

篩の方法からの一問題

日大理工 本橋 洋一

「Selberg の篩」を改変する可能性について考察を加えてみたいのであるが、この篩の方法の最も簡明な一次元の場合を例にとり、試みる： $|N|$ 個の整数の集合 N から、 Q 以下の素数で割りきれぬものを全てを篩に落した残りを $N(Q)$ と書くことにすると、Selberg の篩によれば、大体において

$$(1) \quad |N(Q)| \leq \frac{|N|}{\log Q} + O(Q^2)$$

という評価が得られる。あるいは、より沈黙した Large Sieve の方法によれば

$$(2) \quad |N(Q)| \leq \frac{1}{\log Q} (|N| + O(Q^2))$$

とすることも可能である (小林 [4])。しかしこれにしても、この誤差項 $O(Q^2)$ より明らかになるように、このように一般的に考える限り、篩の方法の効果は $Q \leq |N|^{\frac{1}{2}-\epsilon}$ が限界であると察せられる。実際、Selberg [8] は彼の方法を発見すると同時に、その効力の限界を考察し、上記の意味での改良、即ち、

$O(Q^2)$ を一般的な条件下で、より小さなものに減らすことが不可能であることを示した。

しかしながら、Selberg [8] 自身も述べているように、他のなんらかの方法（とりわけ解析的なもの）との組み合わせや特殊な条件下では、相当な改善がなされることは不可能であるとは言えない。そのような著しい例としては、旧来は次元の節の問題としてあつかわれていた Goldbach 予想 ([9] を参照) が、Rényi [7], Barban [1], A.I. Vinogradov [10], Bombieri [3] により完全の域に達した平均素数定理により、一次元の節に還元され長足の進歩がなされたことを挙げることも出来る。更にも、最近の筆者の研究 [5][6] によれば、応用上極めて重要な Brun-Titchmarsh 型定理の場合にも、解析的な手法により、Selberg の節を相当に改善できることが明らかになり、果てている。その結果の一つを再記すれば：

$$\pi(x; q, l) \leq 2 \frac{x}{\varphi(q) \log \frac{x}{\sqrt{q}}} \left(1 + O\left(\frac{\log \log x}{\log x}\right) \right)$$

なる不等式が $q \leq x^{\frac{2}{5}}$ の場合は全ての l について、又、 $q \leq x^{1-\varepsilon}$ の場合は殆んど全ての $l \bmod q$ について、成立する。これはそれだけの変域において (1) の形の誤差項が $O(Q^2/\sqrt{q})$ と改善されることに他ならない。

このようにして、特殊な且有用な場合には、Selberg の節を

改良するとはかなり希望を持てる段階に達してゐると思
 ぜらふるのであるが、ここでは、更に Barban-Vehov [2] の
 研究を取り上げ、視界を広げたいと思う。彼らは、より極端
 な場合を考察したのである。即ち、(1)において $|N|/\log Q$ に
 かかる係数を犠牲にして、誤差項 $O(Q^2)$ が全く現れない場合
 を発見したのである。結果は、

定理

$$\lambda_d = \begin{cases} \mu(d) & d \leq z \\ \mu(d) \frac{\log z^2/d}{\log z} & z \leq d \leq z^2 \end{cases}$$

とすると、任意の $x \geq 1$ に対して、不等式

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \left(\sum_{\substack{d|n \\ d \leq z^2}} \lambda_d \right)^2 \ll \frac{x}{\log z}$$

が成立する。

Selbergの方法は、このような2乗和を効果的に評価するこ
 となのであるから、上記のように篩の結果として取りとてま
 より説である。勿論、篩の結果自体としては、これと何と新
 しい知見を加えるものではないが、その方法にある種の可能
 性が秘められてゐると思ぜらふるのである。以下にこの定理
 の証明を行うが、Barban-Vehovのものとは細部において少な

りの差異がある。ここに、わざわざ、出来得る限り明瞭な計算を行うのは、この章節の方法の改良の方向を示している重要な考察であるという理由の他に、解析的整数論への入門者にとって、Riemann zeta-函数の初歩知識をたしかめる、絶好の計算訓練になると思ふ、たからじきある。

以下証明.

1) まず

$$\sum_{n \leq x} \left(\sum_{\substack{d|n \\ d \leq \sqrt{x}}} \lambda_d \right)^2 \leq e \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{d|n \\ d \leq \sqrt{x}}} \lambda_d \right)^2 e^{-\frac{n}{x}}$$

に注意して、この右辺の無限和を $S(x)$ と書けば、Mellin 変換を用いて

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} x^s P(s) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \left(\sum_{\substack{d|n \\ d \leq \sqrt{x}}} \lambda_d \right)^2 \right\} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} x^s P(s) F(s) ds. \end{aligned}$$

この $F(s)$ は $\operatorname{Re}(s) = \sigma > 1$ のとき、容易にわかるように、

$$F(s) = \zeta(s) \sum_{d_1, d_2 \leq \sqrt{x}} \frac{\lambda_{d_1} \lambda_{d_2}}{[d_1, d_2]^s} \quad ([d_1, d_2]: \text{最小公倍数})$$

$$= \zeta(s) f(s), \quad \text{とする.}$$

$\zeta = z$

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} z^s \Gamma(s) \zeta(s) (f(s) - f(1)) ds + \frac{f(1)}{2\pi i} \int_{(2)} z^s \Gamma(s) \zeta(s) ds$$

と書けるが、第1の積分においては、積分路を $\text{Re } s = 1$ にうつせる ($s=1$ で被積分関数は正則)。又、第2の積分は明らかに $O(z)$ 。従って、

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(1)} z^s \Gamma(s) \zeta(s) (f(s) - f(1)) ds + O(z|f(1)|).$$

2) 以下数節にわたって $f(1)$ の評価を行う。

(δ, d) は最大公約数表示として、

$$\begin{aligned} f(1) &= \sum_{d_1, d_2 \leq z^2} \frac{\lambda_{d_1} \lambda_{d_2}}{[d_1, d_2]} = \sum_{d \leq z^2} \frac{\lambda_d}{d} \sum_{\delta \leq z^2} \frac{\lambda_\delta}{\delta} (\delta, d) \\ &= \sum_{d \leq z^2} \frac{\lambda_d}{d} g(d), \text{ と書く.} \end{aligned}$$

ここで、 λ_d の定義と、簡単な留数計算で

$$g(d) = \frac{1}{2\pi i \log z} \int_{(2)} \frac{z^{2w} - z^w}{w^2} \left\{ \sum_{\delta=1}^{\infty} \frac{\mu(\delta)}{\delta^{1+w}} (\delta, d) \right\} dw.$$

しかも $\text{Re } w > 0$ において

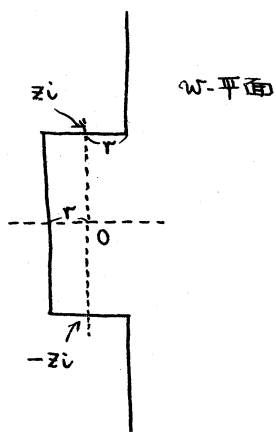
$$\sum_{\delta=1}^{\infty} \frac{\mu(\delta)}{\delta^{1+w}} (\delta, d) = \prod_{p|d} \left(1 - \frac{1}{p^{1+w}}\right) \prod_{p \nmid d} \left(1 - \frac{1}{p^w}\right)$$

$$= \frac{1}{\zeta(1+w)} \prod_{p|d} \frac{1 - \frac{1}{pw}}{1 - \frac{1}{p^{1+w}}}.$$

よって

$$g(d) = \frac{1}{2\pi i \log z} \int_{(2)} \frac{z^{2w} - z^w}{w^2 \zeta(1+w)} \prod_{p|d} \frac{1 - \frac{1}{pw}}{1 - \frac{1}{p^{1+w}}} dw.$$

ここで積分路を図のように移す.



但し

$$\tau = \frac{C_0}{\log z} \quad (C_0: \text{適当に取った絶対正定数})$$

$w = 0$ において被積分関数は正則であり, 且つ zeta-関数の理論から,

$$\left| \frac{1}{\zeta(\sigma + it)} \right| \ll \log(|t|+2), \quad \sigma \geq 1 - \frac{C_1}{\log(|t|+2)}$$

であるから, 上記の積分路において,

$$|z^{2w} - z^w| \ll 1, \quad \left| \prod_{p|d} \frac{1 - \frac{1}{pw}}{1 - \frac{1}{p^{1+w}}} \right| \ll z^\varepsilon$$

に注意して,

$$\left| \int_{-r+zi}^{+r+zi} \frac{z^{2w} - z^w}{w^2 \zeta(1+w)} \prod_{p|d} \frac{1 - \frac{1}{pw}}{1 - \frac{1}{p+w}} dw \right| \ll \frac{z^\varepsilon}{z^2} \quad (\text{複号同順})$$

又, $\operatorname{Re} w = r$ におい

$$\left| \frac{1}{\zeta(1+w)} \right| \ll \frac{1}{r} \ll \log z, \quad |z^{2w} - z^w| \ll 1, \quad \left| \prod_{p|d} \frac{1 - \frac{1}{pw}}{1 - \frac{1}{p+w}} \right| \ll z^\varepsilon$$

従って

$$\left| \int_{r+zi}^{r+i\infty} \frac{z^{2w} - z^w}{w^2 \zeta(1+w)} \prod_{p|d} \frac{1 - \frac{1}{pw}}{1 - \frac{1}{p+w}} dw \right| \ll z^\varepsilon \log z \int_{r+zi}^{r+i\infty} \frac{dw}{|w|^2} \\ \ll \frac{z^\varepsilon}{z}.$$

以上から

$$g(d) = \frac{1}{2\pi i \log z} \int_{-r-zi}^{-r+zi} \frac{z^{2w} - z^w}{w^2 \zeta(1+w)} \prod_{p|d} \frac{1 - \frac{1}{pw}}{1 - \frac{1}{p+w}} dw + O\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)$$

3) よって, はじめに

$$f(1) = \sum_{d \leq z^2} \frac{\lambda_d}{d} g(d) \\ = \frac{1}{2\pi i \log z} \int_{-r-zi}^{-r+zi} \frac{z^{2w} - z^w}{w^2 \zeta(1+w)} \left\{ \sum_{d \leq z^2} \frac{\lambda_d}{d} \prod_{p|d} \frac{1 - \frac{1}{pw}}{1 - \frac{1}{p+w}} \right\} dw + \\ + O\left(\frac{\log z}{\sqrt{z}}\right).$$

次にこの積分の中のおであるを、再び λ_d の定義により、

$$\begin{aligned} & \sum_{d \leq z^2} \frac{\lambda_d}{d} \prod_{p|d} \frac{1 - \frac{1}{pw}}{1 - \frac{1}{p^{1+w}}} \\ &= \frac{1}{2\pi i \log z} \int_{(2)} \left\{ \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^{1+u}} \prod_{p|d} \frac{1 - \frac{1}{pw}}{1 - \frac{1}{p^{1+w}}} \right\} \frac{z^{zu} - z^u}{u^2} du. \end{aligned}$$

そしてこの無限和は、 $\operatorname{Re} u > 0$ において、

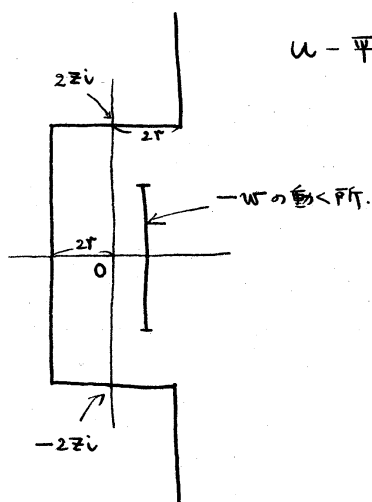
$$\begin{aligned} & \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^{1+u}} \prod_{p|d} \frac{1 - \frac{1}{pw}}{1 - \frac{1}{p^{1+w}}} = \prod_p \left\{ 1 - \frac{1}{p^{1+u}} \frac{1 - \frac{1}{pw}}{1 - \frac{1}{p^{1+w}}} \right\} \\ &= \prod_p \left\{ 1 - \frac{1}{p^{1+u}} - \frac{1}{p^{1+u}} \left(\frac{1 - \frac{1}{pw}}{1 - \frac{1}{p^{1+w}}} - 1 \right) \right\} \\ &= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^{1+u}} \right) \prod_p \left(1 - \frac{\frac{1}{p^{1+w}} - \frac{1}{pw}}{p^{1+u} \left(1 - \frac{1}{p^{1+u}} \right) \left(1 - \frac{1}{p^{1+w}} \right)} \right) \\ &= \frac{1}{\zeta(1+u)} \prod_p \left\{ 1 + \frac{1 - \frac{1}{p}}{p^{1+u+w} \left(1 - \frac{1}{p^{1+u}} \right) \left(1 - \frac{1}{p^{1+w}} \right)} \right\} \\ &= \frac{1}{\zeta(1+u)} \prod_p \left\{ 1 + \frac{1}{p^{1+u+w}} + \frac{1}{p^{1+u+w}} \left(\frac{1 - \frac{1}{p}}{\left(1 - \frac{1}{p^{1+u}} \right) \left(1 - \frac{1}{p^{1+w}} \right)} - 1 \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\zeta(1+u)} \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{1+u+w}} \right) \prod_p \left\{ 1 + \frac{1}{(p^{1+u+w} + 1)} \left(\frac{1 - \frac{1}{p}}{\left(1 - \frac{1}{p^{1+u}} \right) \left(1 - \frac{1}{p^{1+w}} \right)} - 1 \right) \right\} \\ &= \frac{\zeta(1+u+w)}{\zeta(1+u)} \cdot \frac{1}{\zeta(2(1+u+w))} \prod_p \left\{ 1 + \frac{-p^{1+u+w} + p^{1+w} + p^{1+u} - 1}{(p^{1+u+w} + 1)(p^{1+u} - 1)(p^{1+w} - 1)} \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{\zeta(1+u+w)}{\zeta(1+u)} \Phi(u, w), \text{ と書く.}$$

容易にわかるように, $\Phi(u, w)$ は $\operatorname{Re} u, \operatorname{Re} w \geq -\frac{1}{8}$ で正則かつ有界. 以上から

$$\sum_{d \leq z^2} \frac{\lambda_d}{d} \prod_{p|d} \frac{1 - \frac{1}{p^w}}{1 - \frac{1}{p^{1+w}}} = \frac{1}{2\pi i \log z} \int_{(2)} \frac{z^{2u} - z^u}{u^2 \zeta(1+u)} \zeta(1+u+w) \Phi(u, w) du$$

ここで積分路を下図のように移す.



u -平面.

$$\text{但し } r = \frac{c_0}{\log z}$$

$u=0$ では被積分函数は正則.

$u=-w$ で $\zeta(1+u+w)$ は pole をとる, $\gamma=c$

$$\text{この留数は } \frac{z^{-2w} - z^{-w}}{w^2 \zeta(1-w)} \Phi(-w, w)$$

よって, 上の積分路を $\mathcal{Q}_1$ とすれば

$$\begin{aligned} \sum_{d \leq z^2} \frac{\lambda_d}{d} \prod_{p|d} \frac{1 - \frac{1}{p^w}}{1 - \frac{1}{p^{1+w}}} &= \frac{1}{\log z} \cdot \frac{z^{-2w} - z^{-w}}{w^2 \zeta(1-w)} \Phi(-w, w) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i \log z} \int_{\mathcal{Q}_1} \frac{z^{2u} - z^u}{u^2 \zeta(1+u)} \zeta(1+u+w) \Phi(u, w) du. \end{aligned}$$

$\operatorname{Re} u = 2r$ のとき $\operatorname{Re}(u+w) = r$ であるから,

$$\left| \frac{\zeta(1+u+w)}{\zeta(1+u)} \right| \ll (\log z)^2$$

従、上記の積分については、容易に

$$\left| \int_{2r+2\pi i}^{2r+2\pi i} \frac{z^{2u}-z^u}{u^2 \zeta(1+u)} \zeta(1+u+w) \Phi(u, w) du \right| \ll \frac{(\log z)^2}{z}.$$

(複号同順)

又, $\operatorname{Im} u = \pm 2\pi$ においては, $-3r \leq \operatorname{Re}(u+w) \leq r$ 且

$z \leq |\operatorname{Im}(u+w)| \leq 3z$ であるから

$$\left| \frac{1}{\zeta(1+u)} \right| \ll \log z, \quad |\zeta(1+u+w)| \ll \log z.$$

よって

$$\left| \int_{-2r+2\pi i}^{2r+2\pi i} \frac{z^{2u}-z^u}{u^2 \zeta(1+u)} \zeta(1+u+w) \Phi(u, w) du \right| \ll \frac{\log z}{z^2}.$$

以上から

$$\begin{aligned} \sum_{d \leq z^2} \frac{\lambda_d}{d} \prod_{p|d} \frac{1 - \frac{1}{p^w}}{1 - \frac{1}{p^{1+w}}} &= \frac{1}{\log z} \cdot \frac{z^{-2w} - z^{-w}}{w^2 \zeta(1-w)} \Phi(-w, w) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{\log z} \int_{-2r-2\pi i}^{-2r+2\pi i} \frac{z^{2u}-z^u}{u^2 \zeta(1+u)} \zeta(1+u+w) \Phi(u, w) du + O\left(\frac{\log z}{z}\right). \end{aligned}$$

4) $\zeta = z$ 前節のはじめに $\neq z$, τ ,

$$\begin{aligned}
 f(1) &= \frac{1}{2\pi i \log z} \int_{-r-zi}^{-r+zi} \frac{(z^{2w} - z^w)(z^{-2w} - z^{-w})}{w^4 \zeta(1+w) \zeta(1-w)} \Phi(-w, w) dw + \\
 &+ \frac{1}{2\pi i \log z} \int_{-r-zi}^{-r+zi} \frac{z^{2w} - z^w}{w^2} I(w) dw + O\left(\frac{\log z}{\sqrt{z}}\right) + \\
 &+ O\left(\frac{1}{z \log z} \int_{-r-zi}^{-r+zi} \left| \frac{z^{2w} - z^w}{w^2 \zeta(1+w)} dw \right| \right).
 \end{aligned}$$

但し,

$$I(w) = \frac{1}{2\pi i \log z} \int_{-2r-2zi}^{-2r+2zi} \frac{z^{2u} - z^u}{u^2 \zeta(1+u)} \zeta(1+u+w) \Phi(u, w) du.$$

(i) まず

$$I_1 = \int_{-r-zi}^{-r+zi} \left| \frac{z^{2w} - z^w}{w^2 \zeta(1+w)} dw \right|$$

において, 明らかに

$$\left| \frac{1}{w \zeta(1+w)} \right| \ll 1 \quad (\text{有界})$$

であるから

$$I_1 \ll \int_{-r-zi}^{-r+zi} \frac{|dw|}{|w|} \ll \int_0^z \frac{d\xi}{(r^2 + \xi^2)^{\frac{1}{2}}} \ll \log z.$$

(ii) 次に $I(w)$ について, $\zeta(s)$ について 更に 深 $\ll$ を用いる。

$$\sigma \geq 1 - \frac{c_2}{(\log(|t|+2))^{\frac{3}{4}}}$$

にあつて

$$|\zeta(\sigma+it)| \ll \log(|t|+2), \quad \left| \frac{1}{\zeta(\sigma+it)} \right| \ll \log(|t|+2)$$

であるから, 積分路を $\operatorname{Re}(u) = -\frac{c_3}{(\log z)^{\frac{3}{4}}}$ にうつして, 簡単な評価により,

$$I(w) = \frac{1}{2\pi i \log z} \int_{-c_3(\log z)^{-\frac{3}{4}}-2zi}^{-c_3(\log z)^{-\frac{3}{4}}+2zi} \frac{z^{2u} - z^u}{u^2 \zeta(1+u)} \zeta(1+u+w) \Phi(u, w) du + O\left(\frac{(\log z)^2}{z^2}\right)$$

従つて,

$$\begin{aligned} |I(w)| &\ll \frac{1}{\log z} \cdot \exp\left(-c_3(\log z)^{\frac{1}{4}}\right) (\log z)^2 \int_{-c_3(\log z)^{-\frac{3}{4}}-2zi}^{-c_3(\log z)^{-\frac{3}{4}}+2zi} \left| \frac{du}{u^2} \right| + O\left(\frac{(\log z)^2}{z^2}\right) \\ &\ll \exp\left(-\frac{c_3}{2}(\log z)^{\frac{1}{4}}\right). \end{aligned}$$

よつて

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i \log z} \int_{-r-zi}^{-r+zi} \frac{z^{2w} - z^{-w}}{w^2} I(w) dw$$

に ついて は

$$|I_2| \ll \exp\left(-\frac{C_3}{4} (\log z)^{\frac{1}{4}}\right)$$

を得る。

(iii) 才 1 の積分 に ついて は, $(z^{2w} - z^{-w})(z^{-2w} - z^{-w})$ と 1 ; 因子がある故, 最良の積分路は $\operatorname{Re} w = 0$ である。又, 明らかに $w = 0$ では被積分函数は正則である。積分路を $\operatorname{Re} w = 0$ にうつすと, 簡単な評価によ, て,

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{2\pi i \log^2 z} \int_{-r-zi}^{-r+zi} \frac{(z^{2w} - z^{-w})(z^{-2w} - z^{-w})}{w^4 \zeta(1+w)\zeta(1-w)} \Phi(-w, w) dw \\ &= \frac{1}{2\pi \log^2 z} \int_{-z}^z \frac{(z^{2\zeta i} - z^{\zeta i})(z^{-2\zeta i} - z^{-\zeta i})}{\zeta^4 \zeta(1+i\zeta)\zeta(1-i\zeta)} \Phi(-\zeta i, \zeta i) d\zeta + O\left(\frac{1}{z^2}\right). \end{aligned}$$

よって

$$\left| \frac{1}{\zeta \zeta(1 \pm \zeta i)} \right| : \text{有界}, \quad |z^{2\zeta i} - z^{\zeta i}| \leq 2 \left| \sin\left(\frac{\zeta}{2} \log z\right) \right|$$

よって,

$$|I_3| \ll \frac{1}{\log^2 z} \int_{-z}^z \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\zeta \log z\right)}{\zeta} \right)^2 d\zeta + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

$$\ll \frac{1}{\log z} \int_{-z \log z}^{z \log z} \left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)^2 d\xi + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

$$\ll \frac{1}{\log z}.$$

以上 (i), (ii), (iii) をまとめると、目的の

$$|f(1)| \ll \frac{1}{\log z}$$

を得る。

5) $\chi = \chi(-1)$ に注意して

$$S(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(1)} x^s \Gamma(s) \zeta(s) (f(s) - f(1)) ds + O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

ここで、次のことに注意しよう。 $s = 1+it$ のとき

$$|f(s)| \ll (\log x)^4.$$

なぜならば $[d_1, d_2] = d$ の解は明らかに $\tau_3(d)$ 個 (d を 3 つの因子の積で表す方法の数) に等しいから、

$$|f(s)| \leq \sum_{d_1, d_2 \leq x^2} \frac{1}{[d_1, d_2]} \leq \sum_{d \leq x^2} \frac{\tau_3(d)}{d} \ll (\log x)^4.$$

更に π , スターリングの公式

$$|\Gamma(\sigma+it)| = \sqrt{2\pi} (|t|+1)^{\sigma-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|t|} (1+O(\frac{1}{|t|+1}))$$

及び

$$|\zeta(1+it)| \ll \log(|t|+1) \quad (|t| \geq 1)$$

に注意すれば、上記の積分を $|\operatorname{Im} s| \leq z$ に制限してもおまわ
ないことが容易にわかる。すなわち、

$$S(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-z-i}^{1+z+i} x^s \Gamma(s) \zeta(s) (f(s) - f(1)) ds + O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

$\zeta = z$, 以下 当分のあいだ $s = 1+it$, $|t| \leq z$ としておく。

そして $f(s)$ の計算に入る。

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{d_1, d_2 \leq z^2} \frac{\lambda_{d_1} \lambda_{d_2}}{[d_1, d_2]^s} = \sum_{d \leq z^2} \frac{\lambda_d}{d^s} \sum_{\delta \leq z^2} \frac{\lambda_\delta}{\delta^s} (d, \delta)^s \\ &= \sum_{d \leq z^2} \frac{\lambda_d}{d^s} g(s, d), \quad \text{と書く.} \end{aligned}$$

$f(1)$ の場合と同様に、

$$g(s, d) = \frac{1}{2\pi i \log z} \int_{(2)} \frac{z^{2w} - z^w}{w^2} \left\{ \sum_{\delta=1}^{\infty} \frac{\mu(\delta)}{\delta^{s+w}} (d, \delta)^s \right\} dw.$$

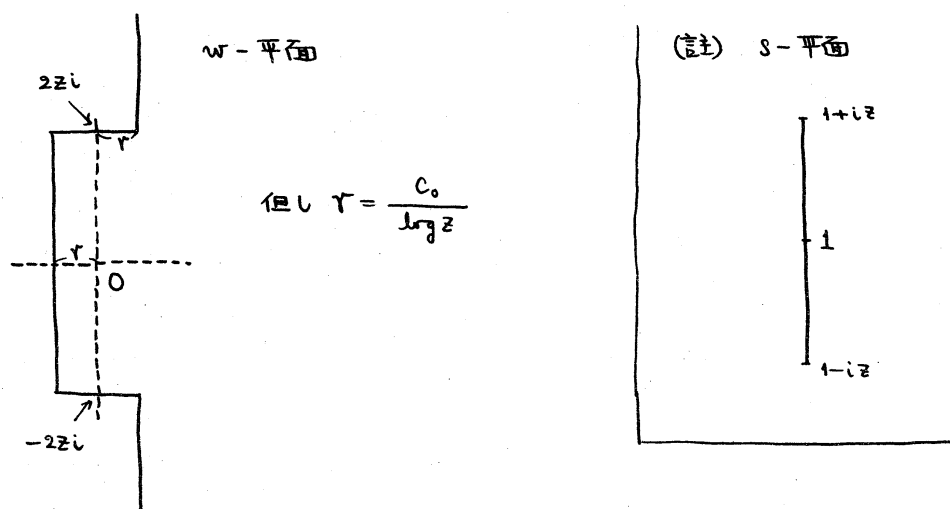
$$\sum_{\delta=1}^{\infty} \frac{\mu(\delta)}{\delta^{s+w}} (d, \delta)^s = \prod_{p \nmid d} \left(1 - \frac{1}{p^{s+w}}\right) \prod_{p \mid d} \left(1 - \frac{1}{p^w}\right)$$

$$= \frac{1}{\zeta(s+w)} \prod_{p \mid d} \frac{1 - \frac{1}{p^w}}{1 - \frac{1}{p^{s+w}}} \quad (\operatorname{Re} w > 0).$$

そして、

$$g(s, d) = \frac{1}{2\pi i \log z} \int_{(2)} \frac{z^{2w} - z^w}{\zeta(s+w) w^2} \prod_{p|d} \frac{1 - \frac{1}{pw}}{1 - \frac{1}{p+s+w}} dw$$

において積分路を下图のように移す。



$w=0$ において極がある可能性があるが $d > 1$ であらば

$$\prod_{p|d} \left(1 - \frac{1}{pw}\right) = (-1)^{\omega(d)} w^{-\omega(d)} \prod_{p|d} \log p + O(|w|^{-\omega(d)+1})$$

($\omega(d)$: d の素因子の数)

が $w \rightarrow 0$ で成立する故、このときは極はない。又 $d=1$ ならば

$s=1$ の場合は極なし。

$$s \neq 1 \text{ の場合は極があって留数} = \frac{\log z}{\zeta(s)}$$

しかるに $\frac{1}{\zeta(1)} = 0$ であるから、まとめると $w=0$ における

留数は

$$\frac{\log z}{\zeta(s)} \sum_{p|d} \mu(p)$$

とかける。よって、上記の積分路を $\mathcal{C}_2$ と可うは、

$$g(s, d) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{\delta | d} \mu(\delta) + \frac{1}{2\pi i \log z} \int_{\mathcal{L}} \frac{z^{2w} - z^{-w}}{w^2 \zeta(s+w)} \prod_{p|d} \frac{1 - \frac{1}{pw}}{1 - \frac{1}{ps+w}} dw$$

$$= \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{\delta | d} \mu(\delta) + \frac{1}{2\pi i \log z} \left\{ \int_{\substack{w \in \mathcal{L}_2 \\ |\operatorname{Im} w| \geq 2\tau}} + \int_{\substack{w \in \mathcal{L}_2 \\ |\operatorname{Im} w| < 2\tau}} \right\}$$

$$= \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{\delta | d} \mu(\delta) + G_1(s, d) + G_2(s, d), \quad \varepsilon \text{ 小 } \tau \text{ 大}.$$

よって

$$f(s) = \frac{1}{\zeta(s)} + \sum_{d \leq z^2} \frac{\lambda_d}{d^s} G_1(s, d) + \sum_{d \leq z^2} \frac{\lambda_d}{d^s} G_2(s, d)$$

$$= \frac{1}{\zeta(s)} + H_1(s) + H_2(s), \quad \varepsilon \text{ 小 } \tau \text{ 大}.$$

よって

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\tau}^{1+i\tau} x^s \Gamma(s) \zeta(s) \left\{ \frac{1}{\zeta(s)} + (H_1(s) - H_1(1)) + (H_2(s) - H_2(1)) \right\} ds + O\left(\frac{z}{\log z}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\tau}^{1+i\tau} x^s \Gamma(s) ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\tau}^{1+i\tau} x^s \Gamma(s) \zeta(s) (H_1(s) - H_1(1)) ds +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} x^s \Gamma(s) \zeta(s) (H_2(s) - H_2(1)) ds + O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

はじめの積分は $e^{-\frac{1}{x}}$ であるから問題ないが $H_1(s)$ についてのはあつかい。まず $H_2(s)$ についての手をあたすけよう。

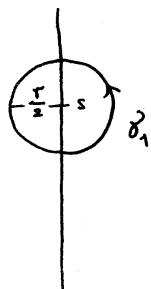
6) さて、定義から

$$\begin{aligned} H_2(s) - H_2(1) \\ = \sum_{d \leq x^2} \lambda_d \int_1^s \frac{d}{ds} \left\{ \frac{G_2(s, d)}{d^s} \right\} ds. \end{aligned}$$

そして、

$$\frac{d}{ds} \left\{ \frac{G_2(s, d)}{d^s} \right\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{d\xi}{(\xi - s)^2} \cdot \frac{G_2(\xi, d)}{d^\xi}$$

但し γ_1 は下図の小円。



$$s = 1 + it, \quad r = \frac{c_0}{\log x}$$

そして、 $G_2(\xi, d)$ の定義から

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left\{ \frac{G_2(s, d)}{d^s} \right\} = \frac{1}{2\pi i \log x} \int_{\substack{w \in \mathcal{B}_2 \\ |\operatorname{Im} w| \geq 2\tau}} \frac{x^{2w} - x^w}{w^2} \prod_{p|d} \left(1 - \frac{1}{p^w}\right) dw \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{\prod_{p|d} \left(1 - \frac{1}{p^{\xi+w}}\right)^{-1}}{d^\xi \zeta(\xi+w)(\xi-s)^2} d\xi \end{aligned}$$

こゝで積分の順序を交換したのであるが、これは次の理由で許される。

まず $w \in \mathcal{D}_2$, $\operatorname{Re} w = \gamma$ のとき $\operatorname{Re}(\xi + w) \geq 1 + \frac{\gamma}{2}$

より $\left| \frac{1}{\zeta(\xi + w)} \right| \ll \log z$. また, $w \in \mathcal{D}_2$, $\operatorname{Im} w = \pm 2z$ のときは

$1 - \frac{3}{2}\gamma \leq \operatorname{Re}(\xi + w) \leq 1 + \frac{3}{2}\gamma$, $z - \frac{\gamma}{2} \leq |\operatorname{Im}(\xi + w)| \leq 3z + \frac{\gamma}{2}$ より

$\left| \frac{1}{\zeta(\xi + w)} \right| \ll \log z$. 従つて積分は絶対収束。

又, 上記の注意から,

$$\begin{aligned} \left| \oint_{\mathcal{D}_1} \frac{\prod_{p|d} \left(1 - \frac{1}{p^{\xi+w}}\right)^{-1}}{d^{\xi} \zeta(\xi + w)(\xi - s)^2} d\xi \right| &\ll \frac{1}{d} \log^2 z \left| \prod_{p|d} \left(1 - \frac{1}{p^{1+\frac{\gamma}{2}}}\right)^{-1} \right| \\ &\ll \frac{1}{d} \log^3 z. \end{aligned}$$

よつて

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{ds} \left\{ \frac{G_2(s, d)}{d^s} \right\} \right| &\ll \frac{1}{d} \log^2 z \int_{\substack{w \in \mathcal{D}_2 \\ |\operatorname{Im} w| \geq 2z}} \left| \frac{z^{2w} - z^w}{w^2} \prod_{p|d} \left(1 - \frac{1}{p^w}\right) dw \right| \\ &\ll \frac{d^{\epsilon}}{d} \int_{\substack{w \in \mathcal{D}_2 \\ |\operatorname{Im} w| \geq 2z}} \left| \frac{dw}{w^2} \right| \ll \frac{z^{\epsilon}}{dz} \end{aligned}$$

が $s \rightarrow 1$ で一様に成立する。すなわち, はじめに述べた

$$\begin{aligned} |H_2(s) - H_2(1)| &\ll |s-1| \frac{z^{\epsilon}}{z} \sum_{d \leq z^{\epsilon}} \frac{1}{d} \\ &\ll \frac{|s-1|}{\sqrt{z}}. \end{aligned}$$

よつて

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\epsilon}^{1+i\epsilon} \chi^s \Gamma(s) \zeta(s) (H_2(s) - H_2(1)) ds \right|$$

$$\ll \frac{1}{\sqrt{z}} \int_{1-iz}^{1+iz} |(s-1)\zeta(s) x^s \Gamma(s) ds| \ll \frac{x}{\sqrt{z}}$$

$$\ll \frac{x}{\log z}.$$

7) 以下から $H_1(s)$ の計算に入る。

λ_d の定義から

$$H_1(s) = \sum_{d \leq z^2} \frac{\lambda_d}{d^s} G_1(d, s)$$

$$= \frac{1}{2\pi i \log z} \int_{-r-2iz}^{-r+2iz} \frac{z^{2w} - z^w}{w^2 \zeta(s+w)} dw \sum_{d \leq z^2} \frac{\lambda_d}{d^s} \prod_{p|d} \left(\frac{1 - \frac{1}{pw}}{1 - \frac{1}{ps+w}} \right)$$

において,

$$\sum_{d \leq z^2} \frac{\lambda_d}{d^s} \prod_{p|d} \left(\frac{1 - \frac{1}{pw}}{1 - \frac{1}{ps+w}} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i \log z} \int_{(2)} \left\{ \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^{s+u}} \prod_{p|d} \frac{1 - \frac{1}{pw}}{1 - \frac{1}{ps+w}} \right\} \frac{z^{2u} - z^u}{u^2} du.$$

そして, $\operatorname{Re} u > 0$ の z に対して,

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^{s+u}} \prod_{p|d} \frac{1 - \frac{1}{pw}}{1 - \frac{1}{ps+w}} = \prod_p \left\{ 1 - \frac{1}{ps+u} \cdot \frac{1 - \frac{1}{pw}}{1 - \frac{1}{ps+w}} \right\}$$

$$= \prod_p \left\{ 1 - \frac{1}{ps+u} - \frac{1}{ps+u} \left(\frac{1 - \frac{1}{pw}}{1 - \frac{1}{ps+w}} - 1 \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\zeta(s+u)} \prod_p \left\{ 1 - \frac{\frac{1}{p^{s+w}} - \frac{1}{p^w}}{p^{s+u} \left(1 - \frac{1}{p^{s+u}}\right) \left(1 - \frac{1}{p^{s+w}}\right)} \right\} \\
&= \frac{1}{\zeta(s+u)} \prod_p \left\{ 1 + \frac{1}{p^{s+u+w}} + \frac{1}{p^{s+u+w}} \left(\frac{1 - \frac{1}{p^s}}{\left(1 - \frac{1}{p^{s+u}}\right) \left(1 - \frac{1}{p^{s+w}}\right)} - 1 \right) \right\} \\
&= \frac{\zeta(s+u+w)}{\zeta(s+u)} \cdot \frac{1}{\zeta(2(s+u+w))} \prod_p \left\{ 1 + \frac{-p^{s+u+w} + p^{s+w} + p^{s+u} - 1}{(p^{s+u+w} + 1)(p^{s+u} - 1)(p^{s+w} - 1)} \right\} \\
&= \frac{\zeta(s+u+w)}{\zeta(s+u)} \Phi(s, w, u), \text{ とする。}
\end{aligned}$$

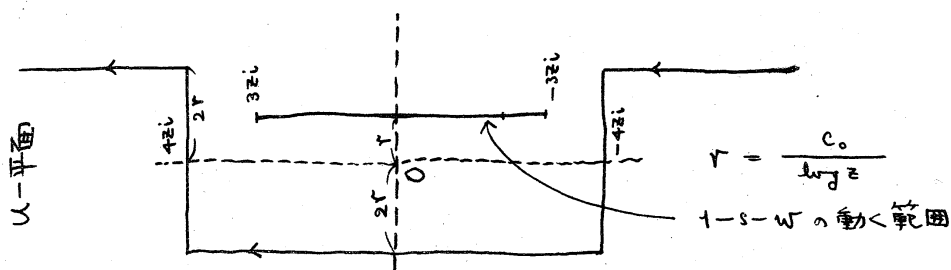
容易にわかるように, $\Phi(s, w, u)$ は $\operatorname{Re} s \geq \frac{7}{8}$; $\operatorname{Re} w, \operatorname{Re} u \geq -\frac{1}{8}$

で正則かつ有界である。

さて,

$$\begin{aligned}
&\sum_{d \in \mathbb{Z}^2} \frac{\lambda_d}{d^s} \prod_{p|d} \left(\frac{1 - \frac{1}{p^w}}{1 - \frac{1}{p^{s+w}}} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi i \log z} \int_{(2)} \frac{\zeta(s+u+w)}{\zeta(s+u)} \cdot \frac{z^{2u} - z^u}{u^2} \Phi(s, w, u) du
\end{aligned}$$

であるが, $\equiv$ で積分路を下図のようにとす。



$$- \frac{1}{4\pi^2 \log^2 z} \int_{-r-2iz}^{-r+2iz} \frac{z^{2w} - \bar{z}^w}{w^2 \zeta(s+w)} dw - \int_{\mathcal{D}_3} \frac{\zeta(s+w+u)}{\zeta(s+u)} \cdot \frac{z^{2u} - \bar{z}^u}{u^2} \Phi(s, w, u) du$$

$$= J_1(s) + J_2(s) + J_3(s), \quad \text{とおく。}$$

== 2) 5), 6) 節 と上記をまじめて,

$$S(x) = O\left(\frac{x}{\log x}\right) + \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2\pi i} \int_{1-iz}^{1+iz} x^s \Gamma(s) \zeta(s) (J_j(s) - J_j(1)) ds$$

となる。

まず簡単な $J_1(s)$ について評価をしておこう。

$$J_1(1) = 0$$

であるが, $\Phi(s, w, 0)$ は $\operatorname{Re} s = 1$ なる場合は例えは $\operatorname{Re} w \geq -\frac{1}{4}$ で

正則有界であるから, $\operatorname{Re} w = -\frac{1}{4}$ へ積分路を移して評価する

これにより容易に

$$\int_{-r-2iz}^{-r+2iz} \frac{z^{2w} - \bar{z}^w}{w^2} \Phi(s, w, 0) dw = O\left(\frac{1}{z^{\frac{1}{4}}}\right).$$

よって

$$|J_1(s) - J_1(1)| \ll \frac{z^{-\frac{1}{4}}}{|\zeta(s)|}.$$

すなわち

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{1-iz}^{1+iz} x^s \Gamma(s) \zeta(s) (J_1(s) - J_1(1)) ds \right| &\ll \int_{1-iz}^{1+iz} z^{-\frac{1}{4}} x |\Gamma(s) ds| \\ &\ll z^{-\frac{1}{4}} x. \end{aligned}$$

極の可能性は $u=0$ と $u=1-s-w$ である。しかし、これらは一致する。なぜならば、 $\operatorname{Re}(1-s-w)=1$ 。よって u は $\frac{1}{2}$ に 1 位の極であり、

$$u=0 \text{ における留数} : \frac{\zeta(s+w)}{\zeta(s)} \log z \Phi(s, w, 0) \quad (s=1 \text{ かつ } w=0)$$

$$u=1-s-w \text{ における留数} : \frac{z^{2(1-s-w)} - z^{1-s-w}}{(1-s-w)^2 \zeta(1-w)} \Phi(s, w, 1-s-w).$$

よって、上記の積分路を $\mathcal{D}_3$ とすれば、

$$\begin{aligned} & \sum_{d \leq z^2} \frac{\lambda_d}{d^s} \prod_{p|d} \left(\frac{1 - \frac{1}{p^w}}{1 - \frac{1}{p^{s+w}}} \right) \\ &= \frac{\zeta(s+w)}{\zeta(s)} \Phi(s, w, 0) + \frac{1}{\log z} \cdot \frac{z^{2(1-s-w)} - z^{1-s-w}}{(1-s-w)^2 \zeta(1-w)} \Phi(s, w, 1-s-w) + \\ & \quad + \frac{1}{2\pi i \log z} \int_{\mathcal{D}_3} \frac{\zeta(s+u+w)}{\zeta(s+u)} \cdot \frac{z^{2u} - z^u}{u^2} \Phi(s, w, u) du \end{aligned}$$

従って、はじめに $\frac{1}{2}$ と τ

$$\begin{aligned} H_1(s) &= \frac{1}{2\pi i \zeta(s) \log z} \int_{-r-2i\tau}^{-r+2i\tau} \frac{z^{2w} - z^w}{w^2} \Phi(s, w, 0) dw + \\ & \quad + \frac{1}{2\pi i \log^2 z} \int_{-r-2i\tau}^{-r+2i\tau} \frac{(z^{2w} - z^w)}{w^2 \zeta(1-w)} \cdot \frac{(z^{2(1-s-w)} - z^{1-s-w})}{(1-s-w)^2 \zeta(s+w)} \Phi(s, w, 1-s-w) dw - \end{aligned}$$

8) 次に $J_3(s)$ について考へる。 = 十 五 二 七 一 十 け 乙

$$J_3(s) = - \frac{1}{4\pi^2 \log^2 z} \int_{-r-2iz}^{-r+2iz} \frac{z^{2w} - z^w}{w^2 \zeta(s+w)} dw \left\{ \int_{\substack{u \in \mathcal{D}_3 \\ |\operatorname{Im} u| \leq 4z}} + \int_{\substack{u \in \mathcal{D}_3 \\ |\operatorname{Im} u| \geq 4z}} \right\}$$

$$= J_3^{(1)}(s) + J_3^{(2)}(s) \quad \text{と 可 る。}$$

(i) まず $J_3^{(2)}(s)$ について。

$$\begin{aligned} J_3^{(2)}(s) &= J_3^{(2)}(1) \\ &= - \frac{1}{4\pi^2 \log^2 z} \int_{-r-2iz}^{-r+2iz} \frac{z^{2w} - z^w}{w^2} dw \int_1^s \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{1}{\zeta(s+w)} \int_{\substack{u \in \mathcal{D}_3 \\ |\operatorname{Im} u| \geq 4z}} \frac{\zeta(s+u+w)}{\zeta(s+u)} \cdot \frac{z^{2u} - z^u}{u^2} \Phi(s, w, u) du \right\} ds \end{aligned}$$

そこで s についての積分は $\operatorname{Re} s = 1$ 上で考へてゐる。 又して

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{1}{\zeta(s+w)} \int_{\substack{u \in \mathcal{D}_3 \\ |\operatorname{Im} u| \geq 4z}} \frac{\zeta(s+u+w)}{\zeta(s+u)} \cdot \frac{z^{2u} - z^u}{u^2} \Phi(s, w, u) du \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial_2} \frac{d\xi}{(\xi-s)^2 \zeta(\xi+w)} \int_{\substack{u \in \mathcal{D}_3 \\ |\operatorname{Im} u| \geq 4z}} \frac{\zeta(\xi+u+w)}{\zeta(\xi+u)} \cdot \frac{z^{2u} - z^u}{u^2} \Phi(\xi, w, u) du \end{aligned}$$

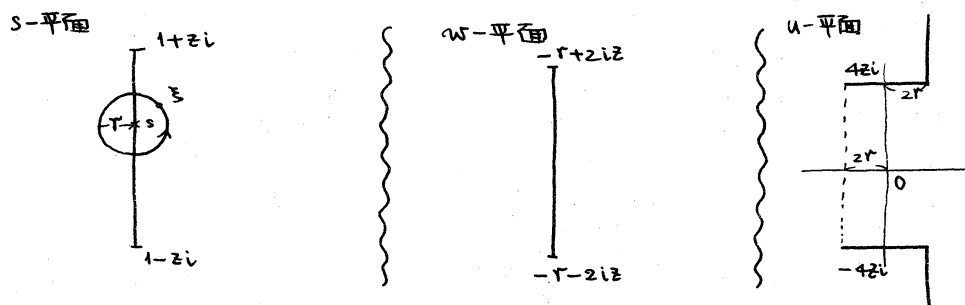
但し ∂_2 は s 平面上で中心を s とし半径 $\frac{r}{2}$ ($r = \frac{c_0}{\log z}$) の円である。 =

ここで、このように考へることは、注意しなければならない。

それは、このように考へることは、 s は $\operatorname{Re} s = 1$ 上に制限されてゐる。

たのであるが, $\frac{\partial}{\partial s}$ の内側にある収数は, 明らかに $\operatorname{Re} s \geq 1-r$ で正則である。従って Cauchy の定理を用いてさしつかえなしの
である。

こゝで念のため, s, w, u の現在の値域を示すと



従って,

$$\operatorname{Re} u = 2r, \quad u \in \mathcal{D}_3 \quad \text{のとき} \quad \operatorname{Re}(\xi + u + w) \geq 1 + \frac{r}{2} \quad \text{より}$$

$$|\zeta(\xi + u + w)| \ll \log z.$$

$$\operatorname{Re}(\xi + u) \geq 1 + \frac{3}{2}r \quad \text{より}$$

$$\left| \frac{1}{\zeta(\xi + u)} \right| \ll \log z$$

$$\operatorname{Re}(\xi + w) \geq 1 - \frac{3}{2}r, \quad |\operatorname{Im}(\xi + w)| \leq 2z + \frac{r}{2} \quad \text{より}$$

$$\left| \frac{1}{\zeta(\xi + w)} \right| \ll \log z.$$

又, $\operatorname{Im} u = \pm 4z$, $u \in \mathcal{D}_3$ のときも容易に同様な評価を得る。

よって

$$\left| \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{1}{\zeta(s+w)} \int_{\substack{u \in \mathcal{D}_3 \\ |\operatorname{Im} u| \geq 4z}} \frac{\zeta(s+u+w)}{\zeta(s+u)} \cdot \frac{z^{2u} - \bar{z}^u}{u^2} \Phi(s, w, u) du \right\} \right|$$

$$\ll (\log z)^4 \int_{\substack{u \in \mathbb{S}_3 \\ |\operatorname{Im} u| \geq 4z}} \left| \frac{z^{2u} - z^u}{u^2} du \right| \ll \frac{(\log z)^4}{z}.$$

＝よす、

$$\begin{aligned} |J_3^{(2)}(s) - J_3^{(n)}(1)| &\ll |s-1| \frac{\log^2 z}{z} \int_{-r-2iz}^{-r+2iz} \left| \frac{z^{2w} - z^w}{w^2} dw \right| \\ &\ll |s-1| \frac{\log^3 z}{z}. \end{aligned}$$

(ii) 次に $J_3^{(1)}(s)$ について考える。

$$\begin{aligned} J_3^{(1)}(s) - J_3^{(1)}(1) &= -\frac{1}{4\pi^2 \log^2 z} \int_{-r-2iz}^{-r+2iz} \frac{z^{2w} - z^w}{w^2} dw \int_1^s \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{1}{\zeta(s+w)} \int_{-2r-4iz}^{-2r+4iz} \frac{\zeta(s+u+w)}{\zeta(s+u)} \cdot \frac{z^{2u} - z^u}{u^2} \Phi(s, w, u) du \right\} ds \end{aligned}$$

s は $\operatorname{Re} s = 1$ 上に動く経路をたどる。そして (i) と同じく、

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{1}{\zeta(s+w)} \int_{-2r-4iz}^{-2r+4iz} \frac{\zeta(s+u+w)}{\zeta(s+u)} \cdot \frac{z^{2u} - z^u}{u^2} \Phi(s, w, u) du \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{d\xi}{(\xi-s)^2 \zeta(\xi+w)} \int_{-2r-4iz}^{-2r+4iz} \frac{\zeta(\xi+u+w)}{\zeta(\xi+u)} \Phi(\xi, u, w) \frac{z^{2u} - z^u}{u^2} du \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_2} \frac{d\xi}{(\xi-s)^2 \zeta(\xi+u)} I(\xi, w) d\xi \quad \text{とする。}$$

いま $I(\xi, w)$ において、積分路を $\operatorname{Re} u = -\frac{C_4}{(\log z)^{\frac{3}{4}}}$ 上へ移してはかまわない。なぜならば、

$$\operatorname{Re} u = -\frac{C_4}{(\log z)^{\frac{3}{4}}} \quad \text{ならば}$$

$$\operatorname{Re}(\xi+u) \geq 1 - \frac{\tau}{2} - C_4 \frac{1}{(\log z)^{\frac{3}{4}}} \geq 1 - 2 \frac{C_4}{(\log z)^{\frac{3}{4}}}$$

(z : 充分大)

$$\operatorname{Re}(\xi+u+w) \geq 1 - \frac{3}{2}\tau - C_4 \frac{1}{(\log z)^{\frac{3}{4}}} \geq 1 - 2 \frac{C_4}{(\log z)^{\frac{3}{4}}}$$

$$\text{又, } |\operatorname{Im}(\xi+u)| \leq 5z + \frac{\tau}{2}, \quad |\operatorname{Im}(\xi+u+w)| \leq 7z + \frac{\tau}{2}.$$

よって,

$$\left| \frac{1}{\zeta(\xi+u)} \right| \ll \log z, \quad |\zeta(\xi+u+w)| \ll \log z.$$

すなわち、簡単な評価により、 $\operatorname{Im} u = \pm 4z$ からの誤差を付けると

$$I(\xi, w) = \int_{-\frac{C_4}{(\log z)^{\frac{3}{4}}} + 4iz}^{-\frac{C_4}{(\log z)^{\frac{3}{4}}} - 4iz} \frac{\zeta(\xi+u+w)}{\zeta(\xi+u)} \Phi(\xi, u, w) \frac{z^{zu} - z^{-u}}{u^2} du + O\left(\frac{1}{z}\right)$$

となる。これより上に注意して $z = z$ かつ

$$\begin{aligned} |I(\xi, w)| &\ll (\log z)^2 \exp\left(-C_4 (\log z)^{\frac{1}{4}}\right) \int_{-C_4 (\log z)^{\frac{3}{4}} - 4iz}^{-C_4 (\log z)^{\frac{3}{4}} + 4iz} \left| \frac{du}{u^2} \right| + O\left(\frac{1}{z}\right) \\ &\ll \exp\left(-\frac{C_4}{2} (\log z)^{\frac{1}{4}}\right). \end{aligned}$$

更に z , $\left| \frac{1}{\zeta(s+w)} \right| \ll \log z$ であるから, 結局

$$\left| \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{1}{\zeta(s+w)} \int_{-2r-4iz}^{-2r+4iz} \frac{\zeta(s+u+w)}{\zeta(s+u)} \cdot \frac{z^u - z^u}{u^2} \Phi(s, w, u) du \right\} \right|$$

$$\ll \log^2 z \exp\left(-\frac{C_4}{2} (\log z)^{\frac{1}{4}}\right)$$

となり,

$$\left| J_3^{(n)}(s) - J_3^{(n)}(1) \right| \ll |s-1| \exp\left(-\frac{C_4}{2} (\log z)^{\frac{1}{4}}\right) \int_{-r-2iz}^{-r+2iz} \left| \frac{dw}{w^2} \right|$$

$$\ll |s-1| \exp\left(-\frac{C_4}{4} (\log z)^{\frac{1}{4}}\right).$$

以上 (i), (ii) をまとめると,

$$\left| J_3(s) - J_3(1) \right| \ll |s-1| \exp\left(-\frac{C_4}{4} (\log z)^{\frac{1}{4}}\right).$$

従って

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{1-iz}^{1+iz} (J_3(z) - J_3(1)) x^s \Gamma(s) \zeta(s) ds \right| \\ & \ll x \exp\left(-\frac{C_4}{4} (\log z)^{\frac{1}{4}}\right) \int_{1-iz}^{1+iz} |(s-1)\zeta(s)\Gamma(s)| |ds| \\ & \ll x \exp\left(-\frac{C_4}{4} (\log z)^{\frac{1}{4}}\right). \end{aligned}$$

9) 7) 及び 8) 節の結果をまとめると

$$S(z) = O\left(\frac{z}{\log z}\right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\epsilon}^{1+i\epsilon} (J_2(s) - J_2(1)) z^s P(s) \zeta(s) ds$$

となり，問題は，この積分の評価に帰着した。この $J_2(s)$ に

11 の部分が最も困難である。もう一度書いておくと，

$$J_2(s) = \frac{1}{2\pi i \log^2 z} \int_{-r-2i\epsilon}^{-r+2i\epsilon} \frac{(z^{2w} - z^w)(z^{2(1-s-w)} - z^{1-s-w})}{(1-s-w)^2 w^2 \zeta(1-w) \zeta(s+w)} \Phi(s, w, 1-s-w) dw$$

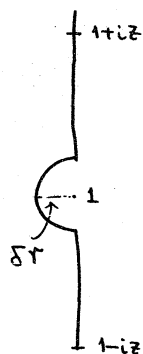
この表現から見えるように， $J_2(s)$ は

$$\operatorname{Re}(s) \geq 1 - \frac{C_0}{\log z}, \quad |\operatorname{Im}(s)| \leq z$$

で正則である。よって

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\epsilon}^{1+i\epsilon} (J_2(s) - J_2(1)) z^s P(s) \zeta(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{D}_0} (J_2(s) - J_2(1)) z^s P(s) \zeta(s) ds \end{aligned}$$

但し， $\mathcal{D}_0$ は下図の積分路である。



$$r = \frac{C_0}{\log z}$$

δ : 充分小.

まず $J_2(1)$ に関することは、すでに $f(1)$ の計算 (4) 節の (iii) で示したように

$$|J_2(1)| \ll \frac{1}{\log z}$$

従って、容易にわかるように

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_0} J_2(1) \chi^s \zeta(s) \Gamma(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} J_2(1) \chi^s \zeta(s) \Gamma(s) ds \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{\sigma=1 \\ \text{Im}(s)=\pm z}}^{\sigma=1} \chi^s \zeta(s) \Gamma(s) J_2(1) ds \end{aligned}$$

よって

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_0} J_2(1) \chi^s \zeta(s) \Gamma(s) ds \right| \ll \frac{\chi}{\log z}.$$

よって

$$S(\chi) = O\left(\frac{\chi}{\log z}\right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_0} J_2(s) \chi^s \zeta(s) \Gamma(s) ds$$

(10) 次に $s \in \mathcal{L}_0$ $s = 1+it$ $|t| \geq 1$ の場合を考えよう。

$$J_2(s) = J_2(1+it)$$

$$= \frac{1}{2\pi i \log^2 z} \int_{-r-2iz}^{-r+2iz} \frac{(z^{2w} - z^{-w})(z^{-2(it+w)} - z^{-(it+w)})}{(w+it)^2 w^2 \zeta(1-w) \zeta(w+1+it)} \Phi(1+it, w, -it-w) dw$$

であるが, 積分路を $\operatorname{Re} w = 0$ 上に移せば, 簡単な評価で,

$\operatorname{Im} w = \pm 2z$ から出る誤差を付けて,

$$\begin{aligned} J_2(1+it) &= \frac{1}{2\pi \log^2 z} \int_{-2z}^{2z} \frac{z^{-2i(v+t)} - z^{-i(v+t)}}{(v+t)^2 \zeta(1+i(v+t))} \cdot \frac{z^{2vi} - z^{vi}}{v^2 \zeta(1-iv)} \Phi(1+it, vi, -i(t+v)) dv + \\ &\quad + O\left(\frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

よって

$$|J_2(1+it)| \ll \frac{1}{\log^2 z} \int_{-2z}^{2z} \left| \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(v+t)\log z\right)}{v+t} \right| \cdot \left| \frac{\sin\left(\frac{1}{2}v \log z\right)}{v} \right| dv + O\left(\frac{1}{z}\right)$$

" z である $t \geq 1$ である" は,

$$|J_2(1+it)| \ll \frac{1}{\log^2 z} \left\{ \int_{-2z}^{-t - \frac{1}{\log z}} + \int_{-t - \frac{1}{\log z}}^{-t + \frac{1}{\log z}} + \int_{-t + \frac{1}{\log z}}^{-\frac{1}{\log z}} + \int_{-\frac{1}{\log z}}^{\frac{1}{\log z}} + \int_{\frac{1}{\log z}}^{2z} \right\} + O\left(\frac{1}{z}\right)$$

と分割する = t により評価するは,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-2z}^{-t - \frac{1}{\log z}} \right| &\ll \int_{-2z}^{-t + \frac{1}{2z}} \frac{dv}{|v(v+t)|} \ll \frac{1}{t} \left\{ \int_{-2z}^{-t - \frac{1}{2z}} \frac{dv}{|v|} + \int_{-2z}^{-t - \frac{1}{2z}} \frac{dv}{|v+t|} \right\} \\ &\ll \frac{1}{t} \log z. \end{aligned}$$

$$-t + \frac{1}{\log z} \geq v \geq -t - \frac{1}{\log z} \quad \text{ならば} \quad \left| \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(v+t)\log z\right)}{v+t} \right| \ll \log z$$

" z である" は,

$$\int_{-t - \frac{1}{\log z}}^{-t + \frac{1}{\log z}} \ll \log z \int_{-t - \frac{1}{\log z}}^{-t + \frac{1}{\log z}} \frac{dv}{|v|} \ll \frac{1}{t}.$$

$$\text{又, } \int_{-t + \frac{1}{\log z}}^{-\frac{1}{\log z}} \ll \frac{1}{t} \left\{ \int_{-t + \frac{1}{\log z}}^{-\frac{1}{\log z}} \frac{dv}{|v|} + \int_{-t + \frac{1}{\log z}}^{-\frac{1}{\log z}} \frac{dv}{|v+t|} \right\} \ll \frac{1}{t} \log z.$$

$$-\frac{1}{\log z} \leq v \leq \log z \text{ の場合 } \left| \frac{\sin(\frac{1}{2}v \log z)}{v} \right| \ll \log z \text{ であるから,}$$

$$\int_{\frac{1}{\log z}}^{\frac{1}{\log z}} \ll \log z \int_{\frac{1}{\log z}}^{\frac{1}{\log z}} \frac{dv}{|v+t|} \ll \frac{1}{t}.$$

更に 2,

$$\int_{\frac{1}{\log z}}^{2z} \ll \frac{1}{t} \left\{ \int_{\frac{1}{\log z}}^{2z} \frac{dv}{v} + \int_{\frac{1}{\log z}}^{2z} \frac{dv}{v+t} \right\} \ll \frac{\log z}{t}.$$

以上をまとめると, $t \geq 1$ のとき

$$|J_2(1+it)| \ll \frac{1}{t \log z}.$$

又, 明らかに同じ不等式が $t \leq -1$ にも成り立つ。

よって

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{\mathcal{C}_0 \\ |\operatorname{Im} s| \geq 1}} J_2(s) \chi^s \zeta(s) \Gamma(s) ds \right|$$

$$\ll \frac{x}{\log z} \int_1^z \frac{1}{t} |\zeta(1+it)\Gamma(1+it)| dt$$

$$\ll \frac{x}{\log z}.$$

11) 従, z

$$S(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{D}_0} x^s \zeta(s) \Gamma(s) J_2(s) ds + O\left(\frac{x}{\log z}\right).$$

$|\operatorname{Im} s| \leq 1$

さて, $|\operatorname{Im} s| \leq 1$ のときは, まず積分路 $\mathcal{D}_0$ $\operatorname{Re} w = 0 \wedge \operatorname{Im} w > 1$ 上

$$J_2(s) = -\frac{1}{2\pi \log^2 z} \int_{-2z}^{2z} \frac{(z^{2v} - z^{v^2})(z^{2(1-s-iv)} - z^{1-s-iv})}{(1-s-iv)^2 v^2 \zeta(1-iv) \zeta(1+iv)} \Phi(s, iv, 1-s-iv) dv +$$

$$+ O\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$= -\frac{1}{2\pi \log^2 z} \left\{ \int_2^{2z} + \int_{-2}^{-2} + \int_{-2z}^{-2} \right\} + O\left(\frac{1}{z}\right)$$

とわかる。まず $|v| \geq 2$ に対応する 2つの積分については,

容易に

$$\left| \int_2^{2z} \right|, \left| \int_{-2z}^{-2} \right| \ll \int_2^{2z} \frac{1}{|v^2 \zeta(1-iv)|} \cdot \frac{1}{|1-s-iv|^2 |\zeta(1+iv)|} dv$$

$$\ll \int_2^{2z} \frac{\log(v+1)}{v^2} \cdot \frac{\log(v+1)}{v^2 + |1-s|^2} dv \ll 1.$$

§ 3.2 $|Im s| \leq 1$ に対して

$$J_2(s) = -\frac{1}{2\pi \log^2 z} \int_{-2}^2 \frac{(z^{2v} - z^{2v}) (z^{2(1-s-v)} - z^{1-s-v})}{(1-s-v)^2 v^2 \zeta(1-v) \zeta(s+iv)} \Phi(s, iv, 1-s-iv) dv +$$

$$+ O\left(\frac{1}{\log^2 z}\right)$$

$$= L(s) + O\left(\frac{1}{\log^2 z}\right), \quad \text{etc.}$$

§ 3.3

$$S(x) = O\left(\frac{x}{\log z}\right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{s \in \mathcal{D}_0 \\ |Im s| \leq 1}} L(s) x^s \zeta(s) \Gamma(s) ds +$$

$$+ O\left(\frac{1}{\log^2 z} \int_{\substack{s \in \mathcal{D}_0 \\ |Im s| \leq 1}} |x^s \zeta(s) \Gamma(s) ds|\right).$$

(3.3), $|\zeta(s)| \ll \frac{1}{|s-1|}$ ($|s| \leq 1$) に対して

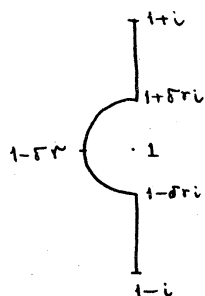
$$\int_{\substack{s \in \mathcal{D}_0 \\ |Im s| \leq 1}} |x^s \zeta(s) \Gamma(s) ds| \ll x \left\{ \int_{\substack{s \in \mathcal{D}_0 \\ |s-1| \leq \delta r}} \frac{|ds|}{|s-1|} + \int_{\delta r}^1 \frac{dt}{t} \right\}$$

$$\ll x \log \log z.$$

§ 3.4

$$S(x) = O\left(\frac{x}{\log z}\right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{s \in \mathcal{D}_0 \\ |Im s| \leq 1}} L(s) x^s \zeta(s) \Gamma(s) ds.$$

12) 所で, 現在 s は, 下図の範囲にある訳であるが,



== ところで s を半円部分に制限すると

$$|L(s)| \ll \frac{1}{\log^2 z} \int_{-2}^2 \left| \frac{z^{2iv} - z^{-2iv}}{v^2 \zeta(1-iv)} \right| \left| \frac{z^{2(1-s-iv)} - z^{1-s-iv}}{(1-s-iv)^2 \zeta(s+iv)} \right| dv$$

となり

$$\left| \frac{1}{v^2 \zeta(1-iv)} \right|, \quad \left| \frac{1}{(1-s-iv)^2 \zeta(s+iv)} \right|$$

は共に有界. よって

$$|L(s)| \ll \frac{1}{\log^2 z} \int_{-2}^2 \left| \frac{\sin\left(\frac{1}{2}v \log z\right)}{v} \right| \left| \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(i(s-1)+v) \log z\right)}{1-s-iv} \right| dv$$

$$\ll \frac{1}{\log^2 z} \int_{-2 \log z}^{2 \log z} \left| \frac{\sin\left(\xi + \frac{1}{2}(1-s)i \log z\right)}{\xi - \frac{1}{2}(1-s)i \log z} \right| d\xi.$$

しからに

$$|(s-1) \log z| = \delta C. \quad (\delta: \text{充分小})$$

であるから

$$|\xi| \leq \delta C. \quad \text{のとき被積分函数は有界}$$

又, $|\xi| > \delta C. \quad \text{のときは,}$

$$\left| \frac{1}{2}(1-s)i \log z - \bar{s} \right| \geq \frac{|\bar{s}|}{2}, \quad \left| \sin \left(\bar{s} + \frac{1}{2}i(1-s) \log z \right) \right| \ll 1$$

よって

$$\int_{|\bar{s}| > \delta C_0} \ll \int_{|\bar{s}| \geq \delta C_0} \frac{d\bar{s}}{|\bar{s}|^2} \ll 1.$$

よって, $s \in \mathcal{S}_0$, $|1-s| = \delta r$ のとき

$$|L(s)| \ll \frac{1}{\log z}$$

である。よって

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{s \in \mathcal{S}_0 \\ |1-s| = \delta r}} L(s) x^s \zeta(s) \Gamma(s) ds \right| \\ & \ll \frac{x}{\log z} \int_{|s-1| = \delta r} \frac{|ds|}{|s-1|} \ll \frac{x}{\log z}. \end{aligned}$$

以上より

$$S(x) = O\left(\frac{x}{\log z}\right) + \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{1+\delta r i}^{1+i} + \int_{1-i}^{1-\delta r i} \right\} x^s \zeta(s) L(s) \Gamma(s) ds$$

となつたのである。

13) さて, $|S(1+it)| \ll \frac{1}{|t|}$ $0 < |t| \leq 1$ に注意して,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{1+\delta r}^{1+i} x^s \zeta(s) L(s) \Gamma(s) ds \right|$$

$$\ll \chi \int_{\delta r}^1 \frac{|L(1+it)|}{t} dt,$$

であるが,

$$|L(1+it)| \ll \frac{1}{\log^2 z} \int_{-2}^2 \left| \frac{z^{2iv} - z^{-iv}}{v^2 \zeta(1-iv)} \right| \left| \frac{z^{2i(t+v)} - z^{i(t+v)}}{(t+v)^2 \zeta(1+i(t+v))} \right| dv$$

$$\ll \frac{1}{\log^2 z} \int_{-2}^2 \left| \frac{\sin(\frac{1}{2} v \log z)}{v} \right| \left| \frac{\sin(\frac{1}{2} (t+v) \log z)}{t+v} \right| dv$$

$$= \frac{1}{\log^2 z} \left\{ \int_{-2}^{-t-\frac{\delta r}{2}} + \int_{-t-\frac{\delta r}{2}}^{-t+\frac{\delta r}{2}} + \int_{-t+\frac{\delta r}{2}}^{-\frac{\delta r}{2}} + \int_{-\frac{\delta r}{2}}^{\frac{\delta r}{2}} + \int_{\frac{\delta r}{2}}^2 \right\}$$

$$= W_1(t) + W_2(t) + W_3(t) + W_4(t) + W_5(t)$$

と分割して評価する。

$$(i) \quad W_2(t) \text{ においては } \left| \frac{\sin(\frac{1}{2} (t+v) \log z)}{t+v} \right| \ll \log z \quad \text{である} \quad \text{且} \rightarrow$$

$|v| \geq \frac{t}{2}$ であるから

$$W_2(t) \ll \frac{1}{t \log z} \int_{-t-\frac{\delta r}{2}}^{-t+\frac{\delta r}{2}} dv \ll \frac{1}{t \log^2 z}.$$

よって

$$\int_{\delta r}^1 \frac{W_2(t)}{t} dt \ll \frac{1}{\log^2 z} \int_{\delta r}^1 \frac{dt}{t^2} \ll \frac{1}{\log^2 z}$$

$W_4(t)$ については全く同様にし

$$\int_{\delta r}^1 \frac{W_4(t)}{t} dt \ll \frac{1}{\log z}.$$

(ii) $W_3(t)$ については,

$$\begin{aligned} W_3(t) &\ll \frac{1}{\log^2 z} \int_{-t+\frac{\delta}{2}r}^{-\frac{\delta}{2}r} \frac{dv}{|v(t+v)|} \\ &= \frac{1}{\log^2 z} \int_{-t\log z+\frac{\delta}{2}c_0}^{-\frac{\delta}{2}c_0} \frac{d\xi}{|\xi(t\log z+\xi)|} \quad (\because r = \frac{c_0}{\log z}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{t\log^2 z} \int_{-\frac{t}{2}\log z+\frac{\delta}{2}c_0}^{\frac{t}{2}\log z-\frac{\delta}{2}c_0} \left| \frac{1}{\xi-\frac{t}{2}\log z} - \frac{1}{\xi+\frac{t}{2}\log z} \right| d\xi$$

$$\ll \frac{1}{t\log^2 z} \int_{\frac{\delta}{2}c_0}^{t\log z-\frac{\delta}{2}c_0} \frac{d\xi}{\xi}$$

$$\ll \frac{1}{t\log^2 z} \left\{ |\log(t\log z)| + O(1) \right\}.$$

$\delta > 2$

$$\int_{\delta r}^1 \frac{W_3(t)}{t} dt \ll \frac{1}{\log^2 z} \int_{\delta r}^1 \frac{|\log(t\log z)| + 1}{t^2} dt$$

$$\ll \frac{1}{\log z} \int_{\delta C_0}^{\log z} \frac{|\log \xi| + c}{\xi^2} d\xi \ll \frac{1}{\log z}.$$

(iii) 次に $W_1(t)$ には τ は,

$$\begin{aligned} W_1(t) &\ll \frac{1}{\log^2 z} \int_{-2}^{-t - \frac{\delta}{2}r} \frac{dv}{|v(t+v)|} \\ &= \frac{1}{\log^2 z} \sum_{1 \leq j \ll \log z} \int_{-t - \frac{\delta}{2}r(j+1)}^{-t - \frac{\delta}{2}rj} \frac{dv}{|v(t+v)|} \\ &\ll \frac{1}{\log^2 z} \sum_{1 \leq j \ll \log z} \frac{1}{rj} \int_{-t - \frac{\delta}{2}r(j+1)}^{-t - \frac{\delta}{2}rj} \frac{dv}{|v|} \\ &\ll \frac{1}{\log^2 z} \sum_{1 \leq j \ll \log z} \frac{1}{rj} \cdot \frac{r}{t + \frac{\delta}{2}rj} = \frac{1}{\log^2 z} \sum_{1 \leq j \ll \log z} \frac{1}{j(t + \frac{\delta}{2}rj)}. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \int_{\delta r}^1 \frac{W_1(t)}{t} dt &\ll \frac{1}{\log^2 z} \sum_{1 \leq j \ll \log z} \frac{1}{j} \int_{\delta r}^1 \frac{dt}{t(t + \frac{\delta}{2}rj)} \\ &\ll \frac{1}{\log^2 z} \sum_{1 \leq j \ll \log z} \frac{1}{j} \int_{\delta C_0}^{\log z} \frac{d\xi}{\xi(\xi + \frac{c_0 \delta}{2}j)} \end{aligned}$$

==

$$\int_{\delta C_0}^{\log z} \frac{d\xi}{\xi(\xi + \frac{c_0 \delta}{2}j)} = \int_{\delta C_0}^j + \int_j^{\log z}$$

$$\ll \frac{1}{j} \int_{\sigma_0}^j \frac{d\xi}{\xi} + \int_j^{\log z} \frac{d\xi}{\xi^2} \ll \frac{\log(j+1)}{j}$$

により

$$\int_{\sigma r}^1 \frac{W_1(t)}{t} dt \ll \frac{1}{\log z} \sum_j \frac{\log(j+1)}{j^2} \\ \ll \frac{1}{\log z}.$$

全く同様にして

$$\int_{\sigma r}^1 \frac{W_5(t)}{t} dt \ll \frac{1}{\log z}$$

も確かめられる。

以上 (i), (ii), (iii) より

$$\int_{\sigma r}^1 \frac{|L(1+it)|}{t} dt \ll \frac{1}{\log z}.$$

これは、本節のはじめに示したことから

$$S(x) \ll \frac{x}{\log x}$$

を意味する。

証明 終り。

あとがきにかえて，次の問題を提出しておく。

問題

定理を算術級数の場合に拡張せよ。

もしも，これが最も理想的な形で解決されたならば， L -
 函数のゼロ実密度についての Linnik の定理が次のように改良
 されるであろう。

$$\sum_{\chi \bmod q} N(0, T, \chi) \ll q^{\left(\frac{q}{4} + \varepsilon\right)(1-\sigma)} \quad (T \ll 1).$$

参考文献

- [1] M.B. Barban : The large sieve method and its applications in the theory of
 numbers. Russian Math. Surveys, 21(1966), 49-103.
- [2] M.B. Barban and P.P. Vohov : On an extremal problem, Trans. Moscow
 Math. Soc., 18 (1968), 91-99.
- [3] E. Bombieri : On the large sieve. Mathematika, 12 (1965), 201-225.
- [4] I. Kobayashi : A note on the Selberg sieve and the large sieve, Proc.
 Japan Acad., 49 (1973), 1-5.
- [5] Y. Motohashi : On some improvements of the Brun-Titchmarsh theorem.
 J. Math. Soc. Japan, 26 (1974), 306-323.

- [6] Y. Motohashi : On some improvements of the Brun-Titchmarsh Theorem, II. 数理解析研究所講究録 193 号 (1973).
- [7] A. Rényi : On the representation of an even number as the sum of a prime and an almost prime. A.M.S. Transl. (2) 19 (1962), 299-321.
- [8] A. Selberg : The general sieve-method and its place in prime number theory. Proc. Int. Math. Congr. 1950, Vol. I, 286-292.
- [9] 内山三郎 : Goldbach-Rényi の定理に ついて.
数理解析研究所講究録 84 号 (1970).
- [10] A. I. Vinogradov : On the density hypothesis for Dirichlet L-functions. Izv. Akad. Nauk SSSR. SM, 29 (1965), 403-434.

— Summary —

A complete proof is given to the somewhat ambiguous claim of Barban-Vehov [2], which seems to throw light on the further improvement of the Selberg sieve. At the end of paper the problem to find the analogue in the case of arithmetic progressions is set out, and its connection with the density theorem of Linnik is suggested.

Y. MOTOHASHI

Nihon Univ., Tokyo.