

連続体の関数空間

大阪教育大学 小山 晃 (Akira Koyama)

ここで考える空間はすべて連続体 (= continuum = compact connected metric space) とする。連続体 X からのすべての実数値連続関数全体の集合に各点収束の位相をいれた空間を、 $C_p(X)$ と表わす。

$C_p(X)$ について Pavlovskii [] の興味ある結果を示している。

定理 1. (1) 連続体 X, Y について, $C_p(X) \cong C_p(Y)$ ならば,

$\dim X = \dim Y$, ここで $\cong$ は linear isomorphic であることを表わす。

(2) 有限多面体 P, Q について, $C_p(P) \cong C_p(Q)$ である必要十分条件は, $\dim P = \dim Q$ であることである。

(3) 2次元連続体 (実際 Pontryagin の連続体) B で, $C_p(B) \not\cong C_p(I^2)$ であるものがある。

ここでは、この結果を動機として次のような問題を考えたい。得られた結果は、岡田 順直 (香川大教育) との協同研究に

よるものである。

問題 1. 任意の n -次元 ANR X について $C_p(X) \triangleq C_p(I^n)$ か?

定理 1 (2) から考えれば自然な発想と思われるが、Borsuk [1, Theorem VI (6.1)] によって否定的に解けることもわかる。ただし、1次元連続体については、次のようにもわかる。

定義: 空間 X の点 p について $\text{ord}_p X \leq n$, であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、open subset U of X

st. $p \in U$, $\text{diam}[U] < \varepsilon$ かつ $\text{card}(\text{Bd}(U)) \leq n$

が存在するをいう。

$\text{ord}_p X \geq 3$ である点 $p \in X$ を分岐点という。また、分岐点全体の集合を $R(X)$ と表すことにする。

定理 2. 1次元 AR (= dendrite) X について $\text{card}(R(X)) < \aleph_0$ ならば、 $C_p(X) \triangleq C_p(I)$ である。

系. 1次元 ANR X に対して、連続体 $Y \subset X$

st. $Y \supset R(X)$ かつ $\text{card}(R(Y)) < \aleph_0$

が存在するならば、 $C_p(X) \triangleq C_p(I)$ である。

これまでの結果から、系の逆が成り立つと思われるが、是非、確か
らう。出来るか。

問題 2. 1次元 ANR X について、 $C_p(X) \trianglelefteq C_p(I)$ ならば、

連続体 $Y \subset X$ st. $R(X) \subset Y$ かつ $\text{card}(R(Y)) < \aleph_0$ が必要か？

連続体 X について、 $C_p(X) \trianglelefteq C_p(I^n)$ ならば、 X は locally connected であると思われるかもしれないが、the $\sin \frac{1}{x}$ -curve, the Warsaw circle 等があるので、1次元に限っても、 X の local connectivity は争たれない。特に、次のような class を指定できる。

定理 3. 連続な全単射 $f: [0,1] \longrightarrow X$ が必要とする連続体 X について、 $C_p(X) \trianglelefteq C_p(I)$ が成り立つ

よって、次のような問題が自然に名えられる。

問題 3. $C_p(X) \trianglelefteq C_p(I^n)$ となる n 次元連続体 X を特徴づけよ。

定義: 空間 X が locally contractible at a point p of X であるとは、

任意の nbhd U of p in X に対して、

nbhd V of p in U st. V が contractible in U である

が存在する二をいう。

また、 $LC(X) = \{x \in X \mid X \text{ は locally contractible at } x \text{ である}\}$ とする。

この概念を用いて、問題3の部分解は次のように得られる。

定理4. $\dim_x X = n$ とする点 $x \in X$ を dense に含む n -次元連続体 X について、 $C_p(X) \cong C_p(I^n)$ ならば、 $LC(X)$ は dense in X である。

特に、1次元の場合に限れば、 I を含むもう少し大きな class について簡単な判定条件が得られる。

定義. 連続体 X が finitely Suslinian であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、直径が ε より大きな互いに交わらない X の部分連続体は、高々有限個しか存在しない二をいう。

定義. 空間 X が locally connected at a point p of X であるとは、任意の nbhd U of p in X に対して、connected open nbhd V of p in U が存在する二をいう。

また、 $L(X) = \{x \in X \mid X \text{ は locally connected at } x \text{ である}\}$ とする。

定理5. 1次元連続体 X について、finitely Suslinian である連続体 Y で、 $C_p(X) \cong C_p(Y)$ となるものが存在するならば、 $L(X)$ は dense in X である。

定理4, 定理5 を用いると, 互いに異なる関数空間をもつ同次元連続体
 か, Pontryagin のもののような複雑なものではなく, 視覚的な範囲で, 容易
 に構成する二つが得られる。また, snake-like 連続体でも。

$I = [0, 1]$, the Knaster continuum, the pseudo-arc
 など, 互いに異なる関数空間をもつ二つが得られる。

二つまでは, 連続体について考えてみたが, Pavlovskii [1] 自
 身は, 定理1(1)を non-compact, non-metrizable case でも証明している。この
 ような場合, 定理1(2)は おもしろい問題を与えるだろう。あるいは,

問題4. (局所有限な可算)無限多面体 P, Q について, $\dim P = \dim Q$
 ならば, $C_p(P) \triangleq C_p(Q)$ か?

References

- [1] K. Borsuk, Theory of Retracts, Monografie Mat. PWN, 1967
- [2] D. S. Pavlovskii, On spaces of continuous functions, Soviet Math. Dokl.
 22(1980), 34-37.