

非線形時変回路に対する混合方程式の組合せ論的解析 — グラフ構造による順良指数の特徴付け —

京都大学・数理解析研究所 岩田 寛 (Satoru Iwata)
Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University

東京大学・情報理工学系研究科 高松 瑞代 (Mizuyo Takamatsu)
Graduate School of Information Science and Technology,
University of Tokyo

ケルン大学 Caren Tischendorf
Faculty of Mathematics and Natural Sciences,
University of Cologne

1 はじめに

回路シミュレーションでは、回路解析法を用いて式を導出するのが一般的である。よく知られた回路解析法として、**修正節点解析 (Modified Nodal Analysis; MNA)**、タブロー解析、閉路解析、カットセット解析、**混合解析**などが挙げられる。MNA は与えられた回路に対して式を自動的に導出するので、ユーザーにとって扱いやすいという長所を持ち、電子回路シミュレータ SPICE [29] をはじめとして、もっとも広範に利用されている。

混合解析は、1939 年に Kron [21] が提案し、1960 年代に甘利 [1] と Branin [3] が発展・拡張させた古典的な解析法である。混合解析は MNA より自由度が高く、同じ回路に対して複数の記述法が存在する。回路シミュレーションでは、式を簡単に導出することが重視されていたため、混合解析は最近ではあまり利用されていなかった。本稿では混合解析の自由度に着目し、数値計算の観点からみて混合解析が修正節点解析より優れていることを示す。

回路解析法から導出される式は**微分代数方程式 (Differential-Algebraic Equations; DAE)**になる。DAE は微分演算子を含む方程式系であり、回路以外にも、機械力学系、化学プラントなどの動的システムを記述する際に現れる。DAE の難しさを表す指標として指数が定義されており、指数が大きくなるほど数値計算は困難になる。特に、指数 2 以上の DAE は指数 1 以下の DAE よりも本質的に難しいことが知られている。代表的な指数には、**微分指数** [4, 6]、**摂動指数** [13]、**順良指数** [9, 24] などがある。線形時不変 DAE の場合、これらの指数はすべて係数行列束の Kronecker 標準形から定まる**冪零指数**に一致する [4, 5, 13, 23]。本稿では、電気回路を記述する非線形時変 DAE を順良指数を用いて解析する。

モデル化の手段としての DAE の重要性が認識されるに伴い、DAE を解く数値計算ソフトウェアも整備されてきた。1971 年に、Gear [11] は後退差分法 (BDF) を用いた DAE の計算法を提案した。この手法は、Petzold によるプログラム DASSL に利用されている [4]。また、Hairer & Wanner [13] は、陰的 Runge-Kutta 法に基づく計算法を RADAU5 に実装した。これらのソフトウェアには指数の低い DAE にしか適用できないという欠点がある。最近では、より指数の高い DAE に適用可能なソフトウェアも開発されている [22]。

現在主流の MNA から導出される DAE に対しては、多くの研究がなされている。2000 年には、独立電源、抵抗、インダクタ、キャパシタを含む非線形時変回路に対し、MNA から導出される DAE の

指数が常に 2 以下となることが示され、指数が 1 となる回路の構造的特徴づけが与えられた [9]. このように MNA から導出される DAE の指数は回路の構造によって決まるため、指数を減少させる工夫の余地はない。

そこで、MNA より自由度の高い解析法である混合解析に着目する。混合解析では、まず素子の分割と基準木を選ぶ。次に、分割と基準木に従って、数値的に解くべき方程式である混合方程式を導出する。そこで、混合方程式が“最も簡単”になるような分割と基準木の選び方が問題になる。1968 年には、自由変数の個数が最小となる混合方程式 (最小基本方程式) を求めるアルゴリズムが提案された [16, 20, 28]. この問題はマトロイド対の共通独立集合問題を用いて簡潔に記述することができる [17].

本稿では、自由変数の個数の代わりに指数に焦点を当て、非線形時変回路の混合方程式の指数を回路の構造によって特徴づける。さらに、この構造的特徴づけを利用して、非線形時変 RLC 回路の混合方程式の指数が常に 1 以下であり、混合方程式の最小指数が MNA の指数を超えないことを示す。

本稿の構成は以下の通りである。第 2 節では、指数の構造的特徴づけの証明で利用する線形代数の補題を与える。第 3 節では、本稿が対象とする非線形時変回路を説明し、混合解析の手順を述べる。第 4 節では、回路を記述する特殊な非線形時変 DAE と順良指数の定義を述べる。第 5 節では、混合方程式の指数に対する回路の構造的特徴づけを与える。

2 準備

行列 A に対し、行集合 W_R , 列集合 W_C の小行列を $A[W_R, W_C]$ で表す。特に正方行列 A に対し、行集合と列集合が W である主小行列を $A[W]$ で表す。行列 A の転置を A^T と表す。正方行列 A が $A = -A^T$ を満たすとき歪対称であるという。歪対称行列は以下の二つの性質を持つ。

補題 2.1 ([19, Lemma 2.2]). A を歪対称行列, D を成分がすべて非負である対角行列とする。行列 D において、零である対角成分に対応する行集合・列集合を S とおく。このとき、 $A + D$ が正則である必要十分条件は、 $A[S]$ を含む A の正則な主小行列が存在することである。□

補題 2.2 ([19, Lemma 2.3]). A を行集合・列集合が X である歪対称行列とする。 X の部分集合 S に対し、 $A[S]$ を含む正則な主小行列が存在する必要十分条件は、 $A[S, X]$ が行フルランクであることである。□

次の補題は、線形代数においてよく知られた事実である。

補題 2.3 (Schur complement). A を正則な行列とする。正方行列 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ が正則であることは、 $D - CA^{-1}B$ が正則であることと等価である。□

3 混合解析

本稿では、独立電源、キャパシタ、インダクタ、抵抗、従属電源を含む非線形時変回路を対象とする。ここで、独立電圧源、独立電流源、キャパシタ、インダクタ、抵抗、従属電圧源、従属電流源の集合を V, J, C, L, R, S_U, S_I とおく。電流ベクトルを $\mathbf{i}$, 電圧ベクトルを $\mathbf{u}$ とする。各素子の集合 V ,

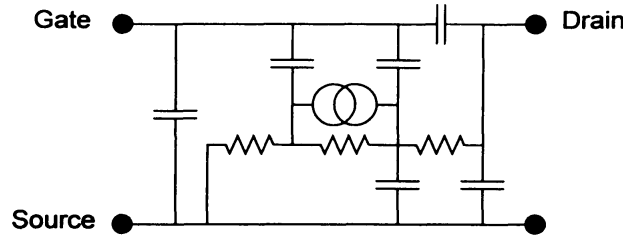


図 1: MOSFET モデル.

J, C, L, R, S_U, S_I の電流ベクトル, 電圧ベクトルをそれぞれ $i_V, i_J, i_C, i_L, i_R, i_U, i_I$, および $u_V, u_J, u_C, u_L, u_R, u_U, u_I$ で表す. このとき, 素子特性の式は以下ようになる:

$$\text{独立電圧源: } u_V = v_s(t), \quad \text{独立電流源: } i_J = j_s(t), \quad (1)$$

$$\text{キャパシタ: } i_C = \frac{d}{dt} q(u_C, t), \quad \text{インダクタ: } u_L = \frac{d}{dt} \phi(i_L, t), \quad (2)$$

$$\text{抵抗: } i_R = \sigma(u_R, t), \quad (3)$$

$$\text{従属電流源: } i_I = j_I(u_C, u_L, u_V, i_C, i_L, i_J, t), \quad (4)$$

$$\text{従属電圧源: } u_U = v_U(u_C, u_L, u_V, i_C, i_L, i_J, t). \quad (5)$$

図 1 の MOSFET モデル [10] は従属電流源を用いて記述されている. このように, 現実に現れる回路はしばしば従属電源を用いた等価回路で表現できる. 従属電源を含まない回路を**非線形時変 RLC 回路**と呼ぶ.

行列 A の (i, j) 成分を $(A)_{ij}$ で表す. また, ベクトル値関数 f の第 i 成分を $(f)_i$ で表す. このとき, キャパシタンス行列 C , インダクタンス行列 L , コンダクタンス行列 K は

$$(C)_{ij} = \frac{\partial(q)_i}{\partial(u_C)_j}, \quad (L)_{ij} = \frac{\partial(\phi)_i}{\partial(i_L)_j}, \quad (K)_{ij} = \frac{\partial(\sigma)_i}{\partial(u_R)_j}$$

で与えられる. 本稿では以下を仮定する.

仮定 3.1. キャパシタンス行列 C とインダクタンス行列 L は正定値行列である.

仮定 3.2. コンダクタンス行列 K は正定値対称行列である.

仮定 3.1 はキャパシタとインダクタが強受動素子であること, 仮定 3.2 は抵抗が強受動素子でありかつ相反性をもつことを意味している [7].

回路の結線構造を表すグラフを $\Gamma = (W, E)$ とする. このとき, Γ の枝は素子に対応する. 独立電圧源, 独立電流源の枝集合をそれぞれ E_v, E_j とし, $E_* := E \setminus (E_v \cup E_j)$ を $E_y \cup E_z = E_*$, $E_y \cap E_z = \emptyset$ となるように E_y と E_z に分割する. ただし, キャパシタと従属電流源は E_y に, インダクタと従属電圧源は E_z に含まれるものとする. E_y, E_z に含まれる抵抗をそれぞれ Y, Z とおき, それぞれの電流ベクトルと電圧ベクトルを i_Y, u_Y および i_Z, u_Z で表す. このとき, 抵抗は

$$i_Y = g(i_Z, u_Y, t), \quad u_Z = h(i_Z, u_Y, t) \quad (6)$$

で与えられるとする. 行列 Z, H, G, Y を

$$(Z)_{ij} = \frac{\partial(\mathbf{h})_i}{\partial(\mathbf{i}_Z)_j}, \quad (H)_{ij} = \frac{\partial(\mathbf{h})_i}{\partial(\mathbf{u}_Y)_j}, \quad (G)_{ij} = \frac{\partial(\mathbf{g})_i}{\partial(\mathbf{i}_Z)_j}, \quad (Y)_{ij} = \frac{\partial(\mathbf{g})_i}{\partial(\mathbf{u}_Y)_j}$$

で定義すると, 仮定 3.2 より混合イミタンス行列 $\begin{pmatrix} Z & H \\ G & Y \end{pmatrix}$ が以下を満たすことが導かれる:

(i) 混合イミタンス行列 $\begin{pmatrix} Z & H \\ G & Y \end{pmatrix}$ は正定値行列である.

(ii) 行列 Z および Y は対称行列である.

(iii) $H = -G^\top$ が成り立つ.

Γ の全域木のうち, V, C, S_I, Y, Z, S_U, L の順に枝を優先的に含む木 T を, Γ の分割 (E_y, E_z) に関する**優先基準木**と呼ぶ. T の補木を $\bar{T} = E \setminus T$ と表す. 分割 (E_y, E_z) と優先基準木 T に対し, $\mathbf{i}$ と $\mathbf{u}$ を次のように分ける:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= (\mathbf{i}_V, \mathbf{i}_C^\tau, \mathbf{i}_I^\tau, \mathbf{i}_Y^\tau, \mathbf{i}_Z^\tau, \mathbf{i}_U^\tau, \mathbf{i}_L^\tau, \mathbf{i}_C^\lambda, \mathbf{i}_I^\lambda, \mathbf{i}_Y^\lambda, \mathbf{i}_Z^\lambda, \mathbf{i}_U^\lambda, \mathbf{i}_L^\lambda, \mathbf{i}_J)^\top, \\ \mathbf{u} &= (\mathbf{u}_V, \mathbf{u}_C^\tau, \mathbf{u}_I^\tau, \mathbf{u}_Y^\tau, \mathbf{u}_Z^\tau, \mathbf{u}_U^\tau, \mathbf{u}_L^\tau, \mathbf{u}_C^\lambda, \mathbf{u}_I^\lambda, \mathbf{u}_Y^\lambda, \mathbf{u}_Z^\lambda, \mathbf{u}_U^\lambda, \mathbf{u}_L^\lambda, \mathbf{u}_J)^\top. \end{aligned}$$

ここで, 下付き文字は素子に対応し, 上付き文字 τ と λ はそれぞれ優先基準木 T と補木 $\bar{T}$ を表す. 優先基準木 T に対し, ベクトル値関数 $\mathbf{g}$ を $\mathbf{g}^\tau$ と $\mathbf{g}^\lambda$ に分ける. ベクトル値関数 $\mathbf{h}, \mathbf{q}, \phi$ に対しても同様に定義する. また, 行列 Y を $\begin{pmatrix} Y_\tau^\tau & Y_\lambda^\tau \\ Y_\tau^\lambda & Y_\lambda^\lambda \end{pmatrix}$ のように分ける. ただし,

$$(Y_\tau^\tau)_{ij} = \frac{\partial(\mathbf{g}^\tau)_i}{\partial(\mathbf{u}_Y^\tau)_j}, \quad (Y_\lambda^\tau)_{ij} = \frac{\partial(\mathbf{g}^\tau)_i}{\partial(\mathbf{u}_Y^\lambda)_j}, \quad (Y_\tau^\lambda)_{ij} = \frac{\partial(\mathbf{g}^\lambda)_i}{\partial(\mathbf{u}_Y^\tau)_j}, \quad (Y_\lambda^\lambda)_{ij} = \frac{\partial(\mathbf{g}^\lambda)_i}{\partial(\mathbf{u}_Y^\lambda)_j}$$

とする. 同様にして, 行列 C, L, Z, H, G は

$$\begin{pmatrix} C_\tau^\tau & C_\lambda^\tau \\ C_\tau^\lambda & C_\lambda^\lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} L_\tau^\tau & L_\lambda^\tau \\ L_\tau^\lambda & L_\lambda^\lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Z_\tau^\tau & Z_\lambda^\tau \\ Z_\tau^\lambda & Z_\lambda^\lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} H_\tau^\tau & H_\lambda^\tau \\ H_\tau^\lambda & H_\lambda^\lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} G_\tau^\tau & G_\lambda^\tau \\ G_\tau^\lambda & G_\lambda^\lambda \end{pmatrix}$$

の形で書くことができる.

優先基準木の定義から, 基本カットセット行列 F は

$$F = \begin{pmatrix} \mathbf{i}_V & \mathbf{i}_C^\tau & \mathbf{i}_I^\tau & \mathbf{i}_Y^\tau & \mathbf{i}_Z^\tau & \mathbf{i}_U^\tau & \mathbf{i}_L^\tau & \mathbf{i}_C^\lambda & \mathbf{i}_I^\lambda & \mathbf{i}_Y^\lambda & \mathbf{i}_Z^\lambda & \mathbf{i}_U^\lambda & \mathbf{i}_L^\lambda & \mathbf{i}_J \\ I & O & O & O & O & O & O & A_{VC} & A_{VI} & A_{VY} & A_{VZ} & A_{VU} & A_{VL} & A_{VJ} \\ O & I & O & O & O & O & O & A_{CC} & A_{CI} & A_{CY} & A_{CZ} & A_{CU} & A_{CL} & A_{CJ} \\ O & O & I & O & O & O & O & O & A_{II} & A_{IY} & A_{IZ} & A_{IU} & A_{IL} & A_{IJ} \\ O & O & O & I & O & O & O & O & O & A_{YY} & A_{YZ} & A_{YU} & A_{YL} & A_{YJ} \\ O & O & O & O & I & O & O & O & O & O & A_{ZZ} & A_{ZU} & A_{ZL} & A_{ZJ} \\ O & O & O & O & O & I & O & O & O & O & O & A_{UU} & A_{UL} & A_{UJ} \\ O & O & O & O & O & O & I & O & O & O & O & O & A_{LL} & A_{LJ} \end{pmatrix}$$

となる。このとき、混合方程式は次のようになる：

$$\begin{aligned}
& -A_{VL}^\top \mathbf{v}_s(t) - A_{CL}^\top \mathbf{u}_C^\tau - A_{IL}^\top \mathbf{u}_I^\tau - A_{YL}^\top \mathbf{u}_Y^\tau - A_{ZL}^\top \mathbf{h}^\tau - A_{UL}^\top \mathbf{v}_U^\tau(\cdot) - A_{LL}^\top \frac{d}{dt} \phi^\tau + \frac{d}{dt} \phi^\lambda = \mathbf{0}, \\
& -A_{VU}^\top \mathbf{v}_s(t) - A_{CU}^\top \mathbf{u}_C^\tau - A_{IU}^\top \mathbf{u}_I^\tau - A_{YU}^\top \mathbf{u}_Y^\tau - A_{ZU}^\top \mathbf{h}^\tau - A_{UU}^\top \mathbf{v}_U^\tau(\cdot) + \mathbf{v}_U^\lambda(\cdot) = \mathbf{0}, \\
& -A_{VZ}^\top \mathbf{v}_s(t) - A_{CZ}^\top \mathbf{u}_C^\tau - A_{IZ}^\top \mathbf{u}_I^\tau - A_{YZ}^\top \mathbf{u}_Y^\tau - A_{ZZ}^\top \mathbf{h}^\tau + \mathbf{h}^\lambda = \mathbf{0}, \\
& \mathbf{g}^\tau + A_{YY} \mathbf{g}^\lambda + A_{YZ} \mathbf{i}_Z^\lambda + A_{YU} \mathbf{i}_U^\lambda + A_{YL} \mathbf{i}_L^\lambda + A_{YJ} \mathbf{j}_s(t) = \mathbf{0}, \\
& \mathbf{j}_I^\tau(\cdot) + A_{II} \mathbf{j}_I^\lambda(\cdot) + A_{IY} \mathbf{g}^\lambda + A_{IZ} \mathbf{i}_Z^\lambda + A_{IU} \mathbf{i}_U^\lambda + A_{IL} \mathbf{i}_L^\lambda + A_{IJ} \mathbf{j}_s(t) = \mathbf{0}, \\
& \frac{d}{dt} \mathbf{q}^\tau + A_{CC} \frac{d}{dt} \mathbf{q}^\lambda + A_{CI} \mathbf{j}_I^\lambda(\cdot) + A_{CY} \mathbf{g}^\lambda + A_{CZ} \mathbf{i}_Z^\lambda + A_{CU} \mathbf{i}_U^\lambda + A_{CL} \mathbf{i}_L^\lambda + A_{CJ} \mathbf{j}_s(t) = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}^\tau &= \mathbf{q}^\tau(\mathbf{u}_C^\tau, A_{VC}^\top \mathbf{v}_s(t) + A_{CC}^\top \mathbf{u}_C^\tau, t), \\
\mathbf{q}^\lambda &= \mathbf{q}^\lambda(\mathbf{u}_C^\tau, A_{VC}^\top \mathbf{v}_s(t) + A_{CC}^\top \mathbf{u}_C^\tau, t), \\
\mathbf{g}^\tau &= \mathbf{g}^\tau(-A_{ZZ} \mathbf{i}_Z^\lambda - A_{ZU} \mathbf{i}_U^\lambda - A_{ZL} \mathbf{i}_L^\lambda - A_{ZJ} \mathbf{j}_s(t), \mathbf{i}_Z^\lambda, \mathbf{u}_Y^\tau, A_{VY}^\top \mathbf{v}_s(t) + A_{CY}^\top \mathbf{u}_C^\tau + A_{IY}^\top \mathbf{u}_I^\tau + A_{YY}^\top \mathbf{u}_Y^\tau, t), \\
\mathbf{g}^\lambda &= \mathbf{g}^\lambda(-A_{ZZ} \mathbf{i}_Z^\lambda - A_{ZU} \mathbf{i}_U^\lambda - A_{ZL} \mathbf{i}_L^\lambda - A_{ZJ} \mathbf{j}_s(t), \mathbf{i}_Z^\lambda, \mathbf{u}_Y^\tau, A_{VY}^\top \mathbf{v}_s(t) + A_{CY}^\top \mathbf{u}_C^\tau + A_{IY}^\top \mathbf{u}_I^\tau + A_{YY}^\top \mathbf{u}_Y^\tau, t), \\
\mathbf{h}^\tau &= \mathbf{h}^\tau(-A_{ZZ} \mathbf{i}_Z^\lambda - A_{ZU} \mathbf{i}_U^\lambda - A_{ZL} \mathbf{i}_L^\lambda - A_{ZJ} \mathbf{j}_s(t), \mathbf{i}_Z^\lambda, \mathbf{u}_Y^\tau, A_{VY}^\top \mathbf{v}_s(t) + A_{CY}^\top \mathbf{u}_C^\tau + A_{IY}^\top \mathbf{u}_I^\tau + A_{YY}^\top \mathbf{u}_Y^\tau, t), \\
\mathbf{h}^\lambda &= \mathbf{h}^\lambda(-A_{ZZ} \mathbf{i}_Z^\lambda - A_{ZU} \mathbf{i}_U^\lambda - A_{ZL} \mathbf{i}_L^\lambda - A_{ZJ} \mathbf{j}_s(t), \mathbf{i}_Z^\lambda, \mathbf{u}_Y^\tau, A_{VY}^\top \mathbf{v}_s(t) + A_{CY}^\top \mathbf{u}_C^\tau + A_{IY}^\top \mathbf{u}_I^\tau + A_{YY}^\top \mathbf{u}_Y^\tau, t), \\
\phi^\tau &= \phi^\tau(-A_{LL} \mathbf{i}_L^\lambda - A_{LJ} \mathbf{j}_s(t), \mathbf{i}_L^\lambda, t), \\
\phi^\lambda &= \phi^\lambda(-A_{LL} \mathbf{i}_L^\lambda - A_{LJ} \mathbf{j}_s(t), \mathbf{i}_L^\lambda, t)
\end{aligned}$$

とおいた。混合解析の手順は以下のようになる。

1. $\mathbf{u}_V$ と $\mathbf{i}_J$ は式 (1) より既知である。
2. 混合方程式を解き、 $\mathbf{i}_Z^\lambda$, $\mathbf{i}_U^\lambda$, $\mathbf{i}_L^\lambda$, $\mathbf{u}_C^\tau$, $\mathbf{u}_I^\tau$, $\mathbf{u}_Y^\tau$ を計算する。
3. キルヒホッフの電流則・電圧則を用いて $\mathbf{i}_Z^\tau$, $\mathbf{i}_U^\tau$, $\mathbf{i}_L^\tau$, $\mathbf{u}_C^\lambda$, $\mathbf{u}_I^\lambda$, $\mathbf{u}_Y^\lambda$ を求める。
4. 式 (2) と式 (6) から $\mathbf{u}_Z^\tau$, $\mathbf{u}_Z^\lambda$, $\mathbf{u}_L^\tau$, $\mathbf{u}_L^\lambda$, $\mathbf{i}_C^\tau$, $\mathbf{i}_C^\lambda$, $\mathbf{i}_Y^\tau$, $\mathbf{i}_Y^\lambda$ を求める。
5. 式 (4) と式 (5) から $\mathbf{u}_U^\tau$, $\mathbf{u}_U^\lambda$, $\mathbf{i}_I^\tau$, $\mathbf{i}_I^\lambda$ を求める。
6. キルヒホッフの電流則・電圧則を用いて $\mathbf{i}_V$ と $\mathbf{u}_J$ を求める。

ステップ 3 以降はすべて代入操作なので、解くべき DAE は混合方程式のみになる。

4 回路を記述する DAE

本節では、回路を記述する特殊な形の DAE を紹介し、順良指数の定義を述べる。

行列 $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$ が $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)^2 = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$ を満たすとき、 $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$ を射影子という。さらに、部分空間 Π に対して $\text{im } \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) = \Pi$ が成り立つとき、 $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$ を Π の上への射影子という。いま、以下の DAE を考える：

$$A(\mathbf{x}(t), t) \frac{d}{dt} \mathbf{d}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}(t), t) = \mathbf{0}. \quad (7)$$

ただし, 行列 $A(\mathbf{x}, t)$ は $m \times n$ 行列であり, 行列 $D(\mathbf{x}, t)$, $B(\mathbf{x}, t)$, $M(\mathbf{x}, t)$ を

$$D(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{d}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}, \quad B(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}, \quad M(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x}, t)D(\mathbf{x}, t)$$

とおいたとき, DAE (7) は次の 2 つの条件を満たす.

(条件 1) 任意の $\mathbf{x}$ と t に対して $\ker A(\mathbf{x}, t) \oplus \operatorname{im} D(\mathbf{x}, t) = \mathbb{R}^n$ が成り立つ.

(条件 2) $\ker P(t) = \ker A(\mathbf{x}, t)$, $\operatorname{im} P(t) = \operatorname{im} D(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t) = P(t)\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$ を満たす t で連続微分可能な射影子 $P(t)$ が存在する.

このような DAE (7) の特殊形 (**DAE with properly stated leading term**) は, Balla & März [2] によって最初に提案された. 回路解析法を適用して得られる DAE が多くの場合この形になるため, DAE (7) に対する解析が近年盛んに行われている [14, 15, 26, 27, 30].

DAE (7) の条件 1 は, 以下のように書き換えられる.

補題 4.1 ([15, Lemma A.1]). 大きさ $m \times n$ の行列 $A(\mathbf{x}, t)$ と大きさ $n \times m$ の行列 $D(\mathbf{x}, t)$ に対し, $M(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x}, t)D(\mathbf{x}, t)$ とする. このとき, $\ker A(\mathbf{x}, t) \oplus \operatorname{im} D(\mathbf{x}, t) = \mathbb{R}^n$ は

$$\operatorname{im} M(\mathbf{x}, t) = \operatorname{im} A(\mathbf{x}, t), \quad \ker M(\mathbf{x}, t) = \ker D(\mathbf{x}, t), \quad \ker A(\mathbf{x}, t) \cap \operatorname{im} D(\mathbf{x}, t) = \{\mathbf{0}\} \quad (8)$$

と等価である. □

DAE (7) の順良指数 (**tractability index**) は次のように定義される.

定義 4.2 ([25, Definition 3.3], [33, Remark 4.6]). 行列 $M(\mathbf{x}, t)$ がすべての $\mathbf{x}$ と t に対して正則であるとき, 順良指数は 0 である. また, すべての $\mathbf{x}$ と t に対して, 行列 $M(\mathbf{x}, t)$ が非正則で

$$\ker D(\mathbf{x}, t) \cap \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m \mid B(\mathbf{x}, t)\mathbf{z} \in \operatorname{im} M(\mathbf{x}, t)\} = \{\mathbf{0}\}$$

が成立するとき, 順良指数は 1 である.

順良指数が 1 以下である必要十分条件が以下のように与えられている.

命題 4.3 ([19, Proposition 5.6]). 行列 $Q(\mathbf{x}, t)$ を $\ker M(\mathbf{x}, t)$ の上への射影子とする. このとき, 順良指数が 1 以下であることは, すべての $\mathbf{x}$ と t に対して $M(\mathbf{x}, t) + B(\mathbf{x}, t)Q(\mathbf{x}, t)$ が正則であることと等価である. □

5 混合方程式の指数

本節では, 混合方程式の指数を回路の構造によって特徴づける. 5.1 節では混合方程式を DAE (7) の形に書きなおす. 5.2 節では指数 0 に対する特徴づけを与え, 5.3 節では指数 1 に対する特徴づけを与える. これらの特徴づけを利用して, 5.4 節では混合方程式の指数を判別するアルゴリズムを提案する.

5.1 混合方程式

まず, 反射形一般逆行列を以下のように定義する.

定義 5.1. 行列 A に対し, $AA^-A = A$ および $A^-AA^- = A^-$ を満たす行列 A^- を A の反射形一般逆行列という.

混合方程式を DAE (7) の形で書くために, 行列 A , ベクトル $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ を以下のように定義する:

$$A = \begin{pmatrix} O & -A_{LL}^\top & I & O & O & O \\ O & O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O & O \\ O & O & O & I & A_{CC} & O \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{i}_L^\lambda \\ \mathbf{i}_U^\lambda \\ \mathbf{i}_Z^\lambda \\ \mathbf{u}_Y^\tau \\ \mathbf{u}_I^\tau \\ \mathbf{u}_C^\tau \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) = A^-A \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \phi^\tau \\ \phi^\lambda \\ \mathbf{q}^\tau \\ \mathbf{q}^\lambda \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} -A_{VL}^\top \mathbf{v}_s(t) - A_{CL}^\top \mathbf{u}_C^\tau - A_{IL}^\top \mathbf{u}_I^\tau - A_{YL}^\top \mathbf{u}_Y^\tau - A_{ZL}^\top \mathbf{h}^\tau - A_{UL}^\top \mathbf{v}_U^\tau(\cdot) \\ -A_{VU}^\top \mathbf{v}_s(t) - A_{CU}^\top \mathbf{u}_C^\tau - A_{IU}^\top \mathbf{u}_I^\tau - A_{YU}^\top \mathbf{u}_Y^\tau - A_{ZU}^\top \mathbf{h}^\tau - A_{UU}^\top \mathbf{v}_U^\tau(\cdot) + \mathbf{v}_U^\lambda(\cdot) \\ -A_{VZ}^\top \mathbf{v}_s(t) - A_{CZ}^\top \mathbf{u}_C^\tau - A_{IZ}^\top \mathbf{u}_I^\tau - A_{YZ}^\top \mathbf{u}_Y^\tau - A_{ZZ}^\top \mathbf{h}^\tau + \mathbf{h}^\lambda \\ \mathbf{g}^\tau + A_{YY} \mathbf{g}^\lambda + A_{YZ} \mathbf{i}_Z^\lambda + A_{YU} \mathbf{i}_U^\lambda + A_{YL} \mathbf{i}_L^\lambda + A_{YJ} \mathbf{j}_s(t) \\ \mathbf{j}_I^\tau(\cdot) + A_{II} \mathbf{j}_I^\lambda(\cdot) + A_{IY} \mathbf{g}^\lambda + A_{IZ} \mathbf{i}_Z^\lambda + A_{IU} \mathbf{i}_U^\lambda + A_{IL} \mathbf{i}_L^\lambda + A_{IJ} \mathbf{j}_s(t) \\ A_{CI} \mathbf{j}_I^\lambda(\cdot) + A_{CY} \mathbf{g}^\lambda + A_{CZ} \mathbf{i}_Z^\lambda + A_{CU} \mathbf{i}_U^\lambda + A_{CL} \mathbf{i}_L^\lambda + A_{CJ} \mathbf{j}_s(t) \end{pmatrix}.$$

この混合方程式が条件 1 と条件 2 を満たすことは, 命題 5.3 で証明する.

$$\text{行列 } \Omega(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} O & O & O & O & O & O \\ O & L_\tau^\tau & L_\lambda^\lambda & O & O & O \\ O & L_\tau^\lambda & L_\lambda^\lambda & O & O & O \\ O & O & O & C_\tau^\tau & C_\lambda^\tau & O \\ O & O & O & C_\tau^\lambda & C_\lambda^\lambda & O \\ O & O & O & O & O & O \end{pmatrix} \text{ を用いて, } D(\mathbf{x}, t) \text{ と } M(\mathbf{x}, t) \text{ は}$$

$$D(\mathbf{x}, t) = A^-A\Omega(\mathbf{x}, t)A^\top, \quad (9)$$

$$M(\mathbf{x}, t) = A\Omega(\mathbf{x}, t)A^\top = \begin{pmatrix} M_L(\mathbf{x}, t) & O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O & M_C(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} \quad (10)$$

と書ける. ただし,

$$M_L(\mathbf{x}, t) = A_{LL}^\top L_\tau^\tau A_{LL} - A_{LL}^\top L_\lambda^\tau - L_\tau^\lambda A_{LL} + L_\lambda^\lambda, \\ M_C(\mathbf{x}, t) = C_\tau^\tau + C_\lambda^\tau A_{CC}^\top + A_{CC} C_\tau^\lambda + A_{CC} C_\lambda^\lambda A_{CC}^\top$$

とおいた. このとき, $M_L(\mathbf{x}, t)$ と $M_C(\mathbf{x}, t)$ は以下の性質を持つ.

補題 5.2 ([19, Lemma 6.3]). 仮定 3.1 のもとで, $M_L(\mathbf{x}, t)$ と $M_C(\mathbf{x}, t)$ は正定値行列である.

証明. 行列 $M_L(\mathbf{x}, t)$ と $M_C(\mathbf{x}, t)$ は

$$M_L(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} -A_{LL}^\top & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_\tau^\tau & L_\lambda^\tau \\ L_\tau^\lambda & L_\lambda^\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -A_{LL} \\ I \end{pmatrix},$$

$$M_C(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} I & A_{CC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_\tau^\tau & C_\lambda^\tau \\ C_\tau^\lambda & C_\lambda^\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ A_{CC}^\top \end{pmatrix}$$

と表せる. 行列 $\begin{pmatrix} L_\tau^\tau & L_\lambda^\tau \\ L_\tau^\lambda & L_\lambda^\lambda \end{pmatrix}$ は正定値であり $\begin{pmatrix} -A_{LL} \\ I \end{pmatrix}$ は列フルランクなので, $M_L(\mathbf{x}, t)$ は正定値行列である. $M_C(\mathbf{x}, t)$ についても同様に示せる. $\square$

混合方程式が条件 1 と条件 2 を満たすことは以下のように証明できる.

命題 5.3 ([19, Proposition 6.7]). 仮定 3.1 のもとで, 混合方程式 (7) は条件 1 と条件 2 を満たす.

証明. 式 (9) と式 (10) を用いると, (8) が成り立つことが確認できる. よって条件 1 が成り立つ. また, 射影子 P を $P = A^\top A$ で定義すると, これは条件 2 を満たす. $\square$

5.2 指数 0 に対する必要十分条件

素子の分割 (E_y, E_z) に対して抵抗非巡回条件を導入する.

[抵抗非巡回条件]

- Y に含まれる各抵抗および S_I に含まれる各従属電流源は, 独立電圧源とキャパシタとそれ自身からなる閉路に含まれる.
- Z に含まれる各抵抗および S_U に含まれる各従属電圧源は, インダクタと独立電流源とそれ自身からなるカットセットに含まれる.

抵抗非巡回条件は, 以下のように書き換えられる.

補題 5.4 ([19, Lemma 7.1]). 分割 (E_y, E_z) が抵抗非巡回条件を満たすことは, $S_I \cup Y \subseteq \bar{T}$ と $Z \cup S_U \subseteq T$ を満たす優先基準木 T が存在することと等価である. $\square$

混合方程式の指数が 0 になる必要十分条件は以下ようになる.

定理 5.5 ([19, Lemma 7.2]). 仮定 3.1 のもとで, 混合方程式の指数が 0 になる必要十分条件は, 分割 (E_y, E_z) が抵抗非巡回条件を満たすことである.

証明. 混合方程式の指数が 0 であることは, $M(\mathbf{x}, t)$ が正則であることと等価である. 補題 5.2 より $M_L(\mathbf{x}, t)$ と $M_C(\mathbf{x}, t)$ は正則なので, $M(\mathbf{x}, t)$ が正則である必要十分条件は, 変数 $i_Z^\lambda, i_U^\lambda, u_I^\tau, u_Y^\tau$ が存在しないことである. つまり, $S_I \cup Y \subseteq \bar{T}$ および $Z \cup S_U \subseteq T$ が成り立つ. 補題 5.4 より, これは抵抗非巡回条件と等価である. $\square$

定理 5.5 より, 混合方程式の指数が 0 となる分割が存在するならば, そのような分割は一意であることがわかる.

5.3 指数 1 以下に対する必要十分条件

本節では、混合方程式の指数が 1 以下となる必要十分条件を導出する。ここで、行列 A_Z, A_Y, N を

$$A_Z = \begin{pmatrix} -A_{ZU}^\top & O \\ -A_{ZZ}^\top & I \end{pmatrix}, \quad A_Y = \begin{pmatrix} I & A_{YY} \\ O & A_{IY} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} A_{YU} & A_{YZ} \\ A_{IU} & A_{IZ} \end{pmatrix}$$

と定義する。さらに、

$$\Lambda = \begin{pmatrix} O & -N^\top \\ N & O \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_Z & O \\ O & A_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z & H \\ G & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -A_Z^\top & O \\ O & -A_Y^\top \end{pmatrix}$$

と定める。このとき、命題 4.3 から次の補題を得る。

補題 5.6 ([19, Lemma 7.3]). 仮定 3.1 のもとで、混合方程式の指数が 1 以下となる必要十分条件は、 Λ が正則であることである。

証明. 射影子 Q を $Q = \begin{pmatrix} O & O & O & O & O & O \\ O & I & O & O & O & O \\ O & O & I & O & O & O \\ O & O & O & I & O & O \\ O & O & O & O & I & O \\ O & O & O & O & O & O \end{pmatrix}$ により定めると、 Q は命題 4.3 の条件を満たす。この Q を用いて $M(\mathbf{x}, t) + B(\mathbf{x}, t)Q$ を計算すると、

$$M(\mathbf{x}, t) + B(\mathbf{x}, t)Q = \begin{pmatrix} M_L(\mathbf{x}, t) & * & * & O \\ O & B_{ZZ}(\mathbf{x}, t) & -N^\top + B_{ZY}(\mathbf{x}, t) & O \\ O & N + B_{YZ}(\mathbf{x}, t) & B_{YY}(\mathbf{x}, t) & O \\ O & * & * & M_C(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}$$

を得る。ただし、

$$\begin{aligned} B_{ZZ}(\mathbf{x}, t) &= A_Z Z A_Z^\top, & B_{ZY}(\mathbf{x}, t) &= A_Z H A_Y^\top, \\ B_{YZ}(\mathbf{x}, t) &= A_Y G A_Z^\top, & B_{YY}(\mathbf{x}, t) &= A_Y Y A_Y^\top \end{aligned}$$

とおいた。命題 4.3 より、混合方程式の指数が 1 以下である必要十分条件は、 $M(\mathbf{x}, t) + B(\mathbf{x}, t)Q$ が正則であることである。補題 5.2 より、これは

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} B_{ZZ}(\mathbf{x}, t) & -N^\top + B_{ZY}(\mathbf{x}, t) \\ N + B_{YZ}(\mathbf{x}, t) & B_{YY}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} O & -N^\top \\ N & O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_Z Z A_Z^\top & A_Z H A_Y^\top \\ A_Y G A_Z^\top & A_Y Y A_Y^\top \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} O & -N^\top \\ N & O \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_Z & O \\ O & A_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z & H \\ G & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -A_Z^\top & O \\ O & -A_Y^\top \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が正則であることと等価である。 $\square$

補題 5.6 より、以下の補題が導かれる。

補題 5.7 ([19, Lemma 7.4]). 仮定 3.1 と仮定 3.2 のもとで、混合方程式の指数が 1 以下となる必要十分条件は、 $\begin{pmatrix} A_Z & N^\top \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} N & A_Y \end{pmatrix}$ が行フルランクであることである。

証明. 補題 5.6 より, 混合方程式の指数が 1 以下となることは Λ が正則であることと等価である. 仮定 3.2 のもとで, $\Sigma = \Theta^\top \begin{pmatrix} Z & O \\ O & Y \end{pmatrix} \Theta$ が対角行列になる直交行列 Θ が存在する. このとき, 仮定 3.2 より, Σ の対角成分はすべて正になる. 行列 $\tilde{A}, \tilde{N}$ を

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_Z & O \\ O & A_Y \end{pmatrix} \Theta, \quad \tilde{N} = \begin{pmatrix} O & -N^\top \\ N & O \end{pmatrix} + \tilde{A} \Theta^\top \begin{pmatrix} O & H \\ G & O \end{pmatrix} \Theta \tilde{A}^\top$$

で定めると, $\Lambda = \tilde{N} - \tilde{A} \Sigma (-\tilde{A}^\top)$ と表せる. よって, 補題 2.3 より, Λ が正則である必要十分条件は $\begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & -\tilde{A}^\top \\ \tilde{A} & \tilde{N} \end{pmatrix}$ が正則であることである.

以下, 行列

$$\begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & -\tilde{A}^\top \\ \tilde{A} & \tilde{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -\tilde{A}^\top \\ \tilde{A} & \tilde{N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} \quad (11)$$

が正則となる必要十分条件を求める. この行列は歪対称行列と, 成分がすべて非負の対角行列の和になっている. 式 (11) の行列の行集合・列集合を X , 小行列 $\tilde{N}$ に対応する行集合・列集合を $S \subseteq X$ とする. このとき補題 2.1 より, 式 (11) の行列が正則である必要十分条件は, $\begin{pmatrix} O & -\tilde{A}^\top \\ \tilde{A} & \tilde{N} \end{pmatrix}$ の正則な主小行列で, $\begin{pmatrix} O & -\tilde{A}^\top \\ \tilde{A} & \tilde{N} \end{pmatrix} [S] = \tilde{N}$ を含むものが存在することである. 補題 2.2 より, これは

$$\begin{pmatrix} O & -\tilde{A}^\top \\ \tilde{A} & \tilde{N} \end{pmatrix} [S, X] = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{N} \end{pmatrix}$$

が行フルランクであることと等価である. いま,

$$\begin{aligned} (\tilde{A} \mid \tilde{N}) &= \left(\tilde{A} \mid \begin{pmatrix} O & -N^\top \\ N & O \end{pmatrix} + \tilde{A} \Theta^\top \begin{pmatrix} O & H \\ G & O \end{pmatrix} \Theta \tilde{A}^\top \right) \xrightarrow{\text{列変形}} \left(\tilde{A} \mid \begin{pmatrix} O & -N^\top \\ N & O \end{pmatrix} \right) \\ &\xrightarrow{\text{列変形}} \left(\begin{array}{cc|cc} A_Z & O & O & -N^\top \\ O & A_Y & N & O \end{array} \right) \xrightarrow{\text{置換}} \left(\begin{array}{cc|cc} A_Z & -N^\top & O & O \\ O & O & N & A_Y \end{array} \right) \end{aligned}$$

と変形できるので, $\begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{N} \end{pmatrix}$ が行フルランクである必要十分条件は, $\begin{pmatrix} A_Z & N^\top \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} N & A_Y \end{pmatrix}$ が行フルランクであることである. $\square$

回路の結線構造を表すグラフ $\Gamma = (W, E)$ に対し, $e \in E$ の縮約とは e を除去し, e の両端点を同一視することである. ここで, $V \cup C$ のすべての枝を縮約し, $L \cup J$ のすべての枝を除去したグラフを Γ° とする. このとき, Γ° の基本カットセット行列 F° は

$$F^\circ = \begin{pmatrix} i_I^\tau & i_Y^\tau & i_Z^\tau & i_U^\tau & i_I^\lambda & i_Y^\lambda & i_Z^\lambda & i_U^\lambda \\ I & O & O & O & A_{II} & A_{IY} & A_{IZ} & A_{IU} \\ O & I & O & O & O & A_{YY} & A_{YZ} & A_{YU} \\ O & O & I & O & O & O & A_{ZZ} & A_{ZU} \\ O & O & O & I & O & O & O & A_{UU} \end{pmatrix}$$

となる. 補題 5.7 より, 次の主定理が得られる.

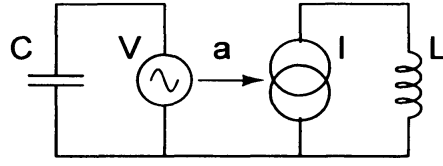


図 2: 従属電流源を含む回路.

定理 5.8 ([19, Theorem 7.5]). 仮定 3.1 と仮定 3.2 のもとで, 混合方程式の指数が 1 以下になる必要十分条件は, グラフ Γ° が従属電圧源からなる閉路を持たず, 従属電流源からなるカットセットを持たないことである.

証明. 補題 5.7 より, 混合方程式の指数が 1 以下となる必要十分条件は, $(A_Z \ N^\top)$ と $(N \ A_Y)$ が行フルランクであることである. ここで,

$$(A_Z \ N^\top) = \begin{pmatrix} -A_{ZU}^\top & O & A_{YU}^\top & A_{IU}^\top \\ -A_{ZZ}^\top & I & A_{YZ}^\top & A_{IZ}^\top \end{pmatrix}$$

が行フルランクであることは,

$$\begin{pmatrix} O & A_{IU} \\ O & A_{YU} \\ O & A_{ZU} \\ I & A_{UU} \end{pmatrix}$$

が列フルランクであることと等価である. この行列は F° において, 列集合が S_U に対応する小行列である. よって, その列フルランク性は, Γ° が従属電圧源からなる閉路を含まないことと等価である. また, 行列

$$(N \ A_Y) = \begin{pmatrix} A_{YU} & A_{YZ} & I & A_{YY} \\ A_{IU} & A_{IZ} & O & A_{IY} \end{pmatrix}$$

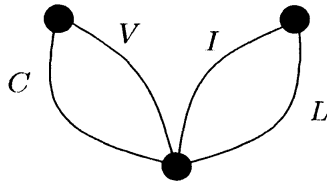
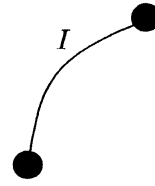
の行フルランク性は,

$$\begin{pmatrix} O & O & O & A_{IY} & A_{IZ} & A_{IU} \\ I & O & O & A_{YY} & A_{YZ} & A_{YU} \\ O & I & O & O & A_{ZZ} & A_{ZU} \\ O & O & I & O & O & A_{UU} \end{pmatrix}$$

の行フルランク性と等価である. この行列は, F° の小行列において, 列集合が $Y \cup Z \cup S_U$ に対応する小行列である. よってその行フルランク性は, Γ° が Y, Z, S_U の枝からなる全域木を持つことと等価である. これは, Γ° が従属電流源からなるカットセットを含まないことと等価である. $\square$

例 5.9 ([12]). 図 2 の従属電流源 I を含む回路を考える. この回路に MNA を適用して得られる DAE は指数が 3 になる [12]. 一方, 混合解析では分割

$$E_g = \{V\}, \quad E_h = \emptyset, \quad E_y = \{C, I\}, \quad E_z = \{L\}$$

図 3: 例 5.9 のグラフ Γ .図 4: 例 5.9 のグラフ Γ° .

に対して指数 2 の DAE が得られる [18].

以下, この回路が定理 5.8 の条件を満たさないことを確認する. 図 3 はこの回路の結線構造を表すグラフを表している. 枝 V と C を縮約し, L を除去したグラフ Γ° は図 4 のようになる. このとき, Γ° はカットセット I を持つので, 従属電流源からなるカットセットが存在する. $\square$

定理 5.8 は, 指数が 1 を超えるか否かは分割の選び方に依存しないことを意味している. さらに定理 5.8 から, 非線形時変 RLC 回路に対する以下の結果が導かれる.

系 5.10. 非線形時変 RLC 回路において, 混合方程式の指数は常に 1 以下である.

証明. $S_I = S_U = \emptyset$ なので, 定理 5.8 より明らかである. $\square$

定理 5.11. 非線形時変 RLC 回路において, 混合方程式の最小指数は MNA の指数を超えない.

証明. 系 5.10 より, 混合方程式の指数は 1 以下である. 従って, MNA から導出される DAE の指数が 0 のときに, 混合方程式の最小指数が 0 になることを示せばよい. MNA から導出される DAE の指数が 0 となる必要十分条件は, 回路の結線構造を表すグラフ $\Gamma = (W, E)$ が独立電圧源 V を持たず, キャパシタ C からなる全域木を持つことである [8, 32]. このとき, Γ° は 1 つの頂点と自己ループの枝からなる. よって, 抵抗をすべて E_y に入れる分割 (E_y, E_z) に対し, 混合方程式の指数は 0 になる. $\square$

5.4 混合方程式の指数判別アルゴリズム

定理 5.5 と定理 5.8 から, 混合方程式の指数を判別するアルゴリズムが導かれる. グラフにおいて, 除去すると連結成分数が増える枝を**コループ**という. 次のアルゴリズムでは, まず最小指数 ν が 1 以下か否かを判定し, 指数が 1 以下ならば, 指数 0 になる分割が存在するか否かを判定する. 最小指数 ν が 0 になる場合, それを達成する分割 (E_y, E_z) も求める.

指数判別アルゴリズム

- 1: $E_y \leftarrow \{e \mid e \in C \cup S_I\}$, $E_z \leftarrow \{e \mid e \in S_U \cup L\}$ とする.
- 2: グラフ $\Gamma = (W, E)$ から $V \cup C$ のすべての枝を縮約, $L \cup J$ のすべての枝を除去し, グラフ Γ° を得る.
- 3: Γ° が従属電圧源 S_U からなる閉路または従属電流源 S_I からなるカットセットを持つならば, $\nu \geq 2$ を出力して終了.

4: Γ° が以下のいずれかを満たすならば, $\nu = 1$ を出力して終了.

- 自己ループでない従属電流源 S_I の枝が存在する.
- コループでない従属電圧源 S_U の枝が存在する.
- 抵抗が自己ループ以外の閉路を成す.

5: $E_y \leftarrow E_y \cup \{e \mid e: \text{自己ループの抵抗}\}$, $E_z \leftarrow E_* \setminus E_y$ とし, $\nu = 0$ と (E_y, E_z) を出力して終了.

このアルゴリズムは [31] で提案した線形時不変 RLC 回路に対するアルゴリズムの拡張になっており, 計算量は $O(|E|)$ である.

6 おわりに

本稿では, 従属電源を含む非線形時変回路を対象として, 混合方程式の指数が 0 と 1 となる回路の構造的特徴づけを与えた. さらに, この特徴づけを利用した指数判別アルゴリズムを提案した. また, 非線形時変 RLC 回路に対し, 混合方程式の指数が常に 1 以下であることを証明し, MNA から導出される DAE の指数を超えないことを証明した. これは, 数値計算の観点からみた混合解析の MNA に対する優位性を示唆している.

従属電源を含む線形時不変回路を対象として, 混合方程式の指数最小化アルゴリズムが提案されている [18]. このアルゴリズムの非線形時変回路への拡張が今後の課題である.

参考文献

- [1] S. Amari: Topological foundations of Kron's tearing of electric networks, *RAAG Memoirs*, 3 (1962), 322–350.
- [2] K. Balla and R. März: A unified approach to linear differential algebraic equations and their adjoint equations, *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, 21 (2002), 783–802.
- [3] F.H. Branin: The relation between Kron's method and the classical methods of network analysis, *The Matrix and Tensor Quarterly*, 12 (1962), 69–115.
- [4] K.E. Brennan, S.L. Campbell and L.R. Petzold: *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*, SIAM, Philadelphia, 2nd edition, 1996.
- [5] P. Bujakiewicz: *Maximum Weighted Matching for High Index Differential Algebraic Equations*, Ph.D. thesis, Delft University of Technology, 1994.
- [6] S.L. Campbell and C.W. Gear: The index of general nonlinear DAEs, *Numerische Mathematik*, 72 (1995), 173–196.
- [7] L.O. Chua: Dynamic nonlinear networks: State-of-the-art, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 27 (1980), 1059–1087.

- [8] A.J. Encinas and R. Riaza: Tree-based characterization of low index circuit configurations without passivity restrictions, *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 36 (2008), 135–160.
- [9] D. Estévez Schwarz and C. Tischendorf: Structural analysis of electric circuits and consequences for MNA, *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 28 (2000), 131–162.
- [10] W. Fischer: Equivalent circuit and gain of MOS field effect transistors, *Solid-State Electronics*, 9 (1966), 71–81.
- [11] C.W. Gear: Simultaneous numerical solution of differential-algebraic equations, *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 18 (1971), 89–95.
- [12] M. Günther and P. Rentrop: The differential-algebraic index concept in electric circuit simulation, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 76 (supplement 1) (1996), 91–94.
- [13] E. Hairer and G. Wanner: *Solving Ordinary Differential Equations II*, Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition, 1996.
- [14] I. Higuera and R. März: Differential algebraic equations with properly stated leading terms, *Computers and Mathematics with Applications*, 48 (2004), 215–235.
- [15] I. Higuera, R. März and C. Tischendorf: Stability preserving integration of index-1 DAEs, *Applied Numerical Mathematics*, 45 (2003), 175–200.
- [16] M. Iri: A min-max theorem for the ranks and term-ranks of a class of matrices: An algebraic approach to the problem of the topological degrees of freedom of a network (in Japanese), *Transactions of the Institute of Electronics and Communication Engineers of Japan*, 51A (1968), 180–187.
- [17] M. Iri: Applications of Matroid Theory, in *Mathematical Programming — The State of the Art*, Springer-Verlag, Berlin, 1983, 158–201.
- [18] S. Iwata and M. Takamatsu: Index minimization of differential-algebraic equations in hybrid analysis for circuit simulation, *Mathematical Programming*, 121 (2010), 105–121.
- [19] S. Iwata, M. Takamatsu and C. Tischendorf: Structural characterization on index of DAEs in hybrid analysis for general circuits, METR 2009-33, Department of Mathematical Informatics, University of Tokyo, 2009.
- [20] G. Kishi and Y. Kajitani: Maximally distinct trees in a linear graph (in Japanese), *Transactions of the Institute of Electronics and Communication Engineers of Japan*, 51A (1968), 196–203.
- [21] G. Kron: *Tensor Analysis of Networks*, John Wiley and Sons, New York, 1939.

- [22] P. Kunkel and V. Mehrmann: *Differential-Algebraic Equations: Analysis and Numerical Solutions*, European Mathematical Society, 2006.
- [23] R. März: A matrix chain for analyzing differential-algebraic equations, Preprint 162, Humboldt-Universität, Berlin, 1987.
- [24] R. März: Numerical methods for differential-algebraic equations, *Acta Numerica*, 1 (1992), 141–198.
- [25] R. März: Nonlinear differential-algebraic equations with properly formulated leading term, Preprint 01-3, Department of Mathematics, Humboldt-Universität zu Berlin, 2001, available from <http://www.mathematik.hu-berlin.de/publ/pre/2001/P-01-3.ps>.
- [26] R. März: The index of linear differential algebraic equations with properly stated leading term, *Results in Mathematics*, 42 (2002), 308–338.
- [27] R. März and R. Riaza: Linear differential-algebraic equations with properly stated leading term: Regular points, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 323 (2006), 1279–1299.
- [28] T. Ohtsuki, Y. Ishizaki and H. Watanabe: Network analysis and topological degrees of freedom (in Japanese), *Transactions of the Institute of Electronics and Communication Engineers of Japan*, 51A (1968), 238–245.
- [29] J.M. Rabaey: *The Spice Page*: <http://bwrc.eecs.berkeley.edu/Courses/icbook/SPICE/>.
- [30] R. Riaza and R. März: Linear Index-1 DAEs: Regular and singular problems, *Acta Applicandae Mathematicae*, 84 (2004), 29–53.
- [31] M. Takamatsu and S. Iwata: Index characterization of differential-algebraic equations in hybrid analysis for circuit simulation, *International Journal of Circuit Theory and Applications*, to appear.
- [32] C. Tischendorf: *Coupled systems of differential algebraic and partial differential equations in circuit and device simulation: Modeling and numerical analysis*, Berlin, 2003, Habilitationsschrift.
- [33] S. Voigtmann: *General Linear Methods for Integrated Circuit Design*, Ph.D. thesis, Humboldt-Universität zu Berlin, 2007.