

## 5 次 Swift-Hohenberg 方程式における局在パターン解

北海道大学・電子科学研究所 平岡 裕章 (Yasuaki Hiraoka)  
Research Institute for Electronic Science  
Hokkaido University  
hiraoka@nsc.es.hokudai.ac.jp

### 1 序

本稿では空間リバーシブル系において Hamiltonian-Hopf 分岐を経て現れる saddle-focus 型平衡点近傍の力学系について考察する. ここでは特に 5 次の非線形項を持つ Swift-Hohenberg 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left\{ \nu - \left( 1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 \right\} u + \mu u^3 - u^5 \quad (1)$$

の定常問題を  $x \in \mathbb{R}$  上で考える (問題の背景などは [2][3][7] を参照).

方程式 (1) に十分大きなシステムサイズ  $L$  の周期境界条件  $u(x+L) = u(x)$  を課し, その定常解の分岐図を数値的に求めてみる. すると以下で与えられるようなサドルノード分岐を複数回繰り返す分岐枝が現れ, その分岐枝上では局在化した定常解が観察される (図 1, 2).

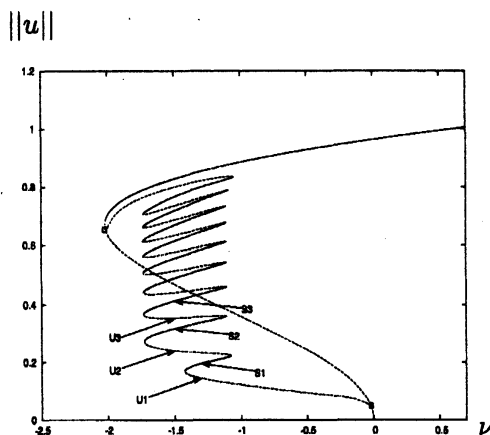


図 1:  $\mu = 3.0$ ,  $k_0 = 2\pi/L = 0.1$  における定常解分岐図

更にシステムサイズを大きくして分岐図を求めると, この分岐枝のサドルノード分岐の回数は増えていき, それに伴いピークの数も増えた局在パターン解が得られる. このことから, これらの数値計算結果は周期境界条件を無くした (1) の定常問題として自明解  $u = 0$  を結ぶ可算無限個の homoclinic 軌道が存在することを示唆している.

本稿では, まず周期境界条件下で現れる上記の局在パターン解の存在証明を, 位相的検証法 [3] を用いて示す. その後に周期境界条件を無くした場合に, 自明解から周期解への

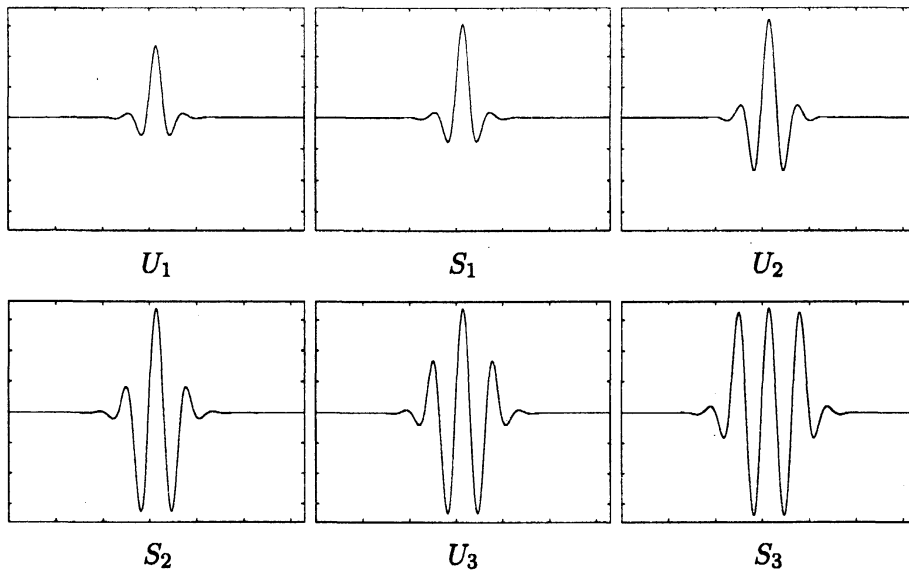


図 2:  $U_k, S_k, k = 1, 2, 3$ , での定常解波形 ( $\nu = -1.3$ )

heteroclinic 軌道を調べる事で、可算無限個の homoclinic 軌道が出現する数学的構造を明らかにしていく [2]. なお 2 節の内容は小川知之（大阪大学基礎工学研究科）氏との共同研究に基づく。

## 2 Conley 指数を用いた数値検証

まずはじめに定常解の検証において中心的役割を果たす Conley 指数理論 [1] について簡単に紹介しよう.  $f$  を  $\mathbb{R}^m$  上の  $C^1$  ベクトル場とし、常微分方程式系  $\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^m$  の生成する流れを  $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  とする. コンパクト集合  $N \subset \mathbb{R}^m$  がその内部に流れ  $\varphi$  に関する極大不変集合  $\text{Inv}(\varphi, N)$  を含むとき、すなわち  $\text{Inv}(\varphi, N) \subset \text{Int } N$  のとき  $N$  を孤立化近傍と呼び、 $\text{Inv}(\varphi, N)$  を孤立不変集合と呼ぶ. さらに孤立化近傍の境界が

$$L^+ := \{x \in \partial N \mid \exists t > 0 \text{ s.t. } \varphi((0, t), x) \cap N = \emptyset\},$$

$$L^- := \{x \in \partial N \mid \exists t > 0 \text{ s.t. } \varphi((-t, 0), x) \cap N = \emptyset\}$$

の和集合で構成されているとき  $N$  を孤立化ブロックと定義し、 $L^+, L^-$  をそれぞれ出口、入口と呼ぶことにする. 任意の孤立不変集合に孤立化近傍を適当にとれば孤立化ブロックになること、また特定の孤立不変集合に対して異なる孤立化ブロックと出口の空間対  $(N_1, L_1^+), (N_2, L_2^+)$  があれば  $(N_1, L_1^+)$  と  $(N_2, L_2^+)$  が空間対としてホモトピー同値であることが知られている [1]. よって孤立不変集合に対してその Conley 指数を以下のように定める.

**定義 1**  $(N, L^+)$  を孤立不変集合  $\text{Inv}(\varphi, N)$  の孤立化ブロックと出口の空間対としたとき相対ホモロジー群

$$CH_*(\text{Inv}(\varphi, N)) := H_*(N, L^+)$$

を, 孤立不変集合  $\text{Inv}(\varphi, N)$  の Conley 指数と呼ぶ.

以後ホモロジー群の係数として  $\mathbb{Z}_2$  を用いることにする.

例えば双曲型平衡点は孤立不変集合であるが, その Conley 指数を計算してみよう. 簡単のため, 原点が平衡点でその周りの線形化固有値  $\lambda_j, j = 1, \dots, m$  はすべて実数とする. 対角化した形で方程式を書けば,  $\dot{x}_j = \lambda_j x_j + (h.o.t.)$  となる. 今  $1 \leq j \leq k$  で  $\lambda_j > 0$ ,  $k+1 \leq j \leq m$  で  $\lambda_j < 0$  とする.  $\epsilon$  を十分小さくとれば超立方体  $N = \prod_{j=1}^m [-\epsilon, \epsilon]$  が孤立化ブロックになり,  $\partial \left( \prod_{j=1}^k [-\epsilon, \epsilon] \right) \times \prod_{j=k+1}^m [-\epsilon, \epsilon]$  が出口であることは容易にわかる. したがって  $N/L^+$  は  $k$  次元球面にホモトピー同値であり, よって  $CH_k(\text{Inv}(N, \varphi)) \cong \mathbb{Z}_2$  かつ  $CH_j(\text{Inv}(N, \varphi)) = 0$  ( $j \neq k$ ) となる.

逆に Conley 指数の情報からなんらかの孤立不変集合の性質を引き出すことは可能であろうか. 以下の定理はこの疑問に対する部分的な解答を与えるものである.

定理 2 ([5]) ある非負整数  $k$  に対して

$$CH_j(\text{Inv}(N, \varphi)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & j = k, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

ならば,  $N$  の中に平衡点が存在する.

この定理は孤立化ブロックが与えられた時に, その Conley 指数が双曲型平衡点の Conley 指数と同じであれば平衡点が存在することを主張するものであり, 位相幾何学の Lefschetz の不動点定理と同等である. また, 結論として得られる平衡点が双曲型であるかどうかは一般には不明である. しかしながらもし平衡点がただか一つであり, 双曲型であることがわかれば, 不安定次元が  $m$  であることがわかる. その意味で Conley 指数に基づく検証が成功すれば多くの場合安定性の情報も同時に得られる.

この定理をもとに, (1) に周期境界条件  $u(t, x) = u(t, x + L)$  を課した定常解の存在証明を, 位相的な方法によって与える検証法について議論しよう. この方程式は空間変数  $x$  の平行移動に関する不変性を持つため, 例えば偶関数性  $u(t, x) = u(t, -x)$  を仮定して定常解の孤立性が成り立つ状況を設定しておく. 周期  $L$  の周期境界条件であるからまずはフーリエ余弦級数展開  $u(x, t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j(t) \cos(jk_0 x)$  を施して可算無限個の常微分方程式系に帰着する ( $k_0 = 2\pi/L$  とする),

$$\dot{a}_j = f_j(a) := \zeta_j a_j + \mu f_j^{(3)}(a) - f_j^{(5)}(a), \quad j = 0, 1, \dots \quad (2)$$

ここで  $\zeta_j = \nu - (1 - j^2 k_0^2)^2$  であり

$$f_j^{(3)}(a) = \sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=j \\ m_i \in \mathbb{Z}}} a_{m_1} a_{m_2} a_{m_3}$$

$$f_j^{(5)}(a) = \sum_{\substack{m_1+m_2+m_3+m_4+m_5=j \\ m_i \in \mathbb{Z}}} a_{m_1} a_{m_2} a_{m_3} a_{m_4} a_{m_5}$$

である. こうして (1) の定常解を (2) の平衡点  $f_j(a) = 0, j = 0, 1, \dots$ , とみなし, 式 (2) の平衡点の存在を Conley 指数を用いて検証するのである.

無限次元力学系 (2) を次のように分解しよう.

$$a = (a_F, a_I), \quad a_F = (a_0, a_1, \dots, a_m), \quad a_I = (a_{m+1}, a_{m+2}, \dots) \\ f(a) = (f_F(a), f_I(a)), \quad f_F(a) = (f_0(a), f_1(a), \dots, f_m(a)), \quad f_I(a) = (f_{m+1}(a), f_{m+2}(a), \dots).$$

以後添字  $F, I$  はそれぞれ有限次元部分, 無限次元部分を表すものとして用いる. さてガレルキン近似を  $g_F(a_F) := f_F(a_F, a_I = 0)$  として  $g_F(\bar{a}_F) \approx 0$  を満たす近似平衡点  $\bar{a} = (\bar{a}_F, 0)$  の近傍に真の平衡点があると考えるのは自然であろう. ガレルキン近似のエラー項を  $r(a_F, a_I) := f_F(a_F, a_I) - g_F(a_F)$  とおく. 次にベクトル場の出入りを計算機を用いて厳密に調べる際に, 本質的な役割を果たす新しい変数  $b = (b_F, b_I)$  を

$$(Pb_F + \bar{a}_F, b_I) = (a_F, a_I) \quad (3)$$

として導入する. ここで  $P$  は  $\bar{a}_F$  で  $Dg_F(\bar{a}_F)$  の固有ベクトル  $p_i$  を第  $i$  列に持つ行列とし, この変数変換を  $T: (b_F, b_I) \mapsto (a_F, a_I)$  と表す. この時, 新しい変数に対する力学系は  $\bar{a}_F$  で  $g_F(a_F)$  をテイラー展開することで

$$\dot{b}_j = h_j(b) := \begin{cases} \lambda_j b_j + R_j(b), & j = 0, 1, \dots, m, \\ f_j(Pb_F + \bar{a}_F, b_I), & j > m \end{cases} \quad (4)$$

となる. ここで  $R_F(b) = (R_0(b), R_1(b), \dots, R_m(b))$  は

$$R_F(b) = P^{-1} \left( g_F(\bar{a}_F) + \frac{1}{2} D^2 g_F(\bar{a}_F) (Pb_F)^2 + \dots + \frac{1}{5!} D^5 g_F(\bar{a}_F) (Pb_F)^5 + r(b_F, b_I) \right)$$

で与えられ,  $\lambda_j$  は固有ベクトル  $p_j$  に対応する固有値を表すものとする. ここでは  $Dg_F(\bar{a}_F)$  は対角化可能であると仮定し, 議論を簡単にするために  $\lambda_j (\neq 0) \in \mathbb{R}$  としている.

次の集合は定常解の検証において重要な役割を果たす.

**定義 3** 力学系 (4) が与えられたとき, 原点を含むコンパクト集合  $W = \prod_{j=0}^{\infty} [b_j^-, b_j^+]$  が次の 2 つの条件を満たすとき候補者集合と呼ぶ.

1.  $W_F = \prod_{j=0}^m [b_j^-, b_j^+]$  は  $b_I \in W_I = \prod_{j>m} [b_j^-, b_j^+]$  ごとに定まるベクトル場  $h_F(b_F, b_I)$  が生成する流れ  $\varphi^{(b_I)}$  に対して常に孤立化ブロックとなる
2. 境界  $W_F \times \partial W_I$  はベクトル場  $h(b)$  に対して入口となる

このとき定理 2 の応用として次が成立する.

**定理 4** ([8]) 力学系 (4) に対して候補者集合  $W$  が与えられているとする. このとき有限次元部分  $W_F$  の Conley 指数がある  $k \in \{0, 1, \dots, m\}$  に対して

$$CH_j \left( \text{Inv} \left( W_F, \varphi^{(b_I)} \right) \right) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & j = k, \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \quad (5)$$

となるならば,  $TW$  内に (2) の平衡点が存在する.

したがって定常解の検証の為には、定理4の条件を満たすような候補者集合を計算機上で構成すれば良いわけである。アルゴリズムの詳細については[3][8]を参照されたい。

ここまでの議論を用いる事で、周期境界条件下における5次Swift-Hohenberg方程式に現れる局在パターン解について次の数値検証結果を得た([3])。

定理5  $\nu = -1.3$ ,  $k_0 = 0.1$  とする。この時、5次Swift-Hohenberg方程式の定常解  $u_*(x; k_0, \nu, b)$ ,  $b = U_k, S_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , が近似解  $u(x; k_0, \nu, b)$  の近傍

$$\|u_*(x; k_0, \nu, U_1) - u(x; k_0, \nu, U_1)\|_{L^2} \leq 1.04077019 \times 10^{-8}$$

$$\|u_*(x; k_0, \nu, S_1) - u(x; k_0, \nu, S_1)\|_{L^2} \leq 1.57739803 \times 10^{-8}$$

$$\|u_*(x; k_0, \nu, U_2) - u(x; k_0, \nu, U_2)\|_{L^2} \leq 2.44819377 \times 10^{-8}$$

$$\|u_*(x; k_0, \nu, S_2) - u(x; k_0, \nu, S_2)\|_{L^2} \leq 4.31155312 \times 10^{-8}$$

$$\|u_*(x; k_0, \nu, U_3) - u(x; k_0, \nu, U_3)\|_{L^2} \leq 2.83246161 \times 10^{-9}$$

$$\|u_*(x; k_0, \nu, S_3) - u(x; k_0, \nu, S_3)\|_{L^2} \leq 7.47772691 \times 10^{-9}$$

内に存在する。ここで近似解は

$$u(x; k_0, \nu, b) = \sum_{|j| \leq m} a_j \cos(jk_0 x),$$

で構成され、各フーリエ係数は図1で与えられているものとする。

### 3 ホモクリニック及びヘテロクリニック解

2節では周期境界条件下における局在パターン解を位相の数値検証法を用いて調べていったが、この節では周期境界条件を無くした定常問題を考える。特に、1節で考察した可算無限個の局在パターン解が存在するメカニズムについて議論したい。

方程式(1)の定常問題は次で与えられる変数

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{3}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{-1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u_x \\ -2u_x - u_{xxx} \\ u_{xx} \end{pmatrix}$$

の下で、ハミルトニアン

$$H(z) = (z_2 z_3 - z_1 z_4) + \frac{1}{2}(z_3^2 + z_4^2) + \frac{\nu}{16}(2z_1 + z_4)^2 + \frac{\mu}{256}(2z_1 + z_4)^4 - \frac{1}{3072}(2z_1 + z_4)^6$$

を持つハミルトン系として表される。自明解での固有値は  $\nu = 0$  で2重固有値を持ち、Hamiltonian-Hopf分岐を起こすことが容易にわかる(図3)。この時、次の標準形へのシンプレクティック変換が存在する[2]:

$$H(z) = -K + \frac{1}{2}(z_3^2 + z_4^2) + \frac{\nu}{8}(I + K) + a_1 I^2 + a_2 I K + a_3 K^2 + b_1 I^3 + b_2 I^2 K + b_3 I K^2 + b_4 K^3 \\ + c_1 I^4 + c_2 I^3 K + c_3 I^2 K^2 + c_4 I K^3 + c_5 K^4 + O(z^{10}).$$

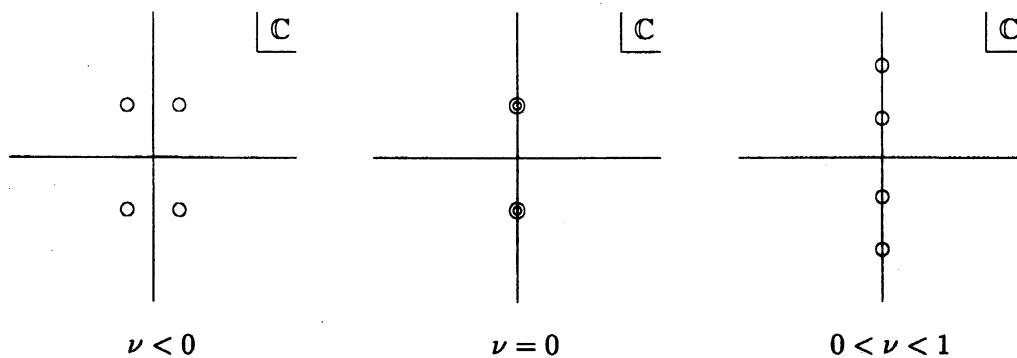


図 3: 自明解における固有値の振舞い

ここで  $I = z_1^2 + z_2^2$ ,  $K = z_1 z_4 - z_2 z_3$  であり, 各係数  $a_i, b_i, c_i$  は  $\mu$  に依存している (例えば  $a_1 = \frac{3}{128}\mu$ ).

まずはじめに高次項を無視した標準形でのダイナミクスを解析してみる. つまり

$$H_{in}(z) := -K + \frac{1}{2}(z_3^2 + z_4^2) + \frac{\nu}{8}(I + K) + a_1 I^2 + a_2 I K + a_3 K^2 + b_1 I^3 + b_2 I^2 K + b_3 I K^2 + b_4 K^3$$

$$H_{non}(z) := H(z) - H_{in}(z)$$

として,  $H_{in}(z)$  に従うハミルトン系を調べてみる. その為に次で与えられるシンプレクティック変換

$$\begin{aligned} z_1 &= r \cos \theta, & R &= z_3 \cos \theta + z_4 \sin \theta, \\ z_2 &= r \sin \theta, & \Theta &= -z_3 r \sin \theta + z_4 r \cos \theta \end{aligned}$$

を導入する.  $\Theta = K$  と  $\{H_{in}, K\} = 0$  ( $\{\bullet, \bullet\}$  はポアソン括弧) より  $(r, R)$  に関する 1 自由度ハミルトン系に縮約可能であることに注意する. この時, 自明解を含む曲面  $K = 0$  上でのダイナミクスは次で与えられる.

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dx} &= R \\ \frac{dR}{dx} &= -r \left( 6b_1(\mu)r^4 + 4a_1(\mu)r^2 + \frac{\nu}{4} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

ここで (6) の非自明な平衡点は元の変数  $z$  での周期解に対応することに注意しておく. 図 4 はパラメーター  $(\mu, \nu)$  に応じた  $(r, R)$  相空間ダイナミクスをまとめたものである.

これより高次項を無視した標準形において次のことが明らかになった.

1. 領域 I で自明解を結ぶ homoclinic 軌道の存在
2. 領域 II で周期解を結ぶ homoclinic 軌道の存在
3. 曲線  $l$  上で自明解と周期解を結ぶ heteroclinic 軌道の存在
4. 領域 III では非自明な周期解は存在しない

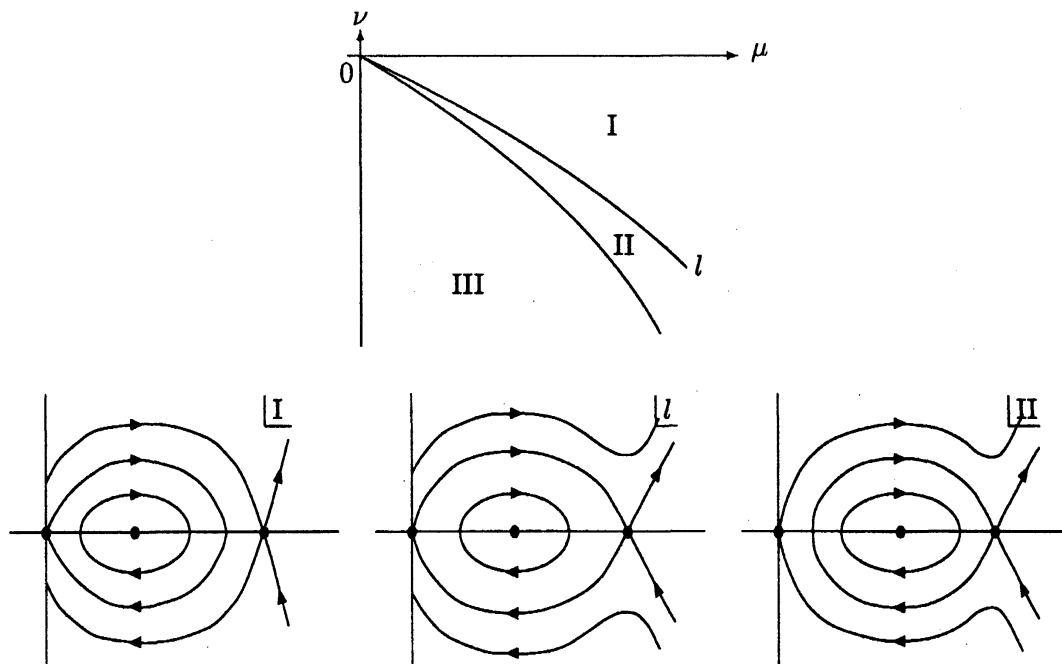


図 4:  $K = 0$  超曲面上のダイナミクス

ここで得られた homo/heteroclinic 軌道が高次項  $H_{non}$  の存在下、つまり方程式 (1) の定常解として存在しうるかに関しては以下の結果が得られた [2].

**定理 6** 領域 I, II で高次項を無視した標準形で存在した homoclinic 軌道は  $H_{non}$  の存在下においても存続する.

**定理 7** 曲線  $l$  の近傍に曲線  $\tilde{l}$  が存在して、高次項を無視した標準形で存在した heteroclinic 軌道は  $H_{non}$  の存在下においても  $\tilde{l}$  上で存続する.

定理 6 は方程式 (1) の定常解として自明解を結ぶ homoclinic 軌道及び周期解を結ぶ homoclinic 軌道が存在することを述べており、それぞれ (1) の局在パターン解を表している. 一方定理 7 は自明解と周期解を結ぶ定常解の存在を示している. 定理 6, 7 の証明にはリバーシブル系の性質 [4] 及びメルニコフの方法 [6] を用いる. 定理の証明は [2] を参照されたい.

方程式 (1) の定常解分岐図を数値的に調べた結果と比較すると、1 節で述べたサドルノード分岐列が出現するパラメーター値と上記の heteroclinic 軌道が現れる曲線  $l$  は、 $\mu$  が小さい箇所では数値的に非常に近いことが観察される. これより heteroclinic 軌道の存在とサドルノード分岐列の存在が何らかの意味で関係していると思われる. つまり heteroclinic 軌道の存在が可算無限個の homoclinic 軌道を誘発している事を示唆している. 詳細は [2] にゆずるが、generic な状況下で定理 7 において存在が証明された heteroclinic 軌道が可算無限個の homoclinic 軌道を発生させている事も説明することができる.

## 参考文献

- [1] C. Conley, *Isolated Invariant Sets and the Morse Index*, CBMS Lecture Notes **38**, A.M.S. Providence, R.I. 1978.
- [2] Y. Hiraoka, Homoclinic and heteroclinic solutions in the quintic Swift-Hohenberg equation, preprint.
- [3] Y. Hiraoka and T. Ogawa, Rigorous numerics for localized patterns to the quintic Swift-Hohenberg equation, *Jpn. J. Ind. Appl. Math.* **22** (2005), 57-75.
- [4] G. Iooss and M. C. Pérouème, Perturbed homoclinic solutions in reversible 1:1 resonance vector fields, *J. Diff. Eq.* **102** (1993), 62-88.
- [5] C. McCord, Mappings and homological properties in the Conley index theory, *Ergod. Th. and Dynam. Sys.* **8\*** (1988), 175-198.
- [6] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer, 1990.
- [7] P. D. Woods and A. R. Champneys, Heteroclinic tangles and homoclinic snaking in the unfolding of a degenerate reversible Hamiltonian-Hopf bifurcation, *Physica D* **129** (1999), 147-170.
- [8] P. Zgliczyński and K. Mischaikow, Rigorous Numerics for Partial Differential Equations: The Kuramoto-Sivashinsky Equation, *Found. Comput. Math.* **1** (2001), 255-288.