

Generic 拡大における射影集合の規則性に 関連したいくつかの問題

藤田 博司 (Hiroshi Fujita)

愛媛大学理学部 (Faculty of Science, Ehime University)

表題にいう“規則性”とは、記述集合論で点集合族の regularity property と呼ばれている性質のことを意味している。典型的な規則性の例としては、ルベグ可測性、ベールの性質、完全集合の性質 (可算であるかまたは完全集合を含む) などがある。ここでは、すべての半順序集合によるすべての generic 拡大において、すべての Σ_n^1 集合がこれらの性質をもつ、という仮説の強さを、含意および無矛盾性の比較の両方の意味で考えてみる。

定義 1. 次の命題を (C) と表記する:

“任意の実数 r について、 $\omega_1^{L[r]}$ は可算順序数である。”

式で書けば

$$(C) \equiv (\forall r \in \mathbb{R}) [\omega_1^{L[r]} < \omega_1]. \quad \square$$

よく知られているとおり、この命題はいろいろと同値な書き換えができる。

定理. (Solovay, [6], [1] Theorem 25.38, [2] 定理 14.10) (C) は次の命題の各々と同値である。

- (1) 不可算な Π_1^1 集合は完全集合を含む。
- (2) 不可算な Σ_2^1 集合は完全集合を含む。
- (3) 一つの実数に相対的に構成可能な実数は高々可算個である:

$$(\forall r \in \mathbb{R}) [|\mathbb{R}^{L[r]}| = \omega].$$

- (4) すべての実数 r について、 $(V$ の) ω_1 は $L[r]$ において到達不可能基数である。 $\square$

この (4) によって、(C) の無矛盾性の強さは到達不可能基数の存在の無矛盾性と等価かそれより強い。実際に (C) の無矛盾性が到達不可能基数の無矛盾性と等価であることは次のことからわかる。 κ が強到達不可能基数であるとして、Lévy の半順序 $Lv(\omega, \kappa)$ を考えると、 $\Vdash [(\kappa = \omega_1) \wedge (C)]$ である ([7])。

このように、(C) は記述集合論の観点から見て興味深い命題であるが、無矛盾性の意味ではそれほど強い命題ではない。

一方、強制法による generic 拡大において常に (C) が成り立つという命題を考えると、これは (C) より真に強い命題になる。

定義 2. “任意の半順序集合による任意の generic 拡大において (C) が成立する” という命題を $(\hat{C})$ と表記する。 $\square$

(C) と $(\hat{C})$ が同値でないことはすぐにわかる。次の補題の証明で、 $\text{Coll}(\omega, \kappa)$ とは ω の有限部分集合から κ への関数の全体がなす半順序集合で、いわゆる “ κ を潰す強制法” に対応するものである。

補題 1. 到達不可能基数の存在が矛盾しないかぎり、 $(C) + \neg(\hat{C})$ も矛盾しない。したがって、それ自身が矛盾しないかぎり、(C) は $(\hat{C})$ を含意しない。

[証明] κ が L の到達不可能基数とし、 G を L 上の $\text{Lv}(\omega, \kappa)$ -generic フィルターとする。このとき $L[G]$ で (C) が成立する。つぎに、 H を $L[G]$ 上の $\text{Coll}(\omega, \kappa)$ -generic フィルターとする。 $L[G][H]$ においては $\text{Lv}(\omega, \kappa) \times \text{Coll}(\omega, \kappa)$ は可算集合だから、generic フィルター $G \times H$ は一つの実数 r でコードされ、 $L[G][H] \models (V = L[r])$ が成立する。このことから $L[G][H] \models \neg(C)$ 、したがって $L[G] \models \neg(\hat{C})$ となる。 $\square$

同じ理由により、 L に属する半順序集合による L の generic 拡大においては $(\hat{C})$ は成立しない。この線に沿って考察をさらに推し進めると、次のことがわかる。

定理. $(\hat{C})$ から $\text{Det}(\Pi_1^1)$ すなわち Π_1^1 集合にかんする決定公理が導かれる。

[証明] κ を任意の不可算基数としよう。 $\text{Coll}(\omega, \kappa)$ は、 ω から κ の上への generic な写像を添加することにより、 κ が可算順序数になることを強制する。またこの半順序のサイズは κ であるから、 κ より大きな基数はすべてこの強制によって保存される。したがって $\text{Coll}(\omega, \kappa) \Vdash [\omega_1 = \kappa^+ = (\kappa^+)^V]$ である。いっぽう、もしも $(\hat{C})$ が主張するとおりに $\text{Coll}(\omega, \kappa)$ が (C) を強制するとしたら、generic 拡大における ω_1 すなわち $(\kappa^+)^V$ は L の到達不可能基数になっているはずだ。したがって $(\kappa^+)^L < (\kappa^+)^V$ である。ここで、 κ は任意の不可算基数であった。とくに κ として特異基数 $\aleph_\omega$ をとれば、Jensen の被覆定理によって、 V には $0^\sharp$ が存在することがわかる ([1] Corollary 18.32)。他の実数 r についても同様に $r^\sharp$ が存在することがわかる。したがって、Martin の定理 ([2] 定理 31.2) により、 $\text{Det}(\Pi_1^1)$ が成立する。 $\square$

系。 $(\hat{C})$ は “任意の半順序集合による任意の generic 拡大において $\text{Det}(\Pi_1^1)$ が成立する” という命題と同値である。 $\square$

[証明] もしも V において $(\check{C})$ が成立していれば、任意の半順序集合による generic 拡大 $V[G]$ においても、やはり $(\check{C})$ が成立するので、定理により $V[G]$ において $\text{Det}(\Pi_1^1)$ が成立する。いっぽう、決定公理にかんする基本的な結果のひとつとして、 $\text{Det}(\Pi_1^1)$ は上記 Solovay の定理の (1) を含意する ([3] Section 6A). したがって、 $\text{Det}(\Pi_1^1)$ は (C) を含意する。したがって、すべての generic 拡大において $\text{Det}(\Pi_1^1)$ が成立するという仮定から、 $(\check{C})$ が導かれることになる。□

しかしながら、 $(\check{C})$ の無矛盾性の強さは「ものすごく強い」というほどのものでもなく、ラムゼイ基数 ([2] 第 2 章 7 節) の存在の無矛盾性より弱いことが次の補題からわかる。

補題 2. κ がラムゼイ基数であれば $V_\kappa \models (\check{C})$ となる。

[証明] ラムゼイ基数の存在は $\text{Det}(\Pi_1^1)$ を含意する。したがってそれはまた (C) を含意する。いっぽう、 V_κ に属する半順序集合による generic 拡大においては κ は依然としてラムゼイ基数である。□

問題 1. $(\check{C})$ の無矛盾性の強さは正確にはどのくらいか? □

定義 3. “任意の Σ_n^1 集合はルベグ可測である” という命題を $\text{LM}(\Sigma_n^1)$ と表記する。“任意の半順序集合による任意の generic 拡大において $\text{LM}(\Sigma_n^1)$ が成立する” という命題を $\text{GLM}(\Sigma_n^1)$ と表記する。□

(C) は $\text{LM}(\Sigma_2^1)$ を含意する ([1] Corollary 26.21). したがって、 $(\check{C})$ は $\text{GLM}(\Sigma_2^1)$ を含意する。いっぽう、Martin の公理 MA のもとで $\text{LM}(\Sigma_2^1)$ が成立し ([1] Corollary 26.42), しかも MA と $\omega_1 = \omega_1^L$ とは両立する ([1] Theorem 16.13) ので、 $\text{LM}(\Sigma_2^1)$ からは (C) が導かれない。しかしながら、本来はまったく強さの違う (C) と $\text{Det}(\Pi_1^1)$ が、“任意の generic 拡大で成立” という条件をつけることにより、同値な命題に変換される、ということを考えると、 $\text{GLM}(\Sigma_2^1)$ と $(\check{C})$ とを比較することにも意味がある。

問題 2. $\text{GLM}(\Sigma_2^1)$ から $(\check{C})$ は導かれるか? □

“ $\text{GLM}(\Sigma_2^1)$ が $(\check{C})$ を含意する” という命題 (予想) を少し強い形に言い換えると、次の問題が得られる。

問題 2'. $\omega_1 = \omega_1^L$ のとき、 $\neg \text{LM}(\Sigma_2^1)$ を強制するような半順序集合が存在するだろうか? □

上記の問題 2 で、 Σ_2^1 を Σ_3^1 に置き換えると、話が「逆転」する。すなわち、 $\text{LM}(\Sigma_3^1)$ が (C) を含意し (Shelah, [5], [4], [1] Theorem 32.13), したがって

$\text{GLM}(\Sigma_3^1)$ が $(\check{C})$ を含意する. いっぽう, $(\check{C})$ から $\text{GLM}(\Sigma_3^1)$ は導かれないことが, 次のようにしてわかる.

補題 3. 可測基数の存在が矛盾しないかぎり, $(\check{C}) + \neg \text{LM}(\Sigma_3^1)$ も矛盾しない.

[証明] κ を可測基数, U を κ 上の正規超フィルターとする. このとき, $L[U]$ において κ は可測基数, したがってラムゼイ基数である. 補題 2 によって, このとき $(V_\kappa)^{L[U]} \models (\check{C})$ である. いっぽう, $L[U]$ においては $\mathbb{R}$ を整列順序づけする Δ_3^1 順序関係が存在する (Silver, [1] Theorem 32.20, [2] 定理 20.18). したがって, ルベーク不可測な Δ_3^1 -集合が存在するから, $(V_\kappa)^{L[U]}$ においては $\text{LM}(\Sigma_3^1)$ は成立しない. $\square$

このように, $\text{GLM}(\Sigma_3^1)$ は $(\check{C})$ より真に強い仮説である. この仮説を含意する巨大基数公理としては, “順序数全体のクラスの中に非有界にウデイン基数が存在する” を考えればよい ([2] 第 6 章 32 節, [1] Part III Section 33). しかし, $\text{GLM}(\Sigma_3^1)$ と比較して, これはあまりにも強すぎるように思われる.

問題 3. $\text{GLM}(\Sigma_3^1)$ の無矛盾性の強さは正確にはどのくらいか? たとえば $0^\sharp$ の存在 ([2] 第 4 章 21 節, [1] Part II Section 19) は $\text{GLM}(\Sigma_3^1)$ から導かれるだろうか? $\square$

参考文献

- [1] T. Jech, “Set Theory” The 3rd Millenium Edition, Springer, Berlin, 2003.
- [2] A. カナモリ (渕野昌 訳), “巨大基数の集合論”, シュプリンガー・フェアラーク, 東京, 1998.
- [3] Y.N. Moschovakis, “Descriptive Set Theory”, North-Holland Publ., Amsterdam, 1980.
- [4] J. Raisonier, *A mathematical proof of S. Shelah’s theorem on the measure problem and related results*, Israel J. Math. **48**, pp.48–56, 1984.
- [5] S. Shelah, *Can you take Solovay’s inaccessible away?* Israel J. Math. **48**, pp.1–47, 1984.
- [6] R.M. Solovay, *On the cardinality of Σ_2^1 sets of reals*, “Foundations of Mathematics, Symposium Commemorating Kurt Gödel, Columbus Ohio, 1966”, Springer, New York, 1969.
- [7] R.M. Solovay, *A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable*, Annals of Math., **92**, 1–56, 1970.