

乱流境界層の数値計算

水野 吉規, M. Simens, S. Hoyas*, J. Jimenéz

E. T. S. Ingenieros Aeronáuticos, Universidad Politécnica de Madrid, Spain

* E. T. S. d'Enginyeria, Universitat de València, Spain

1 はじめに

一様等方性乱流やチャネル乱流などと同様に, 乱流境界層の研究においても直接数値計算 (DNS) が果たす役割は大きいと期待されるが, これが実施された例は比較的少ない. 乱流境界層の数値計算では, 流れが層流から遷移を経て乱流に発展するまでのすべての区間を計算することは現実的ではなく, 遷移区間から充分に下流の区間のみを計算することを考えるが, そこで最も大きな問題となるのは, 上流側の流入条件の与え方である. Spalart[1] は流れの相似性を利用して流れ方向に周期境界条件が適用できるようにスケール変換をすることにより, 高レイノルズ数の乱流境界層の数値計算を行った. しかし, これは流れ方向に非常に狭い領域での計算をしていることに相当し, 境界層の空間発展を流れの基礎方程式に忠実に再現しているわけではない. その後, Lund ら [2] は Spalart のアイデアを応用して, 下流のある場所での速度場から上流側の流入条件を生成する方法を提案した. 最近では, この手法を用いた高レイノルズ数の乱流境界層の直接数値計算が実施されている. [3]

上で述べた Spalart や Lund らの手法は流れの相似性を利用したものであるが, 相似則の成り立たない境界層に対しても適用できる汎用的な手法としては, Spalart と Coleman による fringe method [4] がある. この手法により, 遷移や剥離を伴う境界層の数値計算も行われている. [5, 6]

ここでは, 流入条件に Lund らの手法を用いた乱流境界層の DNS による乱れの統計の解析結果について述べる. また, チャネル乱流との比較も行う.

2 数値計算

2.1 方程式と境界条件

ここでは, 滑らかな平板上の乱流境界層を考え, 以下の非圧縮性流体に対する連続の式と Navier-Stokes 方程式を数値的に解いた.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\text{grad } p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (2)$$

ここで, $\mathbf{u}$ は流速, p は圧力, ν は動粘性係数である. 流れ方向を x 軸, 壁垂直方向を y 軸とするデカルト座標系 (x, y, z) を用い, それぞれの方向の速度成分を, u, v, w とする. 壁垂直方向の境界条件として以下を与える.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{0} & \text{at } y &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial y} = 0, v = v_{top} & \text{at } y &= L_y. \end{aligned} \quad (3)$$

壁から遠方 $y = L_y$ における v に対する条件 v_{top} については後に述べる。上流側境界 $x = 0$ に対する流入境界条件には Lund らの手法 [2] を適用した。この境界条件についても、後に概略を述べる。下流側境界 $x = L_x$ に対する境界条件には移流条件を用いた。また、スパン方向には周期境界条件を適用した。

ここで、流れのスケールについて述べる。流速の代表的なスケールとしては、壁から無限遠方における流れ方向の平均流速 U_e と以下で定義される壁摩擦速度 u_τ

$$u_\tau = \left(\nu \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=0} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

がある。ここで U は u の平均を表す。長さスケールとしては、 U が $0.99U_e$ に達する高さとして定義される境界層厚さ δ と粘性底層厚さ ν/u_τ がある。これらはそれぞれ境界層における乱れの最大および最小の長さスケールとみなすことができる。また、 u_τ と ν/u_τ は壁付近の粘性が支配的な領域における流れの代表的スケールとして wall unit と呼ばれる。以上のスケールはすべて x に依存する。各 x において流れの自由度の大きさを表すレイノルズ数としては以下のものがある。

$$Re_\tau = \frac{u_\tau \delta}{\nu}, \quad (5)$$

$$Re_\theta = \frac{U_e \theta}{\nu}, \quad \theta = \frac{1}{U_e^2} \int_0^\infty U(U_e - U) dy. \quad (6)$$

式 (5) で定義されるレイノルズ数 Re_τ は、乱れの最大および最小の長さスケールの比である。もう一方の、運動量厚さ θ から定義されるレイノルズ数 Re_θ は一般にチャネル乱流、乱流境界層のレイノルズ数としてよく用いられているが、以下ではチャネル乱流との比較に適していると思われる Re_τ を用いることにする。

ここでは、ゼロ圧力勾配の境界層の DNS を行った。すなわち、 $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ （ここで、 P は圧力 p の平均を表す）である。この場合、境界層の外側では近似的に、

$$\frac{v}{u} = \frac{d\delta}{dx}, \quad (7)$$

が成り立つ。境界層厚さ δ は経験的に $\sim x^{(n-1)/n}$, $n = 5 \sim 9$ でよく近似できることが知られているので、計算領域中においては式 (7) の左辺は定数であるとみなし、 v の壁遠方における境界条件として $v_{top} = \alpha u(y = L_y)$ を与えた。係数 α は他のデータから見積もられた値を用いた。

流れ方向と壁垂直方向の離散化にはコンパクト差分、スパン方向にはフーリエ・スペクトル法を用いた。時間発展は、移流項と粘性項のうち x と z についての微分の項は陽解法、残りの y についての微分の項は陰解法による 3 次のルンゲクッタ法を用いた。実施した数値計算の計算領域のサイズ、格子点数などを表 1 にまとめた。なお、数値計算法の詳細と Case L の結果は本稿では割愛する。

表 1: 計算領域の大きさ、格子点数など。表中の δ_{out} は最下流部における境界層厚さ、 η はコルモゴロフ長である。

	Re_τ (Re_θ)	$L_x/\delta_{out}, L_y/\delta_{out}, L_z/\delta_{out}$	N_x, N_y, N_z	格子間隔 $\Delta_x^+, \Delta_y^+, \Delta_z^+$
Case S	250 $\rightarrow$ 400 (600 $\rightarrow$ 900)	19.6, 4.2, 7.6	1297, 331, 768	$\Delta_x^+ < 6.0,$ $\Delta_z^+ < 4.0,$
Case L	250 $\rightarrow$ 770 (600 $\rightarrow$ 2100)	41.5, 2.3, 6.9	6144, 361, 1536	$\Delta_y^+ \approx 3.0$ (壁近傍), $\Delta_y^+ \approx 1.6\eta$ (壁遠方).

2.2 Lund らの方法

ここでは、上流側の境界条件に用いた Lund らの手法の概略を述べる。この手法は、乱流境界層における速度場の相似性を利用して、計算領域中の適当な場所での速度場をスケール変換して、これを流入条件とするものである。

乱流境界層における流れ方向の平均流速 U に対して、壁近傍および壁遠方においてそれぞれ次の相似則が成り立つことが知られている。

$$U^+ = f(y^+) \quad (8)$$

$$U_e^+ - U^+ = F(y/\delta) \quad (9)$$

ここで、上付きの $+$ は wall unit によって規格化された量であることを表す。関数 f および F はレイノルズ数によらない関数である。したがって、これらの式は、適当に規格化することにより平均流速の分布はレイノルズ数によらずに同じ関数形に従うことを表している。これらは、壁法則、速度欠損法則と呼ばれる。これらの式から、壁摩擦速度 u_τ と境界層厚さ δ の空間発展を適当に仮定すれば、ある流れ方向位置の速度場から異なる位置の壁付近と壁遠方における平均流速を求めることができる。これらは平均量に対して成り立つものであるが、この考えを各時刻の速度場に適用して流入条件を得るのが Lund らの方法である。

以下では、計算領域内の適当な位置 $x = x_{ref}$ における (y, z) 面上の速度場から、上流側境界における速度場を生成することを考える。ここで、速度場をスパン方向の平均 $\bar{u}^z$ と乱れ成分 $u' \equiv u - \bar{u}^z$ に分け、壁近傍および遠方において以下の相似則が成り立つと仮定する。

$$\bar{u}^{z+} = f_1(y^+), \quad U_e^+ - \bar{u}^{z+} = f_2(y/\delta), \quad (10)$$

$$\bar{u}_i^z/U_e = f_3(y^+), \quad \bar{u}_i^z/U_e = f_4(y/\delta), \quad i = 2, 3, \quad (11)$$

$$u_i'^+ = f_5(y^+), \quad u_i'^+ = f_6(y/\delta), \quad i = 1, 2, 3. \quad (12)$$

ここで、 $(u_1, u_2, u_3) = (u, v, w)$ 、関数 $f_1, \dots, f_6$ はレイノルズ数によらない普遍関数である。式 (10) は式 (8)、(9) を $\bar{u}^z$ に適用したものである。式 (11) では、 $\bar{v}^z, \bar{w}^z$ が壁近傍では $U_e, \nu/u_\tau$ 、遠方では U_e, δ でスケールできると仮定している。また、式 (12) は乱れ成分が壁近傍では wall unit、遠方では u_τ, δ でスケールできるとの仮定に基づくものである。そこで、 $x = x_{ref}$ における速度場を壁近傍に対する相似則によってスケール変換した速度場を u^{inner} 、遠方に対する相似則によってスケール変換した速度場を u^{outer} とし、 $x = 0$ における速度場を適当な重み関数 W を用いて以下のように得る。

$$u_{in}(y) = W(y/\delta_{in})u^{inner} + (1 - W(y/\delta_{in}))u^{outer}. \quad (13)$$

式 (10)–(12) によるスケール変換には、 $u_{\tau,in}, u_{\tau,ref}, \delta_{in}, \delta_{ref}$ (下付きの in, ref はそれぞれ $x = 0, x_{ref}$ における値であることを示す) が必要であるが、ここでは Lund らにならい、上流側境界における境界層厚さ δ_{in} を固定し、 $u_{\tau,ref}$ と δ_{ref} には各時刻におけるスパン方向平均を用いて、各時刻における $u_{\tau,in}$ を以下の関係式から求めた。

$$u_{\tau,in} = u_{\tau,ref} \left(\frac{\delta_{ref}}{\delta_{in}} \right)^{1/[2(n-1)]}, \quad n = 5. \quad (14)$$

本計算では、Case S, Case L のいずれの場合においても、 $x_{ref} = 0.8L_x$ とした。

一般に、相似則が成り立たない中間の領域における速度場のレイノルズ数依存性についてはよくわかっておらず、この手法においてもこの点は考慮されていない。したがって、上流側境界から一定区間

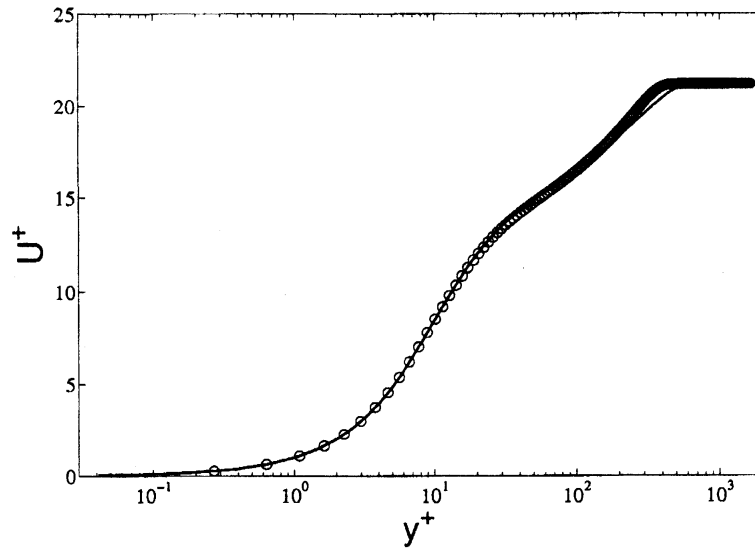


図 1: 平均流速 U の y 依存性. 実線: チャンネル乱流 ($Re_\tau = 550$), $\circ$: 乱流境界層 ($Re_\tau = 380$).

における速度場は式 (13) により人工的に作成された速度場の影響を受けているため, 解析には用いることはできない.

Ferrante ら [7] は流入条件として与える速度場がより適切なレイノルズ応力の分布を持つような Lund らの手法の改良を提案しているが, 本計算では Lund らの手法で良好な結果を得ている.

3 結果

3.1 平均流速と乱れ強度

ここで示す統計量はすべてスパン方向と時間についての平均である. 時間平均については, 下流側境界付近の turn-over-time δ/u_τ の 20 倍程度の時間で平均をとっている. 図 1 に $Re_\tau = 380$ に対する平均流速 U を示す. 比較のため, $Re_\tau = 550$ のチャンネル乱流の DNS[8] から得られた平均流速もあわせて表示している. チャンネル乱流に対するレイノルズ数 Re_τ の定義は, 式 (5) において δ をチャンネルの半値幅に置き換えたものである. この図における各物理量は wall unit で規格化している. チャンネル乱流と乱流境界層を比較すると, 壁面から $y^+ = 100$ の範囲では両者はよく一致していることがわかる. また, 境界層の平均速度分布には, 対数則が成り立つ領域が存在しているように見える. しかし, 対数領域では乱れのスケールが y で規格化できることが知られているが,[10] この意味での対数領域は $Re_\tau = 380$ に対する乱流境界層には存在しない. 対数領域の解析にはより高いレイノルズ数が必要である.

図 2,3 に乱れ成分 u' , v' の rms を示す. これらの 2 次の統計量は, 壁近傍と壁遠方のいずれにおいても u_τ^2 でスケールできないので,[9] 異なるレイノルズ数に対するデータを用いた乱流境界層とチャンネル乱流の比較においてはレイノルズ数依存性についても考慮しなければならない. 図 2 は u' の rms を示す. ピークのある $y^+ = 15$ あたりから両者が一致しないことがわかる. また, v' の rms は (図 3), $y^+ = 100$ あたりで境界層の方が大きな値をとる領域があることがわかる. 同程度のレイノルズ数の分布を比較しても, v' の rms の分布には同様の違いが認められるため, これは境界層とチャンネルの大きな違いの一つであると考えられる.

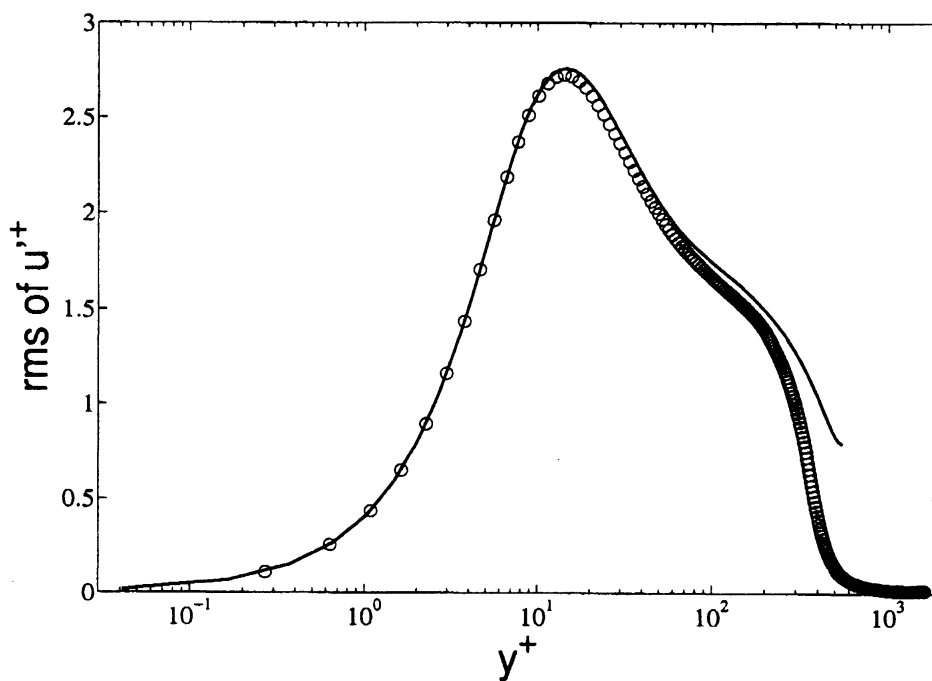


図 2: u' の rms. 実線: チャンネル乱流 ($Re_\tau = 550$), $\circ$: 乱流境界層 ($Re_\tau = 380$).

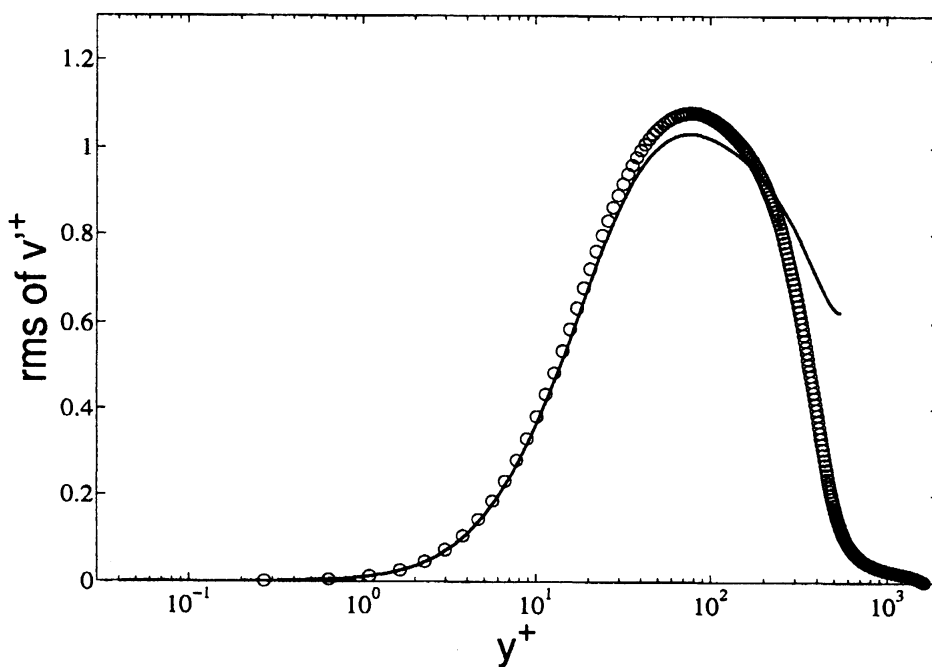


図 3: v' の rms. 実線: チャンネル乱流 ($Re_\tau = 550$), $\circ$: 乱流境界層 ($Re_\tau = 380$).

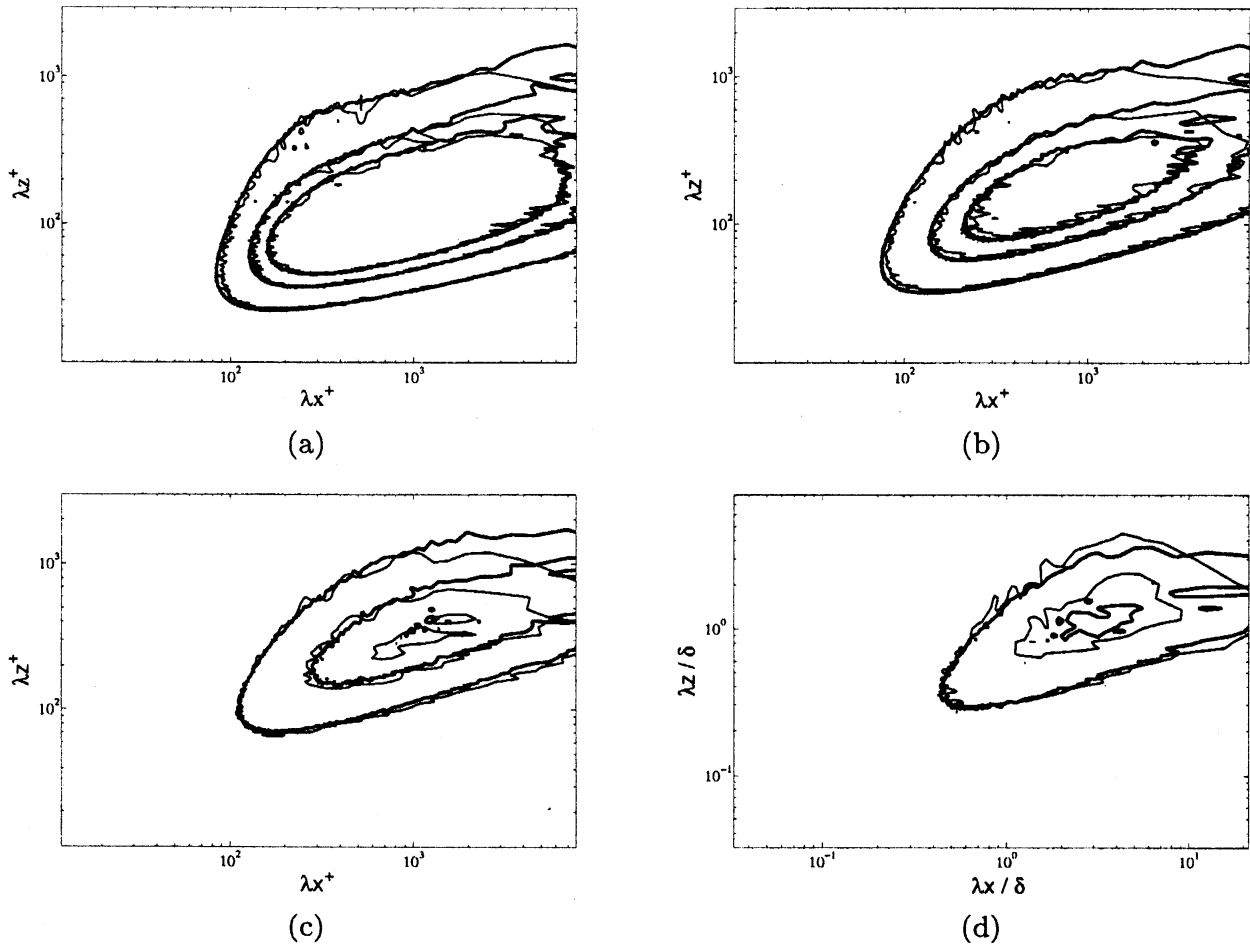


図 4: u' の pre-multiplied spectra $k_x k_z E_{uu}^{2D}$ の等高線. λ_x, λ_z は波長を表す. 太線はチャネル ($Re_\tau = 550$), 細線は境界層 ($Re_\tau = 380$). 高さ (等高線) はそれぞれ, (a) $y^+ = 15$ ($0.1u_\tau^2, 0.3u_\tau^2, 0.5u_\tau^2$), (b) $y^+ = 40$ ($0.1u_\tau^2, 0.3u_\tau^2, 0.5u_\tau^2$), (c) $y^+ = 100$ ($0.1u_\tau^2, 0.3u_\tau^2, 0.5u_\tau^2$), (d) $y/\delta = 0.5$ ($0.1u_\tau^2, 0.3u_\tau^2$).

3.2 スペクトル

乱れの代表的長さスケールやそれらの壁からの距離あるいはレイノルズ数への依存性を理解するにはスペクトルが有用である. 最近では実験においても流れ方向のスペクトルが測定されるようになってはいるが,[12] 測定誤差無しで各点での速度が得られることと, 2方向のスペクトルが容易に得られることから, 依然としてスペクトルの解析には直接数値計算は実験に比べて有利である.

本 DNS では, 流れ方向に r だけ離れた 2 点に対する乱れ成分の 2 点相関関数のフーリエ変換として, 2次元スペクトル $E_{uu}^{2D}(y, k_x, k_z)$ を次のように得た.

$$E_{uu}^{2D}(y, k_x, k_z) \equiv \frac{1}{u_\tau^2} \int \overline{u'^*(x, y, k_z) u'(x + r, y, k_z)} e^{ik_z r} dr. \quad (15)$$

ここで, k_x, k_z は x, z 方向の波数である. また, 上付きの $*$ は複素共役を表す. 他の速度成分のスペクトルも同様に求めることができる. 乱流境界層は流れ方向にも非一様であるから, スペクトル E^{2D} は観測点の流れ方向の位置 x にも依存する.

図 4, 5 は $Re_\tau = 380$ の位置における premultiplied spectra $k_x k_z E_{uu}^{2D}$ の等高線を示したものである. 横

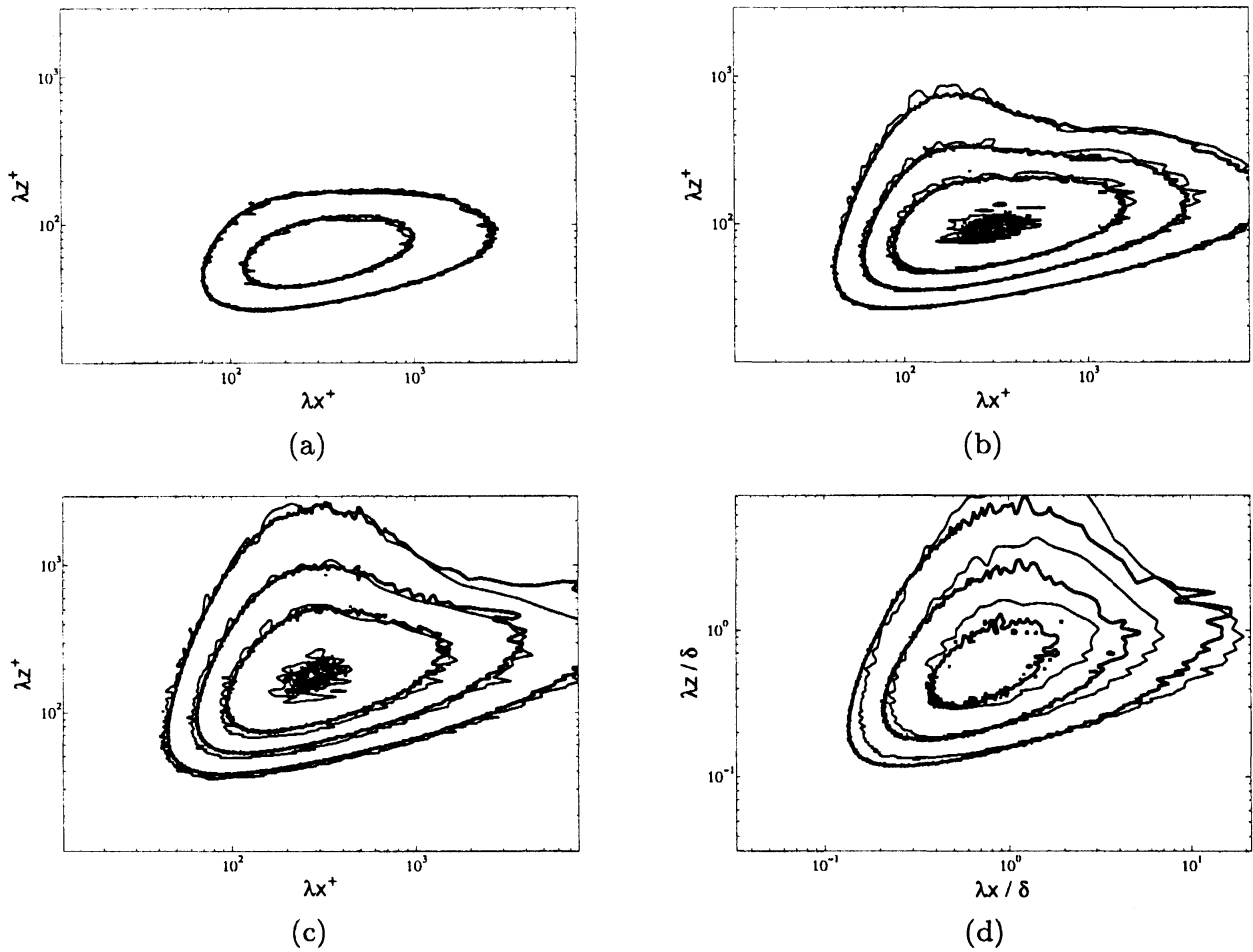


図 5: v' の pre-multiplied spectra $k_x k_z E_{vv}^{2D}$ の等高線. λ_x, λ_z は波長を表す. 太線はチャネル ($Re_\tau = 550$), 細線は境界層 ($Re_\tau = 380$). 高さ (等高線) はそれぞれ, (a) $y^+ = 15$ ($0.02u_\tau^2, 0.05u_\tau^2$), (b) $y^+ = 40$ ($0.02u_\tau^2, 0.05u_\tau^2, 0.1u_\tau^2, 0.2u_\tau^2$), (c) $y^+ = 100$ ($0.02u_\tau^2, 0.05u_\tau^2, 0.1u_\tau^2, 0.2u_\tau^2$), (d) $y/\delta = 0.5$ ($0.02u_\tau^2, 0.05u_\tau^2, 0.1u_\tau^2$).

軸 λ_x と縦軸 λ_z はそれぞれ流れ方向とスパン方向の波長である. これらの図には比較のため $Re_\tau = 550$ のチャネル乱流におけるスペクトルも合わせて表示している. 図 4 は E_{uu}^{2D} の分布である. 図中の (a) から (c) に示されているように, 壁から $y^+ = 100$ までの範囲では, 高波数領域においては境界層とチャネルのスペクトルの分布はよく一致していることがわかる. したがって, これらの高波数モードに対しては, 式 (12) と同様に相似則が成り立つことが期待される. しかし, 低波数領域 ($\lambda_x^+ > 10^3, \lambda_z^+ > 3 \times 10^2$) における両者の分布は異なる. この分布の違いがレイノルズ数依存性によるものかチャネルと境界層の違いによるものかどうかは, これらの図からは自明ではない. これを明らかにするには, 同程度のレイノルズ数に対する両者のスペクトルを比較する必要がある. 外層においては, 図 4(d) に示されているように, 波長を境界層厚さ δ で規格化すると高波数領域における分布はよく合っていることがわかる.

図 5 は E_{vv}^{2D} の分布である. 壁近傍である $y^+ = 15$ および 40 においては, 図 5(a), (b) に示されるように, チャネルと境界層のスペクトルの分布はレイノルズ数が異なるにもかかわらずきわめてよく一致していることがわかる. また, $y^+ = 100$ においても一部の低波数領域 $\lambda_x^+ > 10^3, \lambda_z^+ > 3 \times 10^2$ を除いては, 両者はよく一致していることがわかる. また, 図 3 において見られた $y^+ = 100$ 付近における v'

の rms の分布の違いは、スペクトルの分布がピーク付近で境界層の方がわずかにチャンネルよりも大きいことであることがわかる。外層の $y/\delta = 0.5$ においては、波長を δ で規格化すると両者が一致している範囲はほとんどなく、境界層の分布がチャンネルよりも低波数側にシフトしていることがわかる。

図 4,5 を比較すると、 v' のスペクトルでは壁から離れるにつれて大きなエネルギーを持つモードが低波数側に移動していくのに対して、 u' のスペクトルではいずれの高さにおいても低波数モードがある程度のエネルギーを持っていることがわかる。そこでここでは、 k_x について積分した 1 次元スペクトル

$$E^{1D}(y, k_z) = \frac{\sum_{k_x} E^{2D}(y, k_x, k_z)}{\sum_{k_x, k_z} E^{2D}(y, k_x, k_z)}, \quad (16)$$

を用いてスペクトルの y 依存性を調べることにする。図 6 に E_{uu}^{1D} と E_{vv}^{1D} の等高線を示す。この図から u' と v' のいずれの場合も、 y が増加するにつれてエネルギーを保有するモードの波長 λ_z が大きくなっていき、 $y = \delta$ では $\lambda_z = \delta$ あたりのモードが最もエネルギーを保有していることがわかる。ただし、 v' に比べて u' に対するスペクトルでは、 $y > 0.2\delta$ において $\lambda_z = \delta$ 程度の波長を持つモードが保有するエネルギーの割合が大きいことがわかる。この特徴は、実験で測定されたスペクトルにも確認されている。[12] また、 $y/\delta = O(10^{-2})$ において、 u' は $\lambda_z = \delta$ までに渡る広い範囲のモードがエネルギーを保有していることもわかる。これは、外層において特徴的な長さスケール $\lambda_z = \delta$ を持つモードが内層にまで到達しているためである。壁垂直方向に広い範囲で存在するこのようなモードは global modes と呼ばれ、境界層の実験やチャンネルの DNS などではその存在はよく知られている。これら global modes が、 u' の rms が壁近傍において wall unit でスケールできない原因であると考えられている。[9, 10, 11] 図 7 に global modes に対応する $\lambda_z > 5\delta$, $\lambda_z > \delta$ においてのみ積分された 1 次元スペクトル

$$E_g^{1D}(y, k_z) = \frac{\sum_{k_x > 5\delta} E^{2D}(y, k_x, k_z)}{\sum_{k_x > 5\delta, k_z > \delta} E^{2D}(y, k_x, k_z)}, \quad (17)$$

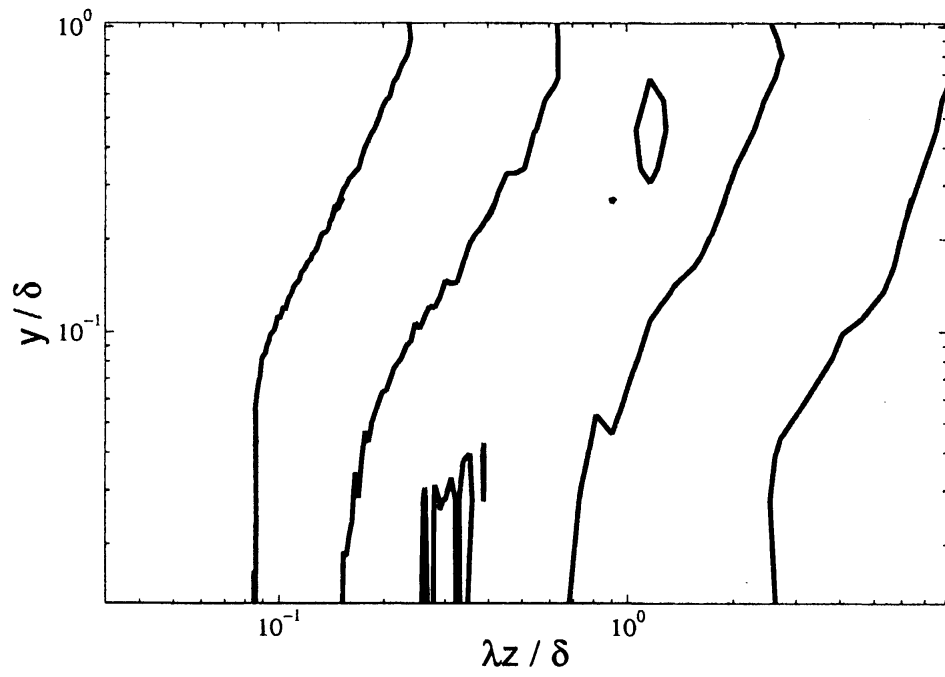
の等高線を示す。外層を流す global modes が壁近傍まで到達している様子が確認できる。

4 まとめと今後の課題

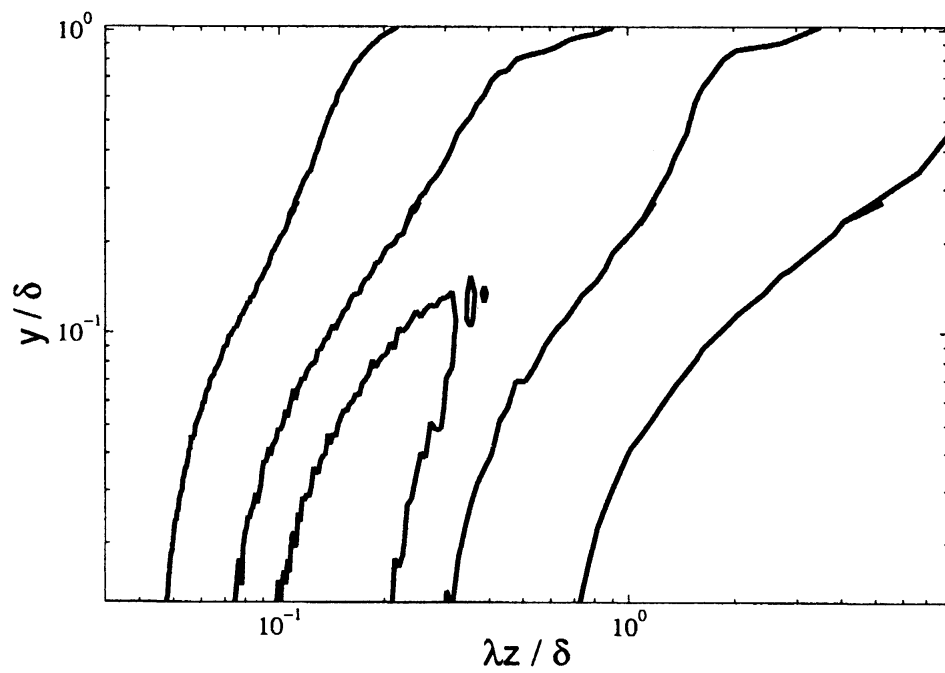
乱流境界層の DNS の結果から得られた $Re_\tau = 380$ における流れの統計的性質を $Re_\tau = 550$ のチャンネル乱流のそれと比較した。流れ方向の平均流速の分布については、wall unit で規格化すると $y^+ = 100$ あたりまで両者が一致する、乱れ成分 u' , v' の rms は wall unit で規格化すると $y^+ = 10$ 程度までしか一致しないことが確認された。

乱れ成分 u' のスペクトルの分布については、wall unit で規格化すると壁から $y^+ = 100$ 程度までは高波数領域でチャンネル乱流と乱流境界層の両者はよく一致するが、低波数領域では壁近傍の $y^+ = 15$ においても違いが現れる。この違いは、global modes と呼ばれる外層で活発なモードが壁付近まで到達することによる。また、外層の $y = 0.5\delta$ においては、長さスケールを δ で規格化するとチャンネル乱流と乱流境界層の両者の分布は高波数領域においてよく一致する。一方、 v' のスペクトルの分布は、wall unit で規格化すると壁から $y^+ = 100$ までは波数平面のほぼ全体で一致する。ただし、 $y^+ = 100$ あたりではスペクトルのピーク付近で乱流境界層の方がチャンネル乱流よりも大きな値をとる。また、外層の $y = 0.5\delta$ においては、長さスケールを δ で規格化すると、境界層のスペクトルの分布はチャンネルのそれよりも全体的に低波数側にシフトしている。

今後の課題としては、チャンネル乱流のデータと同程度のレイノルズ数の乱流境界層のデータを比較し、両者の違いを明確にすることがある。特に、乱流境界層の外層は境界層の外側の層流の影響を受けるため、チャンネル乱流と乱流境界層では global modes の性質は異なると考えられるが、その違いはまだ明ら



(a)



(b)

図 6: 1次元スペクトルの等高線. (a) $E_{uu}^{1D}(y, k_z)$, (b) $E_{vv}^{1D}(y, k_z)$. 等高線はいずれにおいても 0.05, 0.3, 0.55 に対応する.

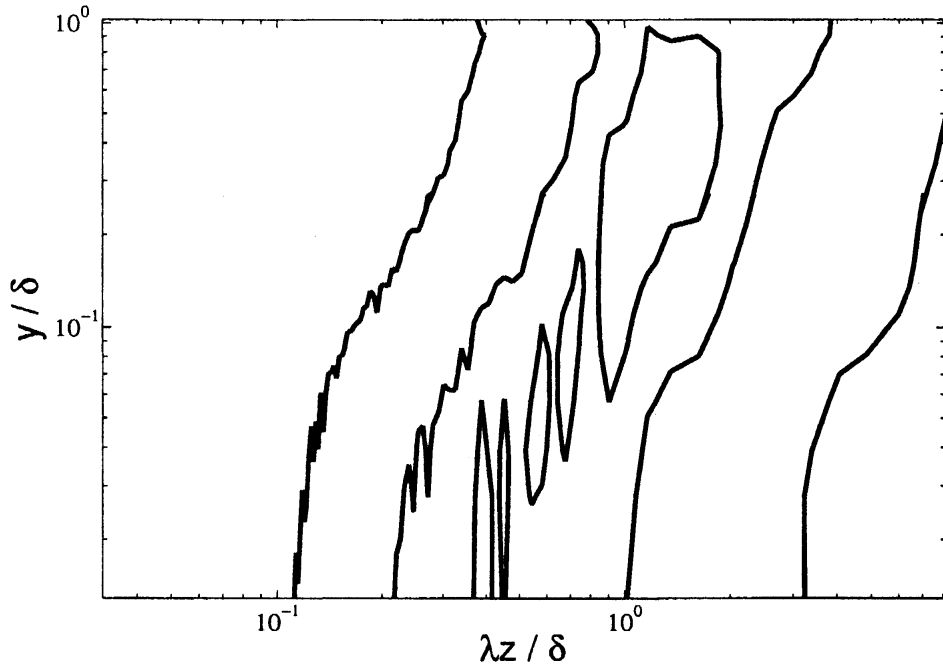


図 7: 低波数モードのみに対する 1 次元スペクトル $E_{g,uu}^{1D}(y, k_z)$. 等高線は 0.05, 0.3, 0.55 に対応する.

かではない。これらのモードは壁面近くの乱れにも影響を与えるので、チャンネル乱流と乱流境界層の違いは外層のみにはとどまらず内層にも現れることも考えられる。表 1 の Case L の結果からチャンネル乱流と同程度のレイノルズ数の境界層のデータを用いた比較を行うことで、両者の乱れの性質の違いをより明確にできることが期待される。

参考文献

- [1] P. R. Spalart, "Direct simulation of a turbulent boundary layer up to $Re_\theta = 1410$ ", J. Fluid Mech. **187**, 61 (1988)
- [2] T.S. Lund, X. I. Wu and K. D. Squires, "Generation of turbulent inflow data for spatially-developing boundary layer simulations," J. Comput. Phys. **140**, 233 (1998)
- [3] 中野秀樹, 岩本薫, 河村洋, 「乱流境界層の大規模 DNS」, 第 21 回数値流体力学シンポジウム講演概要集 E2-2. (2007)
- [4] P. R. Spalart and G. N. Coleman, "Numerical study of a separation bubble with heat transfer," Eur. J. Mech. B/Fluids **16**, 169 (1997)
- [5] P. R. Spalart and M. K. Strelets, "Mechanisms of transition and heat transfer in a separation bubble," J. Fluid Mech. **403**, 329 (2000)
- [6] M. Skote and D. S. Henningson, "Direct numerical simulation of a separated turbulent boundary layer," J. Fluid Mech. **471**, 107 (2002)

- [7] A. Ferrante and S. E. Elghobashi, "A robust method for generating inflow conditions for simulations of spatially-developing turbulent boundary layers," *J. Comput. Phys.* **198**, 372 (2004)
- [8] J. C. del Álamo and J. Jiménez, "Spectra of the very large anisotropic scales in turbulent channels," *Phys. Fluids* **15**, L41 (2003)
- [9] D. B. DeGraaff and J. K. Eaton, "Reynolds-number scaling of the flat-plate turbulent boundary layer," *J. Fluid Mech.* **422**, 319 (2000)
- [10] J. C. del Álamo, J. Jiménez, P. Zandonade and R. D. Moser, "Scaling of the energy spectra of turbulent channels," *J. Fluid Mech.* **500**, 135 (2004)
- [11] S. Hoyas and J. Jiménez, "Scaling of the velocity fluctuations in turbulent channels up to $Re_\tau = 2003$," *Phys. Fluids* **18**, 011702 (2006)
- [12] N. Hutchins, I Marusic and M. S. Chong, "Fully mapped energy spectra in a high Reynolds number turbulent boundary layer," 349 in *Advances in Turbulence XI* (Proceedings of the 11th EUROMECH European Turbulence Conference, June 25-28, 2007, Porto, Portugal) edit. J. M. L. M. Palma and A. S. Lopes, Springer (2007)