, ハンドル h_i は内側にあるとい
 い, 外側にあるとき h_i は外側にあるという。

次に指数2の臨界点に対応して、指数2のハンドルが、空間 $R^3 \times (1, 2)$ で順次 M_0 に付加される。指数2のハンドルを簡単に ドーム と呼び、 $d_1, d_2, \dots, d_r$ で示す。 M_0 上には、互いに素な r 個の単純閉曲線 $a_1, a_2, \dots, a_r$ が存在して、ドーム $d_1, d_2, \dots, d_r$ が順次 $a_1, a_2, \dots, a_r$ を a -sphere として、 M_0 に付加される。 M_0 に d_1 が付加された後の閉曲面を

$$M_0(d_1) \equiv M_0 - d_1(\partial D^2 \times D^1) \cup d_1(D^2 \times \partial D^1)$$

のように書き、帰納的に $M_0(d_1)(d_2) = M_0(d_1, d_2)$ のように書けば、 $M_0(d_1, d_2, \dots, d_r)$ は $M^3 \cap R^3 \times \{2\}$ と考えることが出来て、これは指数3の臨界点の個数 α 2次元球面である。ドーム d_i が 本質的 とは、 $M_0(d_1, \dots, d_{i-1}, d_i)$ の種数が $M_0(d_1, \dots, d_{i-1})$ より小さいとき、繋ぎ とは、 $M_0(d_1, \dots, d_{i-1}, d_i)$ の連結成分の数が $M_0(d_1, \dots, d_{i-1})$ のそれより大きいときとする。一般に i 番目のドーム d_i の core $d_i(D^2 \times \{0\})$ が $M_0(d_1, \dots, d_{i-1})$ の内側（または外側）にあるとき、ドーム d_i は内側（または外側）にあるという。

この節の最後に次を挙げておく。

1.4. 命題： 本質的ドームの a -spheres と、本質的ハンドルの b -spheres として得られる M_0 上の閉曲線系 $\{a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p\}$ は、 M^3 の Heegaard 分解 $(M^3; M^3 \cap R^3_+, M^3 \cap R^3_-, M_0)$ の Heegaard 図式である。 ◀

§ 2. ホモロジー球面

これより M^3 を 3次元ホモロジー球面に限定する。

命題1.2 とレンズ空間についてよく知られる結果より、次が得られる。

2.1. 命題: $(M^3 \subset \mathbb{R}^4)$ を ホモロジー球面の整列埋込みとする。もし $G(M^3 \subset \mathbb{R}^4) \leq 1$ ならば、 $M^3 \cong S^3$ である。ここで $\cong$ は “同相” を示す。◀

2.2. 補題: $(M^3 \subset \mathbb{R}^4)$ を ホモロジー球面の整列埋込みとし、 $G(M^3 \subset \mathbb{R}^4) = p > 0$ とする。本質的ハンドル $h_{\lambda_1}, \dots, h_{\lambda_p}$ のうち、 q 個が内側 (従って $p-q$ 個が外側) にあれば、本質的ドーム $d_{\mu_1}, \dots, d_{\mu_p}$ のうち q 個が内側 (従って $p-q$ 個が外側) にある。(永瀬 [4] p.147, 系2 参照.) ◀

この補題は実は、次の補題の帰結である。

2.2. 補題: $(M^3 \subset \mathbb{R}^4)$ を ホモロジー球面の整列埋込みとし、 h_i を 本質的ハンドルとする。 $b_i = h_i(\{0\} \times \partial D^2)$ の dual b_i^* を、 $M^3 \cap \mathbb{R}_+^4$ のホモロジーの元として、ホモロジカルに消去 (cancel) するドームは、 h_i と 同じ側にしかとれない。

証明 は、ホモロジー球面の Heegaard 図式の特徴づけ (例えば、寺阪 [10, 定理10] 等を参照。Magnus et al [3] の p.178 前後に歴史的な解説もある) を利用する。実際 M_0 は $S_0^3 = \mathbb{R}^3 \times \{0\} \cup \{\infty\}$ を 2つの領域 V と W に分割するが、Fox [1, (1)] によ

り、これらの領域は S^3 内のある線形グラフ (= 1次元複体) の閉補空間に同相となる。特に、証明をよく見れば、次のような特別なグラフ, p -leafed roses ([7, p. 377, 1.2], $(C \subset S^3)$, $(C' \subset S^3)$) が存在する: C は p 個の円周 $S_1 \cup \dots \cup S_p \subset S^3$ と p -forest Ω から成り, C' も p 個の円周 $S'_1 \cup \dots \cup S'_p \subset S^3$ と p -forest Ω' から成る。 $S^3 - \dot{N}(C; S^3) \stackrel{f}{\cong} V$, $S^3 - \dot{N}(C'; S^3) \stackrel{g}{\cong} W$ 。もし本質的ハンドル h_i が内側ならば, $\partial N(S'_i; S^3)$ の longitude が $\partial W = M_0$ 上の閉曲線 b_i と g で対応し, $\partial N(S_i; S^3)$ の meridian が $\partial V = M_0$ 上の閉曲線 b_i と f で対応する。これらの事実を使って, p の帰納法により証明される。いずれにしても、本稿でこの補題を使う部分については、更に直観的に判り易いので、詳細は省略する。

次の補題が成立する。

2.4. 補題: $(M^3 \subset R^4)$ を ホモロジー球面の整列埋込みとし、特に $G(M^3 \subset R^4) = 2$ とする。(もし必要ならば) 簡単なハンドルの消去を行えば、 $M^3 \cap R^4$ の部分は次の4種の型に分類される ([8] p. 120, Prop. 3.6 等参照.):

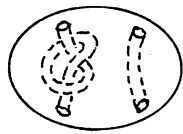
Type 0: 0-ハンドルが1個 (Σ_1 とする), 本質的ハンドルが2個 (h_1, h_2 とする) あって, これらは Σ_1 に囲んで共に内側 (または外側) にある。

Type 1: 0-ハンドルが1個 (Σ_1 とする), 本質的ハンドル

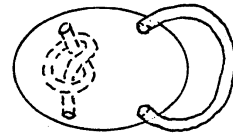
が2個 (h_1, h_2 とする) あって, h_1 が内側, h_2 が外側にあり, h_1 と h_2 は独立 (i.e. $h_1(D^1 \times D^2) \cap h_2(D^1 \times D^2) = \emptyset$) である。

Type 2 : 0-ハンドルが1個 (Σ_1 とする), 本質的ハンドルが2個 (h_1, h_2 とする) があって, h_1 が内側, h_2 が外側にあり, h_2 は h_1 を通る (i.e. $h_1(\{0\} \times D^2) \cap h_2(D^1 \times \{0\}) \neq \emptyset$)。

Type 3 : 0-ハンドルが2個 (Σ_1, Σ_2 とする), 本質的ハンドルが2個 (h_1, h_2 とする), 繋ぎハンドルが1個 (h_3 とする) があって, h_1 と h_2 は独立で, h_3 は h_1 と h_2 の両方を通る。(従って h_1 と h_2 は内側にあり, h_3 は外側にあって, $h_1(\partial D^1 \times D^2) \subset \Sigma_1$, $h_2(\partial D^1 \times D^2) \subset \Sigma_2$ としてよい。)

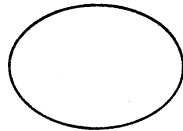
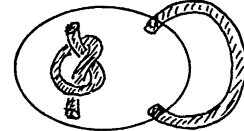


$$-1 \leq t \leq 0$$

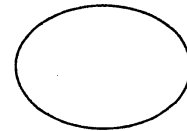


$$-2 \leq t \leq -1$$

内の臨界値 t_1



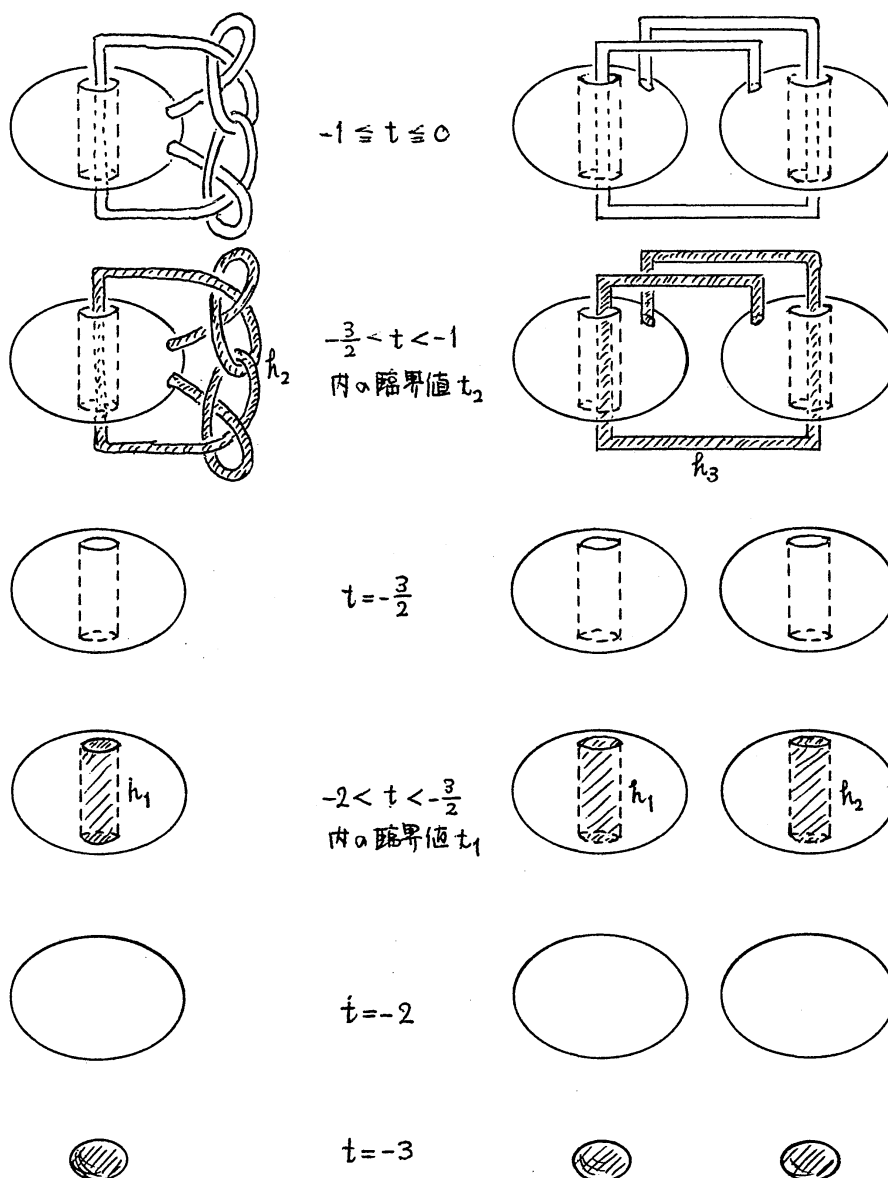
$$t = -2$$



$$t = -3$$

Type 0

Type 1



0-ハンドル $\longleftrightarrow$ 3-ハンドル, ハンドル $\longleftrightarrow$ ドーム と対応
 させて, $M^3 \cap R^4$ を全く対称的にながめると, $M^3 \cap R^4$ も同様の
 4種類の型に分類される。従って, $M^3 \cap R^4$ 全体をながめると,

0-ハンドル $\rightarrow$ ハンドル $\rightarrow$ ドーム $\rightarrow$ 3-ハンドル の出方は 16 通り (ハンドルとドームの側まで考えれば 16×2 通り) あるが、 $R^3 \times \{0\}$ に関する対称性と、補題 2.2 を考慮して整理すれば、次の 6 通りとなる。

	$M^3 \cap R_-^4$	$M^3 \cap R_+^4$
Type (0,0)	Type 0	Type 0
Type (0,3)	Type 0	Type 3
Type (1,1)	Type 1	Type 1
Type (1,2)	Type 1	Type 2
Type (2,2)	Type 2	Type 2
Type (3,3)	Type 3	Type 3

次が本稿の主定理である。

2.5. 主定理: ホモロジー球面 M^3 が、 $G(M^3 \subset R^4) = 2$ を有する整列埋込み ($M^3 \subset R^4$) を持つならば、Type (0,0), Type (1,1) または Type (1,2) の整列埋込み ($M^3 \subset R^4$) が存在する。特に、Type (0,0) の整列埋込みを持つならば、 $M^3 \cong S^3$ である。◀

定理の最後の主張は、永瀬 [4, p.138, 命題 4] と本質的に同じものである。証明は省略する。前半は、場合分けして次節で行う。

§ 3. 主定理の証明

Type (0,3), Type (3,3), Type (2,2) の整列埋込みの各々について、残りの Types の整列埋込みの存在を証明する。

3.1. 定理: ホモロジー球面 M^3 が, Type (0,3) の整列埋込み ($M^3 \subset \mathbb{R}^4$) を持つならば, M^3 は Type (0,0) の整列埋込みを持つ (従って, $M^3 \cong S^3$)。

証明: 定義した用語の関係で, 便宜上 Type (3,0) の場合に証明する。また, $M^3 \subset \mathbb{R}^4 \subset S^4 = \mathbb{R}^4 \cup \{\infty\}$ で考える。

2つの2次元球面 $M_2 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ の内側から, 本質的ハンドル h_1 と h_2 がそれぞれ Σ_1 と Σ_2 に付加されている。そして Σ_1 と Σ_2 を繋ぐハンドル h_3 が外側にあって, $h_1(\{0\} \times D^2)$ と $h_2(\{0\} \times D^2)$ を通る。指数1の臨界値を t_1, t_2 , $-2 < t_1 < -\frac{3}{2} < t_2 < -1$, とする。

M_0 の内側と外側をそれぞれ V, W とおく。仮定と, 補題 2.2 から, 2つの本質的ドーム d_1, d_2 は共に V 側にあってかつ独立だから, $V \cong D^2 \times S^1 \sqcup D^2 \times S^1$ — すなわち h_1 と h_2 は共に unknotted である。そこで M^3 の別の整列埋込み ($\tilde{M}^3 \subset \mathbb{R}^4$) を次のように構成する: $\tilde{M}^3 \cap \mathbb{R}^3 \times (-\infty, t_2) = M^3 \cap \mathbb{R}^3 \times (-\infty, t_2)$ とし, $\mathbb{R}^3 \times \{t_2\}$ でハンドル h_3 の代りに, 新しい繋ぎハンドル $\tilde{h}_3$ を, 外側にあって, h_1 と h_2 を通らないように付加する。この結果新しい閉曲面 $\tilde{M}_0 \subset S_0^3$ を得るが, 構成から同相写像 φ :

$M^3 \cap \mathbb{R}_-^4 \longrightarrow \tilde{M}^3 \cap \mathbb{R}_-^4$ を, 各 $t, -\infty < t \leq 0$, について, $M^3 \cap \mathbb{R}^3 \times \{t\} \longrightarrow \tilde{M}^3 \cap \mathbb{R}^3 \times \{t\}$ なるように作ることは容易である。 $\tilde{M}_0$ の内側・外側をそれぞれ $\tilde{V}, \tilde{W}$ とおけば, h_1 と h_2 が unknotted であることと, h_3 が h_1, h_2 と独立であることから, $\tilde{V} \cong D^2 \times S^1$ は $D^2 \times S^1 \cong \tilde{W}$ となる。よって, 各 t について, 同相写像 φ は M_t の内部から $\tilde{M}_t$ の内部へ α 同相写像に拡張できる。従って特に, $\varphi(a_1)$ と $\varphi(a_2)$ は, $\tilde{V}$ で円板を bound する。すなわち $\varphi(a_1)$ と $\varphi(a_2)$ を α -spheres とする本質的ドーナツ d_1' と d_2' が存在するから, φ を拡張して, $\varphi: M^3 \cap \mathbb{R}_+^4 \longrightarrow \tilde{M}^3 \cap \mathbb{R}_+^4$ なる M^3 の整列埋込み ($\tilde{M}^3 \subset \mathbb{R}^4$) を得る。 h_3 が h_1 と h_2 とは独立だから, ($\tilde{M}^3 \subset \mathbb{R}^4$) を利用して, Type (0,0) の整列埋込みは容易に構成できる。◀

3.2. 定理: ホモロジー球面 M^3 が, Type (3,3) の整列埋込み ($M^3 \subset \mathbb{R}^4$) を持つならば, M^3 は Type (0,0) の整列埋込みを持つ (従って $M^3 \cong S^3$)。

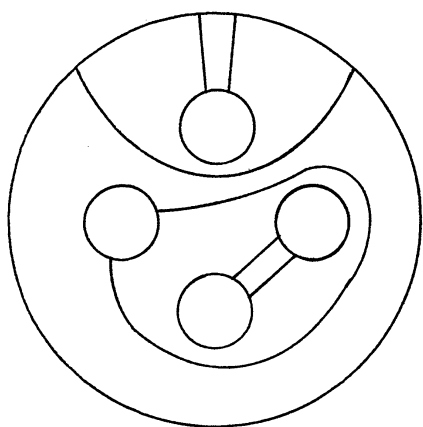
証明: 前と同じように, $M^3 \subset \mathbb{R}^4 \subset S^4 = \mathbb{R}^4 \cup \{\infty\}$ を考える。

2 つの 2 次元球面 $M_2 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ の内側から, 臨界値 t_1 , $-2 < t_1 < -\frac{3}{2}$, で本質的ハンドル h_1 と h_2 がそれぞれ Σ_1 と Σ_2 に付加されている。臨界値 t_2 , $-\frac{3}{2} < t_2 < -1$, で繋ぎハンドル h_3 が外側に出て, $h_1(\{0\} \times D^2)$ と $h_2(\{0\} \times D^2)$ を通る。 M_0 の内側, 外側をそれぞれ V, W とおくと, V は仮定から, ハン

ドル h_1 と h_2 の cores に対応する S^3 における結び目の閉補空間 K_1 と K_2 の境界連結和 $K_1 \# K_2$ と同相である。

さて仮定から, $M^3 \cap \mathbb{R}_+^4$ も Type 3 であるから, 臨界値 t_3 , $1 < t_3 < \frac{3}{2}$, で繋ぎドーム d_1 が, 臨界値 t_4 , $\frac{3}{2} < t_4 < 2$, で本質的ドーム d_2, d_3 が付加されるとしてよい。補題 2.2 から, d_2, d_3 は共に内側にあり, d_1 とは交わるから, d_1 は外側, すなわち W にある。

円板 $A_1 = d_1(D^2 \times \{0\})$ と, いくつかの穴のあいた 2 つの円板 $\tilde{B}_1 = \text{Cl}(h_1(\{0\} \times D^2) - h_3(D^1 \times D^2))$, $\tilde{B}_2 = \text{Cl}(h_2(\{0\} \times D^2) - h_3(D^1 \times D^2))$ の交線を S^3 で考える。 W は irreducible だから, $A_1 \cap (\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2)$ のうち単純閉曲線は A_1 を isotopy で変形して除去できるし, $\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2$ 上で円板 ($\cong D^2$) を切り取る単純弧も同様にして除去できる。従って, $A_1 \cap (\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2)$ は各 $\tilde{B}_i$ 上では下図のような単純弧から成ることがわかる。これらの弧が A_1 上で切り取る



円板のうちの最小のものを利用して, 繋ぎハンドル h_3 に適当に handle-isotopy を施すことにより, $A_1 \cap (\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2)$ の弧の数を少なくできる... すなわち $A_1 \cap (\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2) = \emptyset$ にできる。よって $a_1 = \partial A_1$ と $b_1 \cup b_2$ とも素であ

る。 M_0 上で $a_1 \sim 0$, $a_1 \neq 1$ だから, $a_1 \approx b_3$ である。ここで $\sim$ はホモロジー, $\simeq$ はホモトピー, $\approx$ はイソトピーを示す。従って b_3 は W で可縮だから, M_0 の S^3_0 における ambient isotopy で, h_3 は h_1 と h_2 を通らないように変形できるから, $M^3 \cap \mathbb{R}^4$ が Type 0 の整列埋込みを持つことになり, 定理 3.1 と合せて, 定理 3.2 の証明が完了する。◀

3.3. 定理: ホモロジー球面 M^3 が, Type (2,2) の整列埋込み ($M^3 \subset \mathbb{R}^4$) を持つならば, M^3 は Type (1,1) または Type (1,2) の整列埋込みを持つ。

証明: $M^3 \subset \mathbb{R}^4 \subset S^4 = \mathbb{R}^4 \cup \{\infty\}$ で考察するのが便利である。

2次元球面 $\Sigma_1 = M_2$ の内側から, 臨界値 $t_1, -2 < t_1 < -\frac{3}{2}$, で本質的ハンドル h_1 が付加され, 外側から臨界値 $t_2, -\frac{3}{2} < t_2 < -1$, で本質的ハンドル h_2 が付加されると考えてよい。しかも今 h_2 は h_1 を通る。仮定と補題 2.2 から本質的ドーム d_1, d_2 の2つがある。臨界値 $t_3, 1 < t_3 < \frac{3}{2}$, で d_1 が, 臨界値 $t_4, \frac{3}{2} < t_4 < 2$, で d_2 が付加され, M_0 に因って異なる側にある。 M_0 の内側を V , 外側を W とおくと, 仮定から V はハンドル h_1 の core に対応する S^3 内の結び目の閉補空間と $D^2 \times S^1$ の境界連結和 $K \natural D^2 \times S^1$ と同相である。二つの場合に分けて考察しよう。

場合 I: d_1 が外側, i.e. $A_1 = d_1(D^2 \times \{0\})$ が W にあるとき: 定

理 3.2 の証明と同じように, 円板 $A_1 = d_1(D^2 \times \{0\})$ と, いくつかの穴のあいた円板 $\tilde{B}_1 = \text{Cl}(h_1(\{0\} \times D^2) - h_2(D^1 \times D^2))$ の交線 ε を W で考察する. W は irreducible だから, 単純閉曲線 ε 上 $\tilde{B}_1$ で円板を切り取る単純弧が除去できて, $A_1 \cap \tilde{B}_1$ の交線は, 3.2 の証明中の図と同様になる. $A_1 \cap \tilde{B}_1$ の弧が A_1 上で切り取る円板のうち最小のものを利用して, ハンドル h_2 に適当に handle-isotopy を施すことにより, $A_1 \cap \tilde{B}_1$ の弧の数を少なくできる...すなわち, $A_1 \cap \tilde{B}_1 = \emptyset$ にできる. よって, $a_1 = \partial A_1$ と b_1 は素である. 従って特にこのとき, ハンドル h_2 も h_1 を通らなくなる. というのは, a_1 は必然的に (あるいは補題 2.3 から) b_2 を homological に消去するドーナツの a -sphere で, $b_2 \cap a_1 \neq \emptyset$ からである. よって, ハンドル h_2 を $R^3 \times \{t_2\}$ で動かすことにより, h_1 を通らないようにできる... h_1 と h_2 は独立...ので, $M^3 \cap R^4_+$ は Type 1 の整列埋込みを持つことになる.

場合 II: d_1 が内側, i.e. $A_1 = d_1(D^2 \times \{0\})$ が V にあるとき: K_1 が $D^2 \times S^1$ と同相でないならば, K_2 は ∂ -irreducible であるから [9, Cor. 3.6] または Tsukui [11, p.101, (6.3), (6.4)] により $a_1 = \partial A_1$ は M_0 上で b_2 とイソトープになり, 従って, $a_1 \cap (b_1 \cup b_2) = \emptyset$ とできる. これは当然, homological に b_1 も b_2 も消去できず, M^3 がホモロジースphere であるという仮定に

反する。よって $K \cong D^2 \times S^1$, i.e. ハンドル h_1 は unknotted であることがわかる。特に $V \cong D^2 \times S^1$ である。

A_1 は V の meridian-disk で, $M_0(d_1) = M^3 \cap \mathbb{R}^3 \times \{\frac{3}{2}\} = M_{\frac{3}{2}}$ は種数1の閉曲面で, $S_{\frac{3}{2}}^3$ の内側は V の性質から $D^2 \times S^1$ と同相, 外側も $A_2 = d_2(D^2 \times \{0\})$ が存在するから $D^2 \times S^1$ と同相になる。従って V の meridian-disk C が存在し, $C \cap A_1 = \emptyset$, $\partial C \cap \alpha_2$ は唯一つの交差点から成る。

これらの性質を用いて, M^3 の別の整列埋込み ($\tilde{M}^3 \subset \mathbb{R}^4$) を次のように構成する: $\tilde{M}^3 \cap \mathbb{R}^3 \times (-\infty, t_2) = M^3 \cap \mathbb{R}^3 \times (-\infty, t_2)$ とし, $\mathbb{R}^3 \times \{t_2\}$ で, ハンドル h_2 の代りに, 新しい本質的ハンドル h'_2 を, h_1 を通らず, しかも新しい閉曲面 $\Sigma_1(h_1, h'_2) = \tilde{M}_0$ の外側 $\tilde{W}$ が $D^2 \times S^1$ と $D^2 \times S^1$ と同相になるように, 付加する。この結果 3.1 の証明と同じように, 同相写像 $\varphi: M^3 \cap \mathbb{R}^4 \rightarrow \tilde{M}^3 \cap \mathbb{R}^4$ を各 t , $-\infty < t \leq 0$, について, $M^3 \cap \mathbb{R}^3 \times \{t\} \rightarrow \tilde{M}^3 \cap \mathbb{R}^3 \times \{t\}$ なるように作る事が出来る。 $\tilde{M}_0$ に属する内側 $\tilde{V}$ は $D^2 \times S^1$ と同相だから, φ は各 t について, M_t の内部から $\tilde{M}_t$ の内部への同相写像に拡張される。従って, $\varphi(\alpha_1)$ は $\tilde{V}$ で円板を bound するから, 求める $\tilde{M}^3$ の埋込みを, $\tilde{M}^3 \cap \mathbb{R}^3 \times (-\infty, \frac{3}{2}]$ まで作る事が出来る。 $\tilde{M}_{\frac{3}{2}} = \tilde{M}^3 \cap \mathbb{R}^3 \times \{\frac{3}{2}\}$ は, $\tilde{M}_0$ の作り方から, 種数1の閉曲面で, 特にその $S_{\frac{3}{2}}^3$ の内側, 外側とも $D^2 \times S^1$ と同相である。ところで $\varphi(\alpha_2)$ は一般に $\tilde{M}_{\frac{3}{2}}$ の longitude と交

わっているが、必要ならば h'_2 のひねり、本間[2, p.93]を適当に施す：と1; homology intersection number は 0 に出来る(実際, $\varphi(a_2)$ と $M_{\frac{3}{2}}$ の meridian との homology intersection number が 1 だから)。従って $D^2 \times S^1$ の特性から, $\varphi(a_2)$ は $M_{\frac{3}{2}}$ の外側で円板を bound することになり, φ を使って求める $\tilde{M}^3$ をすべて a と t について完成することが出来る。勿論 $(M^3 \subset \mathbb{R}^4)$ は Type (1,2) ではないので、証明は完了する。◀

〈注〉 定理 3.3 の証明の場合 II で, d_1 と d_2 を独立に出来るとは限らない。しかし, d_2 を変えることにより, a_2 と b_1 の homology intersection number を 0 にすることは、容易に出来る。

参 考 文 献

- [1] Fox, R. H.: On the imbeddings of polyhedra in 3-space, Ann. of Math. (2), 49 (1948), 462-470.
- [2] 本間龍雄: Heegaard 分解と曲面上の曲線系について, 数理解析研講究録 219 (Knotting problem について), 1974, pp. 90-102.
- [3] Magnus, W. - Karrass, A. - Solitar, D.: Combinatorial Group Theory, Interscience Pub., 1966.
- [4] 永瀬輝男: 4次元ユークリッド空間内の特殊なホモ

- ロジ- 3-球面についての一考察, 数理解析研講究録
152. (Combinatorial Topology), 1972, pp. 130-153.
- [5] Nagase, T.: An example of homology 3-sphere, *ibid*, pp.
154-159.
- [6] Rourke, C.P. - Sanderson, B.J.: Introduction to Piecewise-
Linear Topology, Springer, 1972.
- [7] Suzuki, S.: Linear graphs in 3-sphere, *Osaka J. Math.*,
7(1970), 375-396.
- [8] ——— : On a complexity of a surface in 3-sphere, *Osaka
J. Math.*, 11(1974), 113-127.
- [9] ——— : On surfaces in 3-sphere: Prime decompositions,
Hokkaido Math. J., (to appear)
- [10] 寺阪英孝: 閉曲面上の閉曲線群について, 数理解析
研講究録 219 (Knotting problem について), 1974, pp. 70-89.
- [11] Tsukui, Y.: On surfaces in 3-space, *Yokohama Math. J.*,
18(1970), 93-104.