

Non-vanishing に関する Stefanicki の定理について

名大多元数理 神谷諭一 (Yuichi Kamiya)

N は自然数とする。 $\Gamma_0(N)$, $\Gamma_1(N)$ は

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 (N) \right\}, \quad \Gamma_1(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid \begin{matrix} a \equiv d \equiv 1 (N) \\ c \equiv 0 (N) \end{matrix} \right\}$$

なる $SL_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群とする。自然数 k , 上半平面上の正則関数 $f(z)$, $GL_2^+(\mathbb{Q})$ の元 γ に対し, $f|[\gamma]_k$ を

$$(f|[\gamma]_k)(z) := (\det \gamma)^{k/2} (cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right), \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

で定義する。 $S_k(\Gamma_1(N))$ は $\Gamma_1(N)$ に対する重さ k の cusp form のなす空間とし, $S_k(N, \psi)$ は

$$S_k(N, \psi) := \left\{ f \in S_k(\Gamma_1(N)) \mid f|[\gamma]_k = \psi(d)f, \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \right\}$$

なる $S_k(\Gamma_1(N))$ の部分空間とする。但し ψ は mod N の Dirichlet 指標とする。

次に, $s = \sigma + it$ は複素変数, χ は mod q の Dirichlet 指標,

$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_f(n) e^{2\pi i n z} \in S_k(\Gamma_1(N))$ とするとき, L 関数を

$$L(f, \chi, s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n) \hat{a}_f(n)}{n^s}, \quad \hat{a}_f(n) := \hat{a}_f(n) n^{-(k-1)/2}, \quad \sigma > 1$$

で定義する。特に, $f \in S_k(N, \psi)$, $(N, q) = 1$, かつ χ が原始的ならば $L(f, \chi, s)$ は $\mathbb{C}$ 上正則に解析接続され、関数等式

$$\left(\frac{2\pi}{\sqrt{N}q}\right)^{-\lambda} \Gamma\left(\lambda + \frac{k-1}{2}\right) L(f, \chi, \lambda) = \mu \left(\frac{2\pi}{\sqrt{N}q}\right)^{\lambda-1} \Gamma\left(\frac{k+1}{2} - \lambda\right) L(f|H_N, \bar{\chi}, 1-\lambda) \quad (1)$$

を持つ。但し $\mu := i^k \psi(q) \chi(N) W(\chi)^2 q^{-1}$ ($W(\chi)$ は Gauss 和),

$f|H_N := f\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}\right]_R \in S_R(N, \bar{\psi})$ である。

さて, 表題にある Stefanicki の定理 ([2] 参照) について述べよう。

Stefanicki の定理 (の一部) q は $(N, q) = 1$ なる十分大きな自然数とする。 $f \in S_R(N, \psi)$ は normalized newform とする。 $\lambda = \sigma_0$

$(1/2 \leq \sigma_0 < 1)$ で $L(f, \chi, \lambda)$ が零にならないような $\text{mod } q$ の原始指標の数は

$$\gg \begin{cases} \phi^*(q) & , \quad 1/2 < \sigma_0 < 1 \\ \frac{\phi^*(q)^2}{2^{\nu(q)} q \log q} & , \quad \sigma_0 = 1/2 \end{cases} \quad (2)$$

で下から押えられる。但し $\phi^*(q)$ は $\text{mod } q$ の原始指標の数, $\nu(q)$ は q の相異なる素因子の数とする。

上記の定理の証明方法について簡単に述べよう。まず,

$$\sum_{\chi \text{ mod } q}^* L(f, \chi, \sigma_0) \sim \phi^*(q), \quad 1/2 \leq \sigma_0 < 1 \quad (3)$$

を示す。ここで $\sum_{\chi \text{ mod } q}^*$ は原始指標にわたる和を意味する。次に,

$$\begin{aligned} \sum_{\chi \text{ mod } q}^* |L(f, \chi, \sigma_0)|^2 &\sim \left(\sum_{\substack{n=1 \\ (n, q)=1}}^{\infty} \frac{|a_+(n)|^2}{n^{2\sigma_0}} \right) \phi^*(q), \quad 1/2 < \sigma_0 < 1 \\ \sum_{\chi \text{ mod } q}^* |L(f, \chi, 1/2)|^2 &\ll 2^{\nu(q)} q \log q \end{aligned} \quad (4)$$

を示す。これらと不等式

$$\left| \sum_{\chi \text{ mod } q}^* L(f, \chi, \sigma_0) \right|^2 \leq \left(\sum_{\substack{\chi \text{ mod } q \\ L(f, \chi, \sigma_0) \neq 0}}^* 1 \right) \left(\sum_{\chi \text{ mod } q}^* |L(f, \chi, \sigma_0)|^2 \right) \quad (5)$$

を用いれば上記の定理を得る。

そこで, (4)における評価を良くすれば, 直ちに (2)も改善されることがわかる。以下, (4)より少し良い評価を得るために, Balasubramanian と Ramachandra の方法 ([1] 参照) に従い

$\sum_{x \bmod q}^* |L(f, x, 1/2)|^2$ を上から評価する^(*)。

補題 1 $a_n \in \mathbb{C}$, $n=1, 2, 3, \dots$ は次の条件を満たすとする。

: $\sum_{n \leq x} |a_n|^2 \ll x$ が $x \geq 1$ なる x について一様に成り立つ。

(i) $x_2 > x_1 > 0$, $\sigma < 1/2$ とすると

$$\sum_{x \bmod q} \left| \sum_{x_1 < n \leq x_2} \frac{\chi(n) a_n}{n^\sigma} \right|^2 \ll \phi(q) \left(1 + \frac{[x_2] - [x_1] - 1}{q} \right) x_2^{1-2\sigma}$$

が q, x_1, x_2 について一様に成り立つ。($\phi(q)$ は Euler 関数)

(ii) $y \geq 1$, $\sigma > 3/2$ とすると

$$\sum_{x \bmod q} \left| \sum_{n > y} \frac{\chi(n) a_n}{n^\sigma} \right|^2 \ll \phi(q) \left(1 + \frac{y}{q} \right) y^{1-2\sigma}$$

が q, y について一様に成り立つ。

(iii) x について一様に

$$\sum_{x \bmod q} \left| \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n) a_n}{n^{1/2}} \right|^2 \ll \phi(q) \left(1 + \frac{x}{q} \right) \log(x+1)$$

が成り立つ。

^(*) 私がこの内容について講演させて頂いたときには、この二乗平均を独自の方法で評価できたと思っていたのですが、その後、[1]にほとんど同じ方法が使われていることがわかりました。従って以下の内容に私自身のアイデアはありません。

(証明) (i) 若干の計算により

$$\sum_{x \bmod q} \left| \sum_{x_1 < n \leq x_2} \frac{\chi(n) a_n}{n^\sigma} \right|^2 \leq \phi(q) \left(1 + \left[\frac{[x_2] - [x_1] - 1}{q} \right] \right) \sum_{x_1 < n \leq x_2} \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}} \quad (6)$$

を得るので $\sum_{x_1 < n \leq x_2} |a_n|^2 n^{-2\sigma} \ll x_2^{1-2\sigma}$ と合わせて主張を得る。

(ii) $\sigma > 3/2$ ならば $\sum_{n > y} \chi(n) a_n n^{-\sigma}$ は絶対収束するので足す順序

をかえられる。そこで

$$\begin{aligned} \sum_{x \bmod q} \left| \sum_{n > y} \frac{\chi(n) a_n}{n^\sigma} \right|^2 &\leq \sum_{x \bmod q} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{jy < n \leq (j+1)y} \frac{\chi(n) a_n}{n^\sigma} \right| \right)^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j \log^2(j+1)} \sum_{j=1}^{\infty} j \log^2(j+1) \sum_{x \bmod q} \left| \sum_{jy < n \leq (j+1)y} \frac{\chi(n) a_n}{n^\sigma} \right|^2 \end{aligned}$$

となる。ここで (i) を用いると

$$\ll \phi(q) \left(1 + \frac{y}{q} \right) \sum_{j=1}^{\infty} j \log^2(j+1) \sum_{jy < n \leq (j+1)y} \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}} \quad (7)$$

となる。 $\sum_{jy < n \leq (j+1)y} |a_n|^2 n^{-2\sigma} \ll (jy)^{-2\sigma} (j+1)y$ であるから

$$\ll \phi(q) \left(1 + \frac{y}{q} \right) y^{1-2\sigma} \sum_{j=1}^{\infty} j^{2(1-\sigma)} \log^2(j+1)$$

となり主張を得る。(要するに多少 σ の条件が強くなったが

(i) と同じ評価を得た。)

(iii) (6) と $\sum_{n \leq x} |a_n|^2 n^{-1} \ll \log(x+1)$ から主張は従う。 //

補題 2 $f \in S_k(N, \psi)$, $(N, q) = 1$, χ は $\bmod q$ の原始指標, $x \geq 1$,

$y \geq 1$ とする。このとき

$$\begin{aligned} L(f, \chi, 1/2 + it) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n) a_f(n)}{n^{1/2+it}} e^{-\left(\frac{n}{x}\right)^2} + \mu \left(\frac{2\pi}{\sqrt{Nq}} \right)^{2it} \frac{\Gamma(k/2 - it)}{\Gamma(k/2 + it)} \sum_{n \leq y} \frac{\bar{\chi}(n) a_{f|H_N}(n)}{n^{1/2-it}} \\ &\quad - \frac{\mu}{2\pi i} \left(\frac{2\pi}{\sqrt{Nq}} \right)^{2it} \left\{ \int_{(1/4)} \left(\frac{4\pi^2 x}{Nq^2} \right)^w \frac{\Gamma(k/2 - it - w)}{\Gamma(k/2 + it + w)} \frac{\Gamma(1+w/2)}{w} \sum_{n \leq y} \frac{\bar{\chi}(n) a_{f|H_N}(n)}{n^{1/2-it-w}} dw \right. \\ &\quad \left. + \int_{(-3/2)} \left(\frac{4\pi^2 x}{Nq^2} \right)^w \frac{\Gamma(k/2 - it - w)}{\Gamma(k/2 + it + w)} \frac{\Gamma(1+w/2)}{w} \sum_{n > y} \frac{\bar{\chi}(n) a_{f|H_N}(n)}{n^{1/2-it-w}} dw \right\} \end{aligned}$$

(証明) ヌリン変換により

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n) a_f(n)}{n^{1/2+it}} e^{-(\frac{n}{x})^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(1)} L(f, \chi, 1/2+it+w) x^w \frac{\Gamma(1+w/2)}{w} dw$$

を得る。右辺の積分路を移動させて

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n) a_f(n)}{n^{1/2+it}} e^{-(\frac{n}{x})^2} = L(f, \chi, 1/2+it) + \frac{1}{2\pi i} \int_{(-3/2)} L(f, \chi, 1/2+it+w) x^w \frac{\Gamma(1+w/2)}{w} dw \quad (8)$$

を得る。(この積分路の移動で、被積分関数の $w=0$ における留数のみを考えるために $\Gamma(1+w/2)/w$ を導入している。積分路を $\Re w = -3/2$ まで移動させる理由は、もう少し後でわかる。)こ

こで関数等式 (1) を用いて計算すると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{(-3/2)} L(f, \chi, 1/2+it+w) x^w \frac{\Gamma(1+w/2)}{w} dw \\ &= \frac{\mu}{2\pi i} \left(\frac{2\pi}{\sqrt{Nq}} \right)^{2it} \left\{ \int_{(-3/2)} \left(\frac{4\pi^2 x}{Nq^2} \right)^w \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-it-w)}{\Gamma(\frac{1}{2}+it+w)} \frac{\Gamma(1+w/2)}{w} \sum_{n \leq y} \frac{\bar{\chi}(n) a_{f|H_N}(n)}{n^{1/2-it-w}} dw \right. \\ & \quad \left. + \int_{(-3/2)} \left(\frac{4\pi^2 x}{Nq^2} \right)^w \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-it-w)}{\Gamma(\frac{1}{2}+it+w)} \frac{\Gamma(1+w/2)}{w} \sum_{n > y} \frac{\bar{\chi}(n) a_{f|H_N}(n)}{n^{1/2-it-w}} dw \right\} \end{aligned}$$

となる。上式の1番目の積分の積分路を $\Re w = 1/4$ まで移動させ、これを (8) へ代入すると補題の主張を得る。 //

さて、補題2と同じ記号のもとで

$$\begin{aligned} I(x, \chi) &:= \sum_{n > x} \frac{\chi(n) a_f(n)}{n^{1/2+it}} e^{-(\frac{n}{x})^2} \\ J(x, y, \chi) &:= \int_{(1/4)} \left(\frac{4\pi^2 x}{Nq^2} \right)^w \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-it-w)}{\Gamma(\frac{1}{2}+it+w)} \frac{\Gamma(1+w/2)}{w} \sum_{n \leq y} \frac{\bar{\chi}(n) a_{f|H_N}(n)}{n^{1/2-it-w}} dw \\ K(x, y, \chi) &:= \int_{(-3/2)} \left(\frac{4\pi^2 x}{Nq^2} \right)^w \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-it-w)}{\Gamma(\frac{1}{2}+it+w)} \frac{\Gamma(1+w/2)}{w} \sum_{n > y} \frac{\bar{\chi}(n) a_{f|H_N}(n)}{n^{1/2-it-w}} dw \end{aligned}$$

とおき、これらの原始指標に関する二乗平均を評価する。

最初に、 $\sum_{n \leq x} |a_f(n)|^2 \ll x$, $\sum_{n \leq x} |a_{f|H_N}(n)|^2 \ll x$ となることに注意しておこう。

(7) 式により

$$\begin{aligned}
 \sum_{x \bmod q}^* |I(x, x)|^2 &\ll \phi(q) \left(1 + \frac{x}{q}\right) \sum_{j=1}^{\infty} j \log^2(j+1) \sum_{jx < n \leq (j+1)x} \frac{|a_+(n)|^2}{n} e^{-2\left(\frac{n}{x}\right)^2} \\
 &\ll \phi(q) \left(1 + \frac{x}{q}\right) \sum_{j=1}^{\infty} j \log^2(j+1) \sum_{jx < n \leq (j+1)x} |a_+(n)|^2 \cdot \frac{x^4}{n^5} \\
 &\ll \phi(q) \left(1 + \frac{x}{q}\right) \sum_{j=1}^{\infty} j^{-3} \log^2(j+1) \\
 &\ll \phi(q) \left(1 + \frac{x}{q}\right)
 \end{aligned} \tag{9}$$

を得る。次に, Cauchy-Schwarz の不等式により

$$\begin{aligned}
 \sum_{x \bmod q}^* |J(x, y, x)|^2 &\leq \int_{(1/4)} \left| \frac{\Gamma(k/2 - it - w)}{\Gamma(k/2 + it + w)} \frac{\Gamma(1+w/2)}{w} \right| |dw| \\
 &\quad \times \int_{(1/4)} \left| \frac{\Gamma(k/2 - it - w)}{\Gamma(k/2 + it + w)} \frac{\Gamma(1+w/2)}{w} \right| \left(\frac{4\pi^2 x}{Nq^2} \right)^{1/2} \sum_{x \bmod q}^* \left| \sum_{n \leq y} \frac{\bar{\chi}(n) a_{+|H_N(n)}}{n^{1/2 - it - w}} \right|^2 |dw|
 \end{aligned}$$

となる。ここで補題 1 (i) を用いると

$$\ll \phi(q) \left(1 + \frac{y}{q}\right) \left(\frac{xy}{q^2}\right)^{1/2} \left(\int_{(1/4)} \left| \frac{\Gamma(k/2 - it - w)}{\Gamma(k/2 + it + w)} \frac{\Gamma(1+w/2)}{w} \right| |dw| \right)^2$$

となる。若干の計算により ($\tau := |t| + 2$ とおく)

$$\int_{(1/4)} \left| \frac{\Gamma(k/2 - it - w)}{\Gamma(k/2 + it + w)} \frac{\Gamma(1+w/2)}{w} \right| |dw| \ll \tau^{-1/2}$$

がわかるので, 結局

$$\sum_{x \bmod q}^* |J(x, y, x)|^2 \ll \phi(q) \left(1 + \frac{y}{q}\right) \left(\frac{xy}{q^2}\right)^{1/2} \tag{10}$$

を得る。最後に, また Cauchy-Schwarz の不等式により

$$\begin{aligned}
 \sum_{x \bmod q}^* |K(x, y, x)|^2 &\leq \int_{(-3/2)} \left| \frac{\Gamma(k/2 - it - w)}{\Gamma(k/2 + it + w)} \frac{\Gamma(1+w/2)}{w} \right| |dw| \\
 &\quad \times \int_{(-3/2)} \left| \frac{\Gamma(k/2 - it - w)}{\Gamma(k/2 + it + w)} \frac{\Gamma(1+w/2)}{w} \right| \left(\frac{4\pi^2 x}{Nq^2} \right)^{-3} \sum_{x \bmod q}^* \left| \sum_{n > y} \frac{\bar{\chi}(n) a_{+|H_N(n)}}{n^{1/2 - it - w}} \right|^2 |dw|
 \end{aligned}$$

となる。ここで補題 1 (ii) を用いると (補題 1 (ii) を用いるた

めに積分路を $\operatorname{Re} w = -3/2$ へ移動したのである。)

$$\ll \phi(q) \left(1 + \frac{y}{q}\right) \left(\frac{xy}{q^2}\right)^{-3} \left(\int_{(-3/2)} \left| \frac{\Gamma(k/2 - it - w)}{\Gamma(k/2 + it + w)} \frac{\Gamma(1 + w/2)}{w} \right| |dw| \right)^2$$

となる。若干の計算により

$$\int_{(-3/2)} \left| \frac{\Gamma(k/2 - it - w)}{\Gamma(k/2 + it + w)} \frac{\Gamma(1 + w/2)}{w} \right| |dw| \ll \tau^3$$

がわかるので、結局

$$\sum_{x \bmod q}^* |K(x, y, x)|^2 \ll \phi(q) \left(1 + \frac{y}{q}\right) \left(\frac{xy}{q^2 \tau^2}\right)^{-3} \quad (11)$$

を得た。

補題 2, (9), (10), (11) で $x = y = q\tau$ とおくと次の定理を得る。

定理 $f \in S_k(N, \psi)$, $(N, q) = 1$, $\tau = H + 2$, χ は $\bmod q$ の原始指標

とする。このとき

$$L(f, \chi, 1/2 + it) = \sum_{n \leq q\tau} \frac{\chi(n) a_f(n)}{n^{1/2 + it}} e^{-\left(\frac{n}{q\tau}\right)^2} + \mu \left(\frac{2\pi}{\sqrt{Nq}}\right)^{2it} \frac{\Gamma(k/2 - it)}{\Gamma(k/2 + it)} \sum_{n \leq q\tau} \frac{\bar{\chi}(n) a_{f|H_N}(n)}{n^{1/2 - it}} + R_t(x)$$

で $R_t(x)$ を定義すると

$$\sum_{x \bmod q}^* |R_t(x)|^2 \ll \phi(q) \tau$$

が q と τ について一様に成り立つ。

この定理における 2 つの Dirichlet 多項式を補題 1 (iii) を用いて評価すれば、次の系を得る。

系 1 $f \in S_k(N, \psi)$, $(N, q) = 1$, $\tau = H + 2$ とする。このとき

$$\sum_{x \bmod q}^* |L(f, \chi, 1/2 + it)|^2 \ll \phi(q) \tau \log(q\tau)$$

が q と τ について一様に成り立つ。

$t=0$ のとき, 系 1 における評価は (4) より少し良い。従って (3), (5), 系 1 を合わせると次の系が得られる。

系 2 q は $(N, q) = 1$ なる十分大きな自然数とする。

$f \in S_k(N, \psi)$ は normalized newform とする。 $L(f, X, 1/2)$ が零にならないような $\text{mod } q$ の原始指標の数は

$$\gg \frac{\phi^*(q)^2}{\phi(q) \log q}$$

で下から押えられる。

上の系で f を normalized newform としたのは, [2] で (3) 式を証明するときこの仮定を用いるからである。

私は Balasubramanian と Ramachandra の方法は系 1 のような上からの評価を得るには有効であると思う。一方 Stefanicki の論文は, おそらく多少条件がついても漸近式を出すことを目標としている。私は上記の定理から q が素数のときに漸近式を出そうと試みたができなかった。やはり漸近式を出すには Stefanicki の方法が優れていると思う。

参考文献

- [1] R. Balasubramanian and K. Ramachandra, An alternative approach to a theorem of Tom Meurman, *Acta Arith.* LV (1990), 351–364.
- [2] T. Stefanicki, Non-vanishing of L-functions attached to automorphic representations of $GL(2)$ over $\mathbb{Q}$, *J. Reine Angew. Math.* 474 (1996), 1–24.