

$(*)_p$ -Condition をみたす

Banach space について

北大 理 高橋泰嗣

§1. 序

$(*)_p$ -Condition をみたす Banach space は無限次元測度論において重要な役割りを果たす。とりわけ Hilbert space において知られている Sazonov の定理, Bochner-Minlos の定理, Dao-Xing による quasi-invariant measure の存在定理, kuo 等による abstract Wiener space に関する定理等はこの種の Banach space に対しては自然な形で拡張され得る (c.f. [7], [8])。

他方この Banach space の class の L_p -space (c.f. [3]) の dual space を含むことより, この種の Banach space の性質を調べることはやはり自身意味のあることのように思える。我々の目的としては

(1) Banach space E が $(*)_p$ -Condition をみたす時

$\forall M \subset E$ closed subspace に対して M は $(*)_p$ -condition をみたすか? E/M は $(*)_p$ -condition をみたすか?

E_n ($n=1, 2, \dots, N$) が $(*)_p$ -condition をみたす時
 $E = \sum_{n=1}^N \oplus E_n$ は $(*)_p$ -condition をみたすか?

(2). (1) の結果の応用として

(i) $(*)_p$ -condition をみたす Banach space の例を豊富に与えること。

(ii) J. Cohen の定理 (c.f. [I]) を一般化すること。

(iii) 無限次元測度論への応用

§2. 定義及び既知の定理

E, F を Banach sp. とする時, $E \rightarrow F$ continuous linear op. 全体を $L(E, F)$ で表す. $E \rightarrow F$ p -absolutely summing op. 全体を $\Pi_p(E, F)$ ($1 \leq p \leq \infty$), strongly g -summing op. 全体を $D_g(E, F)$ で表すことにする ($1 \leq g \leq \infty$).

定義 E を Banach space, $1 \leq p < \infty$ とする。

E : $(*)_p$ -condition をみたす
 $\xLeftrightarrow{\text{def.}} \forall \{x_n^*\} \subset E^* \quad \|x_n^*\| = 1 \quad (n=1, 2, \dots)$

に対して $\bigcap_{T \in L(F, E)} l_p(\|Tx_n^*\|^p) = l_p$ が成立.

(但し $F = \begin{cases} C_0 & \text{if } p=1 \\ l_{p^*} & \text{if } p>1 \end{cases} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$)

注意 定義において $\|x_n^*\| = 1$ ($n=1, 2, \dots$) のところは $\inf_n \|x_n^*\| > 0$ としても同等である。

定理 2.1 (c.f. [6])

E : Banach space, $1 \leq p < \infty$ とする時次は同等

- (i) E は $(*)_p$ -Condition をみたす
- (ii) $\Pi_p(E, F) \subset D_{p^*}(E, F)$ for $\forall F$: Banach sp. ($1/p + 1/p^* = 1$)
- (iii) $\Pi_p(E, l_p) \subset D_{p^*}(E, l_p)$ ($1/p + 1/p^* = 1$)

注意 上記定理の (iii) において l_p は無限次元 l_p -space であきかえてもよい。何故ならば F が無限次元 l_p -space のとき F は l_p と isomorphic な Complemented subspace を含む (c.f. [4]) ことから容易に従う。

系 2.1 E : Banach space とする時

E : $(*)_2$ -Cond. をみたす $\iff E$: inner product sp. と isomorphic

§ 3. $(*)_p$ -Condition をみたす Banach sp. の遺伝性 ($1 \leq p < \infty$)

E が $(*)_p$ -Condition をみたす時 E と isomorphic な Banach sp. はすべて $(*)_p$ -Condition をみたす。もっと一般に

定理 3.1 E, F : Banach spaces. $\varphi: E \rightarrow F$ onto conti. linear op. とする時

E : $(*)_p$ -Cond. をみたす $\implies F$: $(*)_p$ -Cond. をみたす。

系 3.1 E : Banach space, $M \subset E$ closed subspace
 とするとき, $E: (*)_p$ -Cond. である $\Rightarrow E/M: (*)_p$ -Cond. である.

系 3.2 E : Banach space, F : reflexive Banach sp. E^* は
 E^* の subspace と isomorphic である. このとき

$E: (*)_p$ -Cond. である $\Rightarrow F: (*)_p$ -Cond. である

定理 3.2 E_n ($n=1, 2, \dots, N$) Banach spaces
 $E = \sum_{n=1}^N \oplus E_n$ (topological direct sum) であるとき

$E: (*)_p$ -Cond. である $(\Leftrightarrow) \forall n$ ($n=1, 2, \dots, N$) $E_n: (*)_p$ -Cond.
 である.

系 3.3 E, F Banach spaces, $T: E \rightarrow F$ Fredholm op.
 とするとき, $E: (*)_p$ -Cond. である $(\Leftrightarrow) T(E): (*)_p$ -Cond.
 である.

系 3.4 E : Banach sp. $M \subset E$ complemented closed subsp.
 とするとき, $E: (*)_p$ -Cond. である $\Rightarrow M: (*)_p$ -Cond. である

特に $\text{codim. } M < \infty$ のときは

$E: (*)_p$ -Cond. である $(\Leftrightarrow) M: (*)_p$ -Cond. である

注意

Problem A: E は $(*)_p$ -Cond. である Banach sp. $M \subset E$
 closed subsp. とするとき

$\Rightarrow M: (*)_p$ -Cond. であるか?

この問題に代しては M が Complemented なら常に OK.

また $p=2$ の時は $E: (*)_2$ -Cond. をみたす $\Rightarrow E$: inner product sp. と isomorphic (11系 2.1) $\therefore$ 任意の closed subsp. は complemented O.K.

$p=1$ の時は次の如き反例がある。 l_∞ は $(*)_1$ -Cond. をみたすが l_∞ の subsp. l_1 と isomorphic なものが存在する。 l_1 は $(*)_1$ -Cond. をみたさない。 実は l_∞ の closed subsp. l_1 は $(*)_1$ -Cond. をみたさないものは同型を除いても非可算無限個存在する (c.f. 次の §4)。

以上の事から Problem A は $1 < p < 2$, $2 < p < \infty$ の時どうなるかである。これは次の Cohen-問題に関連がある。

Problem B (J. Cohen): $1 < p < 2$, $2 < p < \infty$ とする。

$\forall E, \forall F$ Banach spaces, $\forall M \subset E$ closed subsp. を与えた時,
 $\forall T \in \Pi_p(M, F) \exists \tilde{T} \in \Pi_p(E, F^{**})$ s.t. $\tilde{T}|_M = T$ (i.e. $\tilde{T}$ は T の extension)?

容易にわかることは Problem B の Yes $\Rightarrow$ Problem A の Yes
 定理 2.1 を使えば $F = l_p$ に対し Problem B の Yes
 $\Rightarrow$ problem A の Yes

次に Banach sp. E の subsp. の性質がどの程度 E に影響するかを考える。定理 3.2 も 19 種のものがあろうがここでは別の形で次を得る。

定理 3.3 E : Banach space とする。

$\forall M \subset E$ separable subsp. $\exists M_0 \supset M$ closed subsp. of E
 s.t. M_0 is $(*)_p$ -Cond. $\Leftrightarrow E$ is $(*)_p$ -Cond. $\Leftrightarrow$ E is $(*)_p$ -Cond. $\Leftrightarrow$ E is $(*)_p$ -Cond.

系 3.5 任意の Hilbert sp. H is $(*)_p$ -Cond. $\Leftrightarrow$ $(1 \leq p < \infty)$

☺ $\forall M \subset H$ separable closed subsp. $\Leftrightarrow$ $M \simeq l_2$,
 $\Leftrightarrow$ $\forall p (1 \leq p < \infty)$ l_2 is $L_p(0,1)$ a subsp. & isomorphic
 $\therefore l_2$ is $L_p(0,1)^*$ a quotient sp. & isomorphic
 $L_p(0,1)^*$ is $(*)_p$ -Cond. $\Leftrightarrow$ $\therefore$ 系 3.1 より l_2 is $(*)_p$ -Cond. $\Leftrightarrow$ E is $(*)_p$ -Cond.

系 3.6 E is Banach sp. $\Leftrightarrow$ 次は同等

- (i) E is $(*)_p$ -Cond. $\Leftrightarrow$ for all $1 \leq p < \infty$
- (ii) E is $(*)_2$ -Cond. $\Leftrightarrow$
- (iii) $\forall p (1 \leq p < \infty)$, $\forall M \subset E$ separable subsp. $\exists M_0 \supset M$
 s.t. M_0 is $(*)_p$ -Cond. $\Leftrightarrow$
- (iv) E is inner product sp. & isomorphic

次に dual sp. の $(*)_p$ -Condition $\Leftrightarrow$ 場合を考へてみる。

定義 E is Banach sp. $1 \leq p < \infty$ とする。

E is $D-(*)_p$ -Condition $\Leftrightarrow$

$\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} E^* : (*)_p$ -Cond. $\Leftrightarrow$

定理 3.4 E : Banach sp. $1 \leq p < \infty$ とする.

E : $D-(*)_p$ -Cond. をみたす $\Rightarrow \forall M \subset E$ closed subsp. に對し M は $D-(*)_p$ -Cond. をみたす。

定理 3.5 E_n ($n=1, 2, \dots, N$) Banach spaces,

$E = \sum_{n=1}^N \oplus E_n$ (topological direct sum) とする時

E : $D-(*)_p$ -Cond. をみたす $(\Leftrightarrow) \forall n, E_n$: $D-(*)_p$ -Cond. をみたす

注意 Problem A の dual の問題とせず

Problem C: E : $D-(*)_p$ -Cond. をみたす Banach sp.

$M \subset E$ closed subsp. とするとき

$\Rightarrow E/M$: $D-(*)_p$ -Cond. をみたすか?

この場合も $p=2$ の時 O.K. $p=1$ の時 NO.

§4. $(*)_p$ -Condition をみたす Banach space の例.

みたさない Banach sp. の例.

$1 \leq p < \infty$ とする. Lindenstrauss & Pełczyński の定義によれば

L_p -space は $D-(*)_p$ -Cond. をみたす. L_{p^*} -space は

$(*)_p$ -Cond. をみたす ($1/p + 1/p^* = 1$). 特に任意の $L_{p^*}(\mu)$

space は $(*)_p$ -Cond. をみたす. 更に $C(K)$ (K : Compact

Hausdorff sp.), Kakutani の M -space は $(*)_1$ -Cond.

をみたす. 一般に dual の L_1 型の空間は $(*)_1$ -Cond.

をみたす. また任意の Hilbert space は $(*)_2$ -Cond. を

また $\forall$ for all $1 \leq p < \infty$. 他方 $\mathcal{L}_1$ は $(*)_p$ -Cond. を満たさない. 従って系 3.4 より $\mathcal{L}_1$ -space は $(*)_p$ -Cond. を満たさない for all $1 \leq p < \infty$. もっと一般的に言えば $\mathcal{L}_r$ -space は $(*)_p$ -Cond. を満たさない. ($1 \leq r < 2$, $1 \leq p < r^*$).

例 4.1 X : Banach sp. $1 \leq p \leq 2$ とする.

もし $\varphi(x) = \|x\|^p$ ($x \in X$) が negative definite ならば X は $D-(*)_p$ -Cond. を満たす. i.e. X^* は $(*)_p$ -Cond. を満たす.

① $\varphi(x) = \|x\|^p$ ($x \in X$) が negative def. により $\exists L_p(\mu)$

s.t. X は $L_p(\mu)$ の subsp. と isomorphic $\therefore$ 定理 3.4

より X は $D-(*)_p$ -Cond. を満たす.

例 4.2 X : $\mathcal{L}_r$ -space, $2 \leq r \leq \infty$ とする. この時

$1 \leq p \leq r^*$ には $\exists$ L_r X は $(*)_p$ -Cond. を満たす.

② $r = \infty$ の時は $p = r^* = 1$ であるから明らか.

$2 \leq r < \infty$ とする. X は $\mathcal{L}_r$ -space により $\exists L_r(\mu)$ s.t. X は

$L_r(\mu)$ の complemented subsp. と isomorphic (c.f. [4])

$\therefore$ 系 3.4 より $L_r(\mu)$ が $(*)_p$ -condition を満たすことを示せば

よい. $\therefore \exists$ $1 \leq p \leq r^* \leq 2$ により $\exists L_p(\nu)$ s.t. $L_{r^*}(\mu)$ は $L_p(\nu)$

の subsp. と isomorphic (c.f. [4]) $\therefore$ 定理 3.4 より $L_{r^*}(\mu)$

は $D-(*)_p$ -Cond. を満たす. $\therefore L_r(\mu)$ は $(*)_p$ -Cond. を満たす.

注意 も L Problem A が Yes ならば $X: \mathcal{L}_r\text{-space}$,
 $1 < r \leq 2$ とする時 $r^* \leq p < \infty$ に対して X は $(*)_p\text{-Cond.}$ をみたす。
 何故なら $1 < p^* \leq r \leq 2$ より $\forall L_r(\mu)$ に対して $\exists L_{p^*}(\nu)$ s.t.
 $L_r(\mu)$ は $L_{p^*}(\nu)$ の subspace と isomorphic, $L_{p^*}(\nu)$ は $(*)_p\text{-Cond.}$
 をみたすから $L_r(\mu)$ は $(*)_p\text{-Cond.}$ をみたす。

例 4.3 $K: \text{Compact Hausdorff sp.}$ $\sigma: K \xrightarrow{\text{onto}} K$ homeomorphism
 $\sigma^2 = \text{identity}$ とする。この時 $C_0(K)\text{-space}$ は次の如く定義される。

$$C_0(K) = \{ f \in C(K) : f(\sigma k) = -f(k) \quad \forall k \in K \}$$

このように定義された $C_0(K)\text{-sp.}$ は $(*)_1\text{-Cond.}$ をみたす。

① $C_0(K)\text{-space}$ は $C(K)$ の complemented subspace であるから。

例 4.4 $C_0(K)\text{-space}$, $M\text{-space}$ を含む形で Grothendieck
 が定義した $G\text{-space}$ は $(*)_1\text{-Cond.}$ をみたす。

① $G\text{-space}$ は $M\text{-space}$ から a contractive projection
 の image であるから (c.f. [4])。

例 4.5 Banach sp. X が $P_\lambda\text{-space}$ ($1 \leq \lambda < \infty$) とは
 $\forall Y \supset X \quad \exists p: Y \xrightarrow{\text{onto}} X$ projection s.t. $\|p\| \leq \lambda$ となるこ
 とである。このように定義された $P_\lambda\text{-space}$ は $(*)_1\text{-Cond.}$
 をみたす for all $1 \leq \lambda < \infty$ 。

① $X: P_\lambda\text{-space}$ とする。 $X \subset \overset{\exists}{C(K)}$ であるから X は $C(K)$
 からの proj. の image となる。 $\therefore$ 定理 3.1 より従う。

例 4.6 Banach sp. X が $N_\lambda\text{-space}$ ($1 \leq \lambda < \infty$) とは

$\exists B_\varepsilon \subset X$ finite dim. B_λ -sp. s.t. $X = \overline{\bigcup B_\varepsilon}$ とする。これを "ある。" により定義された N_λ -space は $(*)_1$ -Cond. をみたす。また N_λ -space の second dual X^{**} も $(*)_1$ -Cond. をみたす。

① $X: N_\lambda\text{-space} \Rightarrow X^{**}: B_\lambda\text{-space} \Rightarrow X: L_{\infty, 1, \lambda}\text{-space}$

例 4.7

$$H_p = \left\{ f(z): f(z) \text{ は } |z| < 1 \text{ で analytic, } \|f\| = \sup_{0 < r < 1} \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

とすれば H_p は $D-(*)_p$ -Cond. をみたす。 H_{p^*} は $(*)_p$ -Cond. をみたす ($1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$)。

① H_p は $L_p(0, 1)$ に isomorphic あり。

次に $(*)_p$ -Cond. をみたさな空間の例を与える。典型的な例として l_1 は $(*)_p$ -Cond. をみたさな for all $1 \leq p < \infty$ 。

系 3.4 により Banach sp. X が l_1 と isomorphic な Complemented subsp. を含むならば X は $(*)_p$ -Cond. をみたさな $1 \leq p < \infty$ 。

例 4.8 $X: \text{Banach sp. } X^* \supset \exists Z \simeq c_0$ とする。この時 X は $(*)_p$ -Cond. をみたさな $1 \leq p < \infty$ 。

① この場合 $\exists M \subset X$ Complemented subsp. s.t. $M \simeq l_1$ 。

例 4.9 $X: L_r\text{-space}, 1 \leq r < 2$ とする。この時 $1 \leq p < r^*$ に対して X は $(*)_p$ -Cond. をみたさな。

① $X: L_r\text{-space}$ あり X は l_r と isomorphic な Complemented subsp. を含む。系 3.4 により l_r が $(*)_p$ -Cond. をみたさな $1 \leq p < r^*$ を示せばよいのであるが 証明は quasi-inv. measure method

を使ってなされる。詳述はしない。

§5. J. Cohen の定理の一般化

ここでは今までの結果の応用として J. Cohen の結果 (c.f. [1]) を一般化する。

定理 5.1 $1 < p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ とする。

(i) E : L_p -space, or γ quotient space, or direct sum とする

時 $\Rightarrow \Pi_{p^*}(E, F) \subset D_p(E, F)$ for all Banach sp. F

(ii) F : L_{p^*} -space, or γ subspace, or direct sum とする時

$\Rightarrow D_p(E, F) \subset \Pi_{p^*}(E, F)$ for all Banach sp. E

更に $2 \leq p \leq \infty$ の時は (i), (ii) と同じ条件のもとで

(i)' $\Pi_{p^*}(E, F) \subset D_p(E, F)$ for $p \leq q \leq \infty$, $\forall F$: Banach sp.

(ii)' $D_p(E, F) \subset \Pi_{p^*}(E, F)$ for $p \leq q \leq \infty$, $\forall E$: Banach sp.

⊙ (i), (ii) については J. Cohen の結果 (c.f. [1]) に加えて
定理 2.1, 系 3.1, 定理 3.2, 定理 3.4, 定理 3.5 より従う。

(i)', (ii)' については上記の定理に加えて例 4.2 より従う。

定理 5.2 次の如き Banach space E, F が存在する。

$$\Pi_p(E, F) \not\subset D_{p^*}(E, F) \quad (1 \leq p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1)$$

もっと具体的に言えば

(i) $1 \leq p \leq 2$ の時 $2 < r \leq \infty$ に対して

$$\Pi_p(l_{r^*}, l_2) \not\subset D_{p^*}(l_{r^*}, l_2), \quad D_{p^*}(l_2, l_r) \not\subset \Pi_p(l_2, l_r)$$

(ii) $2 \leq p < \infty$ の時 $p <^{\forall} r \leq \infty$ に對して

$$\Pi_p(l_{r^*}, l_p) \not\subset D_{p^*}(l_{r^*}, l_p), \quad D_{p^*}(l_{p^*}, l_r) \not\subset \Pi_p(l_{p^*}, l_r)$$

いずれの場合も $\frac{1}{r} + \frac{1}{r^*} = 1$ とする。

注意 上記 (i), (ii) は $r > 2$ とする時 l_{r^*} は $(*)_p$ -cond. をみたさないことを示す ($1 \leq^{\forall} p < r$)。従つて $\mathcal{L}_{r^*}$ -space は $(*)_p$ -cond. をみたさない ($1 \leq^{\forall} p < r$)。J. Cohen の結果 (c.f. [1]) は $r = \infty$, $r^* = 1$ の時である。

§6. 無限次元測度論への応用

冒頭に述べた如く $(*)_p$ -cond. をみたす Banach space は無限次元測度論において重要な役割りを果たす。ここではその一つとして Gaussian measure に對する Sazonov の定理の一般化を紹介しよう (c.f. [7])

$E = \bigcap E_n$ を可分な可算ノルム空間, $\|\cdot\|_H$ を E 上の連続な Hilbertian norm とする。 $\varphi(x) = \exp(-\frac{1}{2}\|x\|_H^2)$ ($x \in E$) は E 上の positive definite conti. fn とするがこの時 E^* 上の Cylinder measure μ_H が一意的に存在して

$$\varphi(x) = \int_{E^*} e^{i\langle x^*, x \rangle} d\mu_H(x^*) \quad \text{for } \forall x \in E$$

となる。この μ_H を $\varphi(x)$ に對応する Gaussian measure と呼ぶことにする。一般に μ_H は有限加法的測度であつて完全加法

的ではない。

定理 6.1 $1 \leq p \leq 2$ で各 n について E_n は $(*)_p$ -Cond. をみたすとき、 γ の時次は同等である。

(i) $\varphi(x)$: Hilbert-Schmidt topology で連続である。

(ii) μ_H : 完全加法的

注意 E が Hilbert sp. の時この結果は Sazonov によって得られた。 E がある種の locally convex sp. の場合に Badrikian は Sazonov の定理を一般化した。証明の方法は Hilbert 空間の場合とほとんど同様になる。我々は $(*)_p$ -Cond. を使って Badrikian の結果も一般化できるが詳述しない。

参 考 文 献

- [1] J. Cohen: Absolutely p -summing, p -nuclear operators and their conjugates, Math. Ann. 201 (1973) 177-200
- [2] S. Kwapien: A linear topological characterization of inner product spaces, Studia Math. 38 (1970) 277-278
- [3] J. Lindenstrauss and Pełczyński: Absolutely summing operators between L_p -spaces, Studia Math. 29 (1968) 275-326
- [4] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri: Classical Banach spaces, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York (1973)

- [5] A. Pietsch : Absolut p -summierende Abbildungen in normierten Räumen, *Studia Math.* 28 (1967) 333-353
- [6] Y. Takahashi : Some remarks on p -absolutely summing operators, *Hokkaido Math. Jour.* Vol. 5, No2 (1976) 308-315
- [7] Y. Takahashi : Bochner-Minlos' theorem on infinite dimensional spaces, *Hokkaido Math. Jour.* Vol. 6, No1 (1977) 102-129
- [8] Y. Takahashi : On measurable norms and abstract Wiener spaces, *Hokkaido Math. Jour.* Vol. 6, No2 (to appear)