

シャノンのゲームと 2重マトロイド

Shannon switching games and double matroids

阪大・医療短大

山崎洋平

Yōhei YAMASAKI

Osaka Univ.

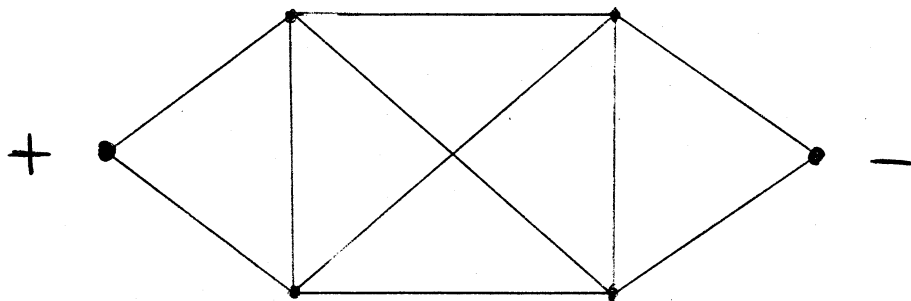
シャノンのゲームは2端点をもつグラフ上で2人の競技者が交互着手することにより次のように競技される：

競技者 Short は自分の番のとき辺を1つ短絡消去し、

競技者 Cut は自分の番のとき辺を1つ消去する。

最終的に2端点が結合すれば Short が、

最後まで結合しなければ Cut の勝ちである。



このゲームのヴァリエーションとして端点の数を増やすことが考えられる。また勝敗の規定もいろいろ考えられる。

しかしこのゲームが最も一般的で無理なく解決するのは次に挙げる「2重マトロイド」を用いた設定であろう：

有限集合 E ，その上のマトロイド構造 M' ， M ，定数 d の4つ組で $\deg = \text{rank}' - \text{rank}$ が増加的なものを考える。先ほどの例では、 E は辺の全体、 M' は forest の全体、 M は2端点を結合しても forest であるものの全体、 d は1である。短絡消去、消去の結果 E ， M' ， M はそれに応じて変形する。また短絡消去の結果 $\deg(E)$ が1小さくなったときは d を1減じる。着手を繰り返した結果 $\deg(E)$ が0になれば Short の勝ちである。

この定式化はよいことづくめである。第一に必勝法理論に関しては古典的なシャノンのゲームに対する理論がより簡明化された形で適用される。すなわち M -生成な M' の元の対のうち対称差の位数を最小とするもの (A, B) の $\deg$ の平均が d の減少するであろう値である（平均が半整数のときは先・後に連動して切り上げ・切り捨て）。

第二点はこの範疇がかなり広く、次のような多端点のシャノン風ゲームを含み、その中には少し変形すると「本質的」に難しいものまであるということである（すなわち、 $((\#))$ に関しては「2対」を「3対」に変えると「非可逆」）。

$((T^k))$ 結合の結果端点を k 以上減じれば Short の勝ち

$((CCC))$ 所定のグループそれぞれについて、含まれる端点をすべて結合すれば Short の勝ち

$((M^\lambda))$ 結合される端点の個数がどれも $0 \bmod \lambda$ になれば Short の勝ち

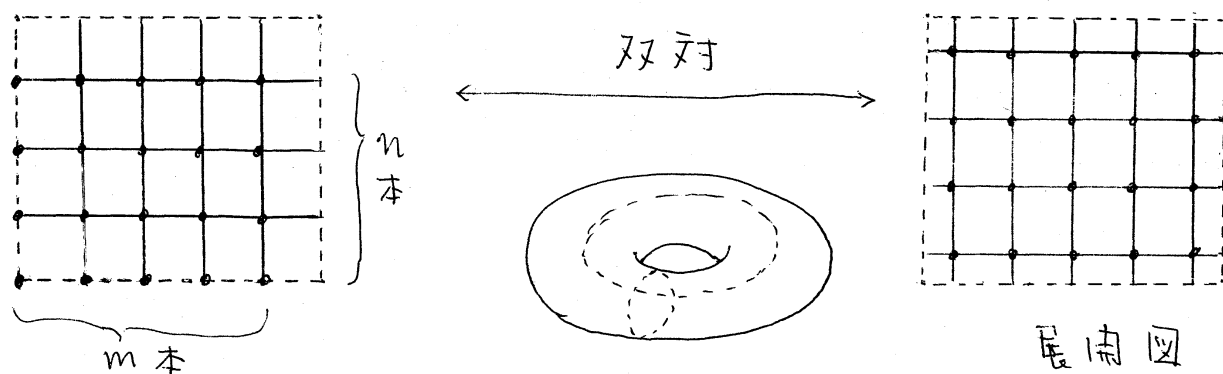
$((\#))$ 2対の端点のうち少なくとも1対を結合すれば Short の勝ち

第三点は理論的にすっきりしているという点である。すなわちここには「端点」や「架空の辺」はなく、また両競技者の立場は $\text{cycle} \longleftrightarrow \text{cut}$ のような翻訳抜きに全く対等である。

$$E, M', M, d \longleftrightarrow E, M^*, M'^*, d^*$$

$$\text{ここに } d^* = \deg E - d + 1$$

2重マトロイドという考え方は多様体上のグラフをマトロイド化するのにも有効である。連結な球面（平面）的グラフとその双対の関係はマトロイドにも反映される。しかし、他の多様体の上に描かれたグラフではその限りではない。トーラスに m 本の経線と n 本の緯線を描いた mn 頂点と $2mn$ 辺をもつグラフでは、心情的にはこの双対としてこれを平行移動して得られる同型なグラフを考えたい。しかし元のグラフのマトロイドを考えると生成木は $mn - 1$ 辺からなり、双対マトロイドとは同型ではない。



$$|\text{生成木}| = mn - 1$$

$$|\text{補生成木}| = mn + 1$$

$$|\text{生成木}| = mn - 1$$

一般に 2 次元閉多様体 V の胞複体から導かれるグラフに対しては $M = \{\text{サイクルを持たない辺集合}\}$, $M' = \{S \mid \text{サイクルで生成される } H_1(V, \mathbb{Z}_2) \text{ の部分群の次元が } |S| - \text{rank } S \text{ である辺集合}\}$ と考えると (M', M) は 2 重マトロイドをなし、 V 上のグラフとしての双対は 2 重マトロイドとしての双対に反映する。

$$(M', M) \longleftrightarrow (M^*, M'^*)$$

多様体 (球面を含む) 上のグラフが多様体とグラフの 2 重構造であるように、そのマトロイド版についても 2 重構造を考えるのが妥当であると思われる。

参考文献

- [1] 組み合わせゲームの裏表、シュプリンガー・
フェアラーク東京、1989
- [2] Shannon switching games without terminals II,
Graphs and Combinatorics 5, 1989, 275-282
- [3] Difficulty in particular Shannon-like games,
Discrete Applied Math. 30, 1991, 87-90
- [4] Shannon switching games without terminals III,
Graphs and Combinatorics (to appear)
- [5] The reconstruction of a double matroid from
a game (submitted)