

「尾関育三氏の予想について」

昭和63年(1988)10月27日(木)午後4時~5時

於: 筑波大学 数学系 D814

大阪大学: 行者明彦氏述

(木村達雄記)

G を複素 reductive 群 とする. 一般論を御存知の方には

$GL_n(\mathbb{C})$ とか $SO_n(\mathbb{C})$ などの直積と思っておいて下さい. 実際

この話では $GL_n(\mathbb{C})$ と $SO_n(\mathbb{C})$ しかでてきません.

V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間 とします. そして

G が V に作用しているとする. 但し $\forall g \in G$ に対して

$v \in V$ を $v \mapsto gv$ と対応させる写像は $GL(V)$ の元

であるとする. このとき,

定義 (G, V) が 概均質ベクトル空間 (prehomogeneous vector space) であるとは, $\exists v_0 \in V$ があつて Gv_0 が

V の open set になっていること. 以下では省略して P.V. と

書く.

f を V 上の, 恒等的には零でない多項式

ϕ を G から $\mathbb{C}^\times$ への準同型, (こういうのを G の character

(指標) という)

このとき,

定義 f が ϕ に対応する 相対不変式であるとは

$\forall g \in G, \forall u \in V$ に対して $f(gu) = \phi(g)f(u)$ となること
で, このとき $f \leftrightarrow \phi$ と略記する.

Lemma $f_1 \leftrightarrow \phi, f_2 \leftrightarrow \phi$ なら $f_1 = f_2 \times \text{constant}$.

$$\therefore \begin{cases} f_1(gu_0) = \phi(g)f_1(u_0) \\ f_2(gu_0) = \phi(g)f_2(u_0) \end{cases} \text{ より } \frac{f_1}{f_2}(gu_0) = \frac{f_1}{f_2}(u_0) = c$$

即ち $\frac{f_1}{f_2} \equiv c$ on Gu_0 . しか Gu_0 は open set で

open set 上 定数となる有理関数は定数, 即ち

$$f_1 = c f_2 \quad //$$

これは 簡単な Lemma だが 概均質ベクトル空間の理論
の基礎となるものである。

$V^\vee \equiv V$ の dual space とすると G は 自然に $V^\vee$ に
作用しますが, このとき, 次のことが知られている。

① $(G, V^\vee)$ は P.V.

② $f^\vee \leftrightarrow \phi^{-1}$ とする 相対不変式 $f^\vee$ が $V^\vee$ 上存在する

$$\text{そこで } f \leftrightarrow \phi \text{ より } f^s \leftrightarrow \phi^s$$

$$\text{よって } f^{s+1} \leftrightarrow \phi^{s+1}, f^\vee \leftrightarrow \phi^{-1} \text{ となっているから}$$

f^{s+1} と f^v を 適当に くみあわせて ϕ^s と 対応する

相対不変式 が 得られそうだが, そうすれば f^s と 同じ ϕ^s と 対応するから, それらの間に 何か 関係式 が 得られるだろう.

実際 $f^v(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}) f(x_1, \dots, x_n)^{s+1}$ が ϕ^s に 対応する

相対不変式 で 従って $s \in \mathbb{N}$ のとき

$= b(s) f(x_1, \dots, x_n)^s$ と なる s に 依存する 定数 $b(s)$ が 存在

する. しかし $\frac{\partial}{\partial x_i} f^{s+1} = (s+1) f^s \frac{\partial f}{\partial x_i}$ 等 ゆえ $b(s)$ は

s の 多項式 で 与ければ いけよう.

$$b(s) = b_0 s^d + b_1 s^{d-1} + \dots + b_d \in \mathbb{C}[s]$$

これを b -関数 という.

例) $G = GL_1(\mathbb{C}) \times SO_n(\mathbb{C}) \ni (t, g)$

$$V = \mathbb{C}^n \ni v$$

作用 を $(t, g)v = t(gv)$ と する (gv は 行列
の 積, t は スカラー倍) このとき,

$$f(x_1, \dots, x_n) = f^v(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2 \text{ と おく}$$

これが 相対不変式 で

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^2 \right) (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{s+1}$$

$$= 4(s+1)(s+\frac{n}{2})(x_1^2 + \dots + x_n^2)^s //$$

これは直接計算すればすぐに出てくる。例えばゲルファント
 シーロフの超関数のホミ卷では、こういう関係式を使
 使って超関数の構成とか、あるいは微分方程式の基本解
 の構成とかを系統だててやっている、即ちこの b -関数を使
 使って系統だててやっており b -関数というのは解析的に
 重要な不変量であり、更に整数論や表現論にも
 概均質ベクトル空間の理論が応用されるが、そこでも
 b -関数が色々なところで表われてくる。そのように
 重要な不変量であるから是非とも計算したい。

実は $f, f^\vee$ が具体的にわかってても $b(\lambda)$ を計算する
 のは難しい。むしろ上記のようにすぐ計算できるのは
 例外中の例外である。

そこで b -関数を求めるアルゴリズムがほしいが
 M. Sato - M. Kashiwara - T. Kimura - T. Oshima の 1980 年
 の Inv. Math. の論文で $b(\lambda)$ を求めるアルゴリズムが与え
 られている。これはいわゆる超局所解析を用いて
 $b(\lambda)$ を計算するアルゴリズムで、これを用いて

実際には b -関数 が色々な場合に計算されている。

例えば、アルゴリズム が 確立する 以前に 佐藤幹夫、
新谷卓郎氏 等により 既に計算されている 場合もあり

今 引用した SKKO でも 実例 が 計算されているし

木村さんも 沢山 計算しているし、室さん、尾関育三さん、
笠井さん、... など 沢山の人によって 計算されている。

このアルゴリズム が 万能で すべて 計算できれば、それで
話は 終わるのですが、残念な かな 万能では なく

(既約正則 R.V. の ちかて) 一例 だけ 計算できない
ものがある。この例 というのは

$$(*) \quad G = GL_5 \times GL_4$$

$$V = \{(X_1, X_2, X_3, X_4) : X_i \text{ は } 5\text{次交代行列}\}$$

で 作用は、

$$g \in GL_5 \text{ は } (X_1, X_2, X_3, X_4) \mapsto (gX_1{}^tg, \dots, gX_4{}^tg)$$

$$g \in GL_4 \text{ は } (X_1, \dots, X_4) \mapsto (X_1, \dots, X_4) {}^tg$$

例えば

$$g = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (X_1, \dots, X_4) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \alpha & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = (X_1 + \alpha X_2, X_2, X_3, X_4)$$

f も $f^\vee$ も具体的に求まる.

$\deg f = \deg f^\vee = 40$, $\dim V = 40$ ゆえ $f, f^\vee$ は
40変数40次斉次多項式である.

素朴な計算で b -関数を求めようとするとき計算量
が $40!$ をはるかにこえる.

計算量 $\gg 40! \sim 10^{48}$

これでは大変すぎて誰もやりたくないと思われる.

ここで b -関数について尾関育三氏の予想がある

予想 (I. Ozeki)

$$b(\lambda) = (\lambda+1)^8 \left[(\lambda+\frac{2}{3})(\lambda+\frac{4}{3}) \right]^4 \cdot \left[(\lambda+\frac{3}{4})(\lambda+\frac{5}{4}) \right]^4 \\ \left[(\lambda+\frac{5}{6})(\lambda+\frac{7}{6}) \right]^4 \cdot \left[(\lambda+\frac{7}{10})(\lambda+\frac{9}{10})(\lambda+\frac{11}{10})(\lambda+\frac{13}{10}) \right]^2$$

何もかもきわめて具体的に求まっており, しかもこの一例
だけわかっているのだから, 方法の純粋さとか無視して
どんな手を使っても求めることを考える. そこで b -関数
についてわかってることをまとめれば, この予想について
何かわかるのではないかと, というのがこの話です.

$d = \deg f$, $n = \dim V$ とする. (今の場合は $d = n = 40$ であるが, 少し一般に書いておく)

$$1. \quad b(s) = b_0 \prod_{j=1}^d (s + \alpha_j), \quad \alpha_j \in \mathbb{Q}, \alpha_j > 0$$

(これは広中の特異点解有理論と D-module の一般論を用いて 柏原正樹氏が証明した)

$$2. \quad b(-s - \frac{n}{d} - 1) = (-1)^d b(s)$$

あるいは

$$\left\{ \frac{n}{d} + 1 - \alpha_j \right\}_{1 \leq j \leq d} = \{ \alpha_j \}_{1 \leq j \leq d} \quad \text{ともいえる.}$$

これは 佐藤幹夫氏自身によるかなりはやい時期からわかって
いた結果です.

$$3. \quad b^{\exp}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^d (t - \exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha_j))$$

とかく. $\exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha_j)$ は 1 の巾根 ($\alpha_j > 0, \alpha_j \in \mathbb{Q}$)

で $\alpha_j - \alpha_i \in \mathbb{Z}$ なら $\exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha_j) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha_i)$

ゆえ $b^{\exp}(t)$ は $b(s)$ より情報量が少なくていい

あえてこれを考えると, $b^{\exp}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ が

一般的に証明できる.

これは

vanishing cycle sheaf の monodromy に関する
代数的な議論を必要とする.

★ d, n が与えられたとき 1, 2, 3. をみたす多項式
は有限個しかない.

∴) $\alpha_j \in \mathbb{Q}$ ゆえ $\alpha_j = \frac{l_j}{k_j}$, k_j, l_j は互いに素な

自然数, とかける. すると $\exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha_j)$ は k_j 乗
して初めて 1 になる 1 の中根 ゆえ

$$\# \{ \exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha_j) \text{ の } \mathbb{Q} \text{ 上の代数共役全体} \} = \varphi(k_j)$$

となる. φ は Euler の関数である.

$$b^{\exp}(t) \in \mathbb{Z}[t] \quad \text{かつ} \quad b^{\exp}(\exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha_j)) = 0$$

ゆえ $\exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha_j)$ の代数共役も $b^{\exp}$ の根である.

$$\text{従って} \quad d = \deg b^{\exp} \geq \varphi(k_j)$$

ところが Euler 関数 $\varphi(k)$ は $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(k) = \infty$

従って ($d = \text{given}$ ゆえ) k_j の可能性は有限個しかない.

一方 $0 < \alpha_j$, $0 < \frac{n}{d} + 1 - \alpha_j$ (1 と 2) ゆえ

$$0 < \alpha_j = \frac{l_j}{k_j} < \frac{n}{d} + 1 \quad \therefore l_j \text{ の可能性も有限個} //$$

4. $f, f^\vee$ は $\mathbb{Z}$ -係数にとれる.

そうすると $b(1) \in \mathbb{Z}[\lambda]$ とある. これは簡単なこと
だが すごく大事なことです. (解析の人は $\mathbb{Z}[\lambda]$ でも
 $\mathbb{R}[\lambda]$ くらいにしか 考えない傾向がある)

5. $\mathbb{F}_q$ を q 個の元をもつ有限体とする.

$\text{Hom}(\mathbb{F}_q^\times, \mathbb{C}^\times)$ は $(q-1)$ 次の巡回群ということか
知られているから $\frac{1}{q-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ と同型である.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(\mathbb{F}_q^\times, \mathbb{C}^\times) & \xrightarrow[\text{fix}]{} & \frac{1}{q-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \chi_\alpha & \longleftrightarrow & \alpha \end{array}$$

この同型を 1 つ fix して $\alpha \in \frac{1}{q-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ に対応する

$\text{Hom}(\mathbb{F}_q^\times, \mathbb{C}^\times)$ の元を χ_α とかく.

但し $\chi_\alpha(0) = 0$ とおく.

χ_α に f を代入すると $\chi_\alpha(f)$ は $V(\mathbb{F}_q)$ 上の
 $\mathbb{C}$ -valued function とある. (f は $\mathbb{Z}$ -係数ゆえ

$V(\mathbb{F}_q) \cong \mathbb{F}_q^n$ 上の関数 とみなせる)

この有限体上のフーリエ変換 $\hat{f}(\chi_\alpha(f))$ を考えると

これは $V(\mathbb{F}_q)$ 上の $\mathbb{C}$ -valued function にある.

有限体上の フーリエ変換 というのは, $\exp$ のかわりに
和を積にうつす character を使って定義するが, ここでは
省略する。

$$m(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \# \{ 1 \leq j \leq d \mid \alpha_j + \alpha \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}} \}$$

とかく. そうすると, 次のことが知られている.

$v^\vee \in V^\vee(\mathbb{F}_q)$ が $f^\vee(v^\vee) \neq 0$ をみたすとき,

$$|\mathcal{F}(\chi_\alpha(f))(v^\vee)| = q^{-\frac{1}{2}m(\alpha)} \quad \text{と成る.}$$

これは Deligne による Weil conjecture の証明を用いる.

この論文は そのうち書きます.

6. 今の例(*)の場合,

$\mathcal{F}(\chi_\alpha(f))(v^\vee)$ ($\alpha=0, \frac{1}{2}$ のときのみ) が

Lie 型の有限単純群の character table の中に
あらわれ, 表現論的手法で計算できる (川中宣明氏)

よって(*)の場合, $f^\vee(v^\vee) \neq 0$ での $|\mathcal{F}(\chi_\alpha(f))(v^\vee)|$

が二通りに計算できて, それを比べて $m(\alpha)$ が求

まる ($\alpha=0, \frac{1}{2}$ のとき). これにより

$$\# \{ j \mid \alpha_j \in \mathbb{Z} \} = 8, \quad \# \{ j \mid \alpha_j \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z} \} = 0$$

が得られる。

今の場合, $0 < \alpha_j < \frac{\eta}{d} + 1 = \frac{40}{40} + 1 = 2$

従って $\alpha_j \in \mathbb{Z}$ ($0 < \alpha_j < 2$) $\Leftrightarrow \alpha_j = 1$

従って $h(\lambda)$ の $(\lambda+1)$ の因子は丁度 $(\lambda+1)^8$ であることがわかる。これは尾関予想を support している。

$\alpha_j \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ ($0 < \alpha_j < 2$) $\Leftrightarrow \alpha_j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

従って $h(\lambda)$ には $(\lambda + \frac{1}{2})$, $(\lambda + \frac{3}{2})$ の因子は表われない。

これも尾関さんの予想を support している。即ち

$$b(\lambda) = (\lambda+1)^8 \left[(\lambda + \frac{1}{2}) \right]^0 \left[(\lambda + \frac{3}{2}) \right]^0 \times \dots$$

確定

$$7. \quad b(\lambda) = b_0 \lambda^d + b_1 \lambda^{d-1} + b_2 \lambda^{d-2} + \dots + b_d$$

であったが, b_0 は計算しやすい。 b_1 はまあまあ計算しやすい。 b_2 はもう少し難しくなる。 b_d はとても難しい。

(*) の場合,

$$b_0 = 2^{56} 3^{24} 5^{10} \quad (\text{阪大の村上順氏, 1984.8.20})$$

($f, f^\vee$ が $\mathbb{Z}$ -係数で $\mathbb{Z}$ 上既約としたとき)。

$$b_1 = 40 b_0 = 2^{59} 3^{24} 5^{11}, \quad \text{これは } b_0 \text{ がわかれば}$$

b_1 は $40b_0$ として自動的に得られ、何の新しい情報も与えていない。

b_2 も計算可能。是非誰かにやってほしい。

例えば b_0 は $f'(grad \log f(u)) = b_0^{-1} f(u)^{-1}$ として計算するが、 $b_1, b_2, \dots$ も同じような idea で表示式が得られる。但し大きな行列を計算しなければならぬ。

それでは話が通まないなので、次は

尾関壽三さんの予想が正しいと仮定しよう。そのとき、

$$(\#) \quad b_2 = 2^{54} 3^{22} 5^9 \cdot 281 \cdot 499 \quad \text{となる.}$$

実は $(\#) \Rightarrow b(1)$ の可能性が 7通り、

ここまでくれば あと一押し という感じ。

最後の「一押し」に関する予想をいつ。

$$8. \quad G = \text{単純代数群} / \mathbb{C}$$

$$\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$$

$N \in \mathfrak{g}$ を nilpotent element とする。

$$N \longrightarrow \text{P.V.} \quad \text{という理論がある.}$$

Dynkin-Kostant 理論

nilpotent element は表現論で非常に重要な

対象になっていて、例えば nilpotent element に対して
 springer 表現 というものが対応して、この springer 表現が
 最近の有限 Chevalley 群の表現論の展開の一つの大きな
 基礎になっているわけです。

nilpotent element というのは、すごく調べにくくて、
 Dynkin-Kostant 理論を用いて その研究を P.V. の
 ところにもちこんでくる。但し P.V. のすべてかできてくわけに
 はない。

$P.V. \rightarrow b_N(s) \rightarrow b_N^{\text{exp}}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ しかも根は
 1 の中根ゆえ $b_N^{\text{exp}}(t)$ は 円分多項式の積になる。

幸甚ことに今考えてる P.V. (*) は $G = E_8$ の中に
 一つだけすごく難しい nilpotent element N があって
 これか、今考えているとてつもなく難しい P.V. (*) に

Dynkin-Kostant 理論により対応している。

N に対応する b -関数を $b_N(s)$, $b_N^{\text{exp}}(t)$ 等と書く。

$$C_N \stackrel{\text{def}}{=} \{ g \in G \mid \text{ad}(g)N \stackrel{\text{def}}{=} gNg^{-1} = N \}$$

$|G(\mathbb{F}_2)| = 4(2)$ とする ある多項式 φ があるか、

$|C_N(\mathbb{F}_q)| = \varphi_N(q)$ とする $\mathbb{Z}$ -係数 / 変数多項式 φ_N がある。しかも φ も φ_N も $t^p \times$ 円分多項式の積 ($\exists p$) と表わせることが知られている。

予想 (##) $b_N^{\exp}(t) \varphi_N(t) \mid \varphi(t)$

尾関予想を仮定すれば成立するし、他の既知 P.V. ではすべて成立している。他に可約な P.V. でも いくつかやるとみた成立している。表現論からするとこれは解群可能です (Harish-Chandra の微分方程式と P.V. になっている相対不変式のみたす微分方程式を同じしく組んでとらえて解群の可能性みちみている)

(*) の場合,

$\varphi_N = \text{constant}$, である。

$\phi_n = n$ th cyclotomic polynomial とすると

$$\varphi(t) = t^{120} \boxed{\phi_1^8} \phi_2^8 \boxed{\phi_3^4} \boxed{\phi_4^4} \phi_5^2 \boxed{\phi_6^4} \phi_7 \phi_8^2 \phi_9 \\ \boxed{\phi_{10}^2} \phi_{12}^2 \phi_{14} \phi_{15} \phi_{18} \phi_{20} \phi_{24} \phi_{30}$$

$$\text{尾関予想} \Rightarrow b_N^{\exp}(t) = \phi_1^8 \phi_3^4 \phi_4^4 \phi_6^4 \phi_{10}^2$$

従って $b_N^{\exp}(t) \mid \varphi(t)$ であるが、ヒタヒタとわっている。

実は 尾関予想 $\iff (\#), (\#\#)$ と変る.