

$\text{Int}(P) \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$ を満たす $\mathbb{R}^n$ 内の整凸多面体 P の
双対多面体の体積の上限について

東北学院大学教養学部 土橋 宏康

P を $\mathbb{R}^n$ 内の整凸多面体とする。即ち、 P は $\mathbb{Z}^n$ の有限部分集合の凸包である。さらに、 P は $\dim P = n$, $\text{Int}(P) \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$ を満たすと仮定する。このとき、 P の双対多面体を

$$P^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle \geq -1 \text{ for } \forall y \in P\}$$

により定義する。このような P に対してコンパクト n 次元 toric 多様体 X_P が対応し、 P の境界が単体的ならば X_P は $\mathbb{Q}$ -Fano 多様体であり、また $(-K_X)^n = n! \text{vol}(P^*)$ であることが知られている ([1] を参照せよ)。逆に、すべての $\mathbb{Q}$ -Fano toric 多様体は上記の条件を満たす整凸多面体から得られる。現在までに知られているもののうちで $\text{vol}(P^*)$ が最大となる整凸多面体 P は Zaks, Perles & Wills [2] によって最初に発見された次の例で与えられる。

例 $y_1 = 2, y_2 = 3, \dots, y_{k+1} = y_1 y_2 \dots y_k + 1$ により数列 $\{y_n\}$ を定める。 P_n を ${}^t(1, 0, \dots, 0), {}^t(0, \dots, 0, 1), \dots, {}^t(2(1-y_n)/y_1, \dots, 2(1-y_n)/y_{n-1}, -1)$ を頂点とする単体とすれば、双対多面体 P_n^* は ${}^t(-1+y_1, -1, \dots, -1), {}^t(-1, \dots, -1, -1+y_{n-1}, -1), {}^t(-1, \dots, -1, -1+2(y_n-1)), {}^t(-1, \dots, -1)$ を頂点とする単体である。従って、 P_n^* も整凸多面体であり、 $\text{Int}(P_n) \cap \mathbb{Z}^n = \text{Int}(P_n^*) \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$ である。また $n! \text{vol}(P_n^*) = y_1 y_2 \dots y_{n-1} 2(y_n-1) = 2(y_n-1)^2$ である。

予想 A_n ($n \geq 3$) P が $\text{Int}(P) \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$ を満たす $\mathbb{R}^n$ 内の n 次元整凸多面体ならば、 $n! \text{vol}(P^*) \leq 2(y_n-1)^2$.

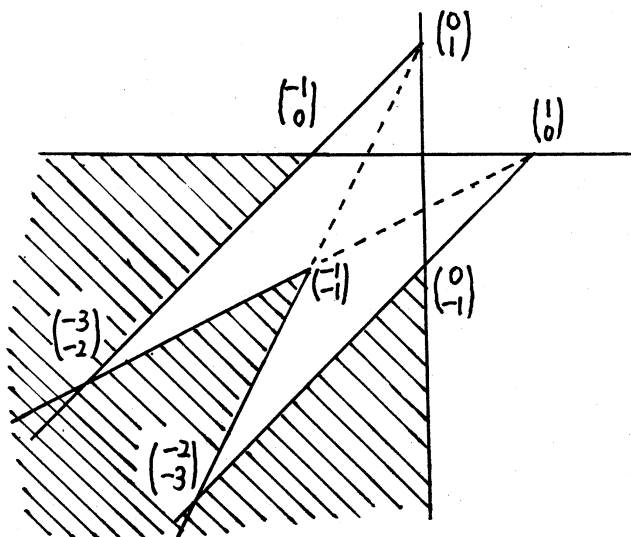
注 $n = 2$ のとき P を ${}^t(1, 0)$, ${}^t(0, 1)$, ${}^t(-1, -1)$ を頂点とする単体とすれば $2! \text{vol}(P^*) = 9 > 2(y_2 - 1)^2 = 8$ だから A_2 は偽である。

最近、この予想は次の予想 B_k ($1 \leq k \leq n - 1$) に帰着できることが分かった。即ち、

定理 [1] $n \geq 3$ のとき、 $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ が正しければ A_n も正しい。

予想 B_k 任意の $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{Q}^k_0$ に対して $\text{Int}(\Delta(x)) \cap \mathbb{Z}^k = \{0\}$ ならば、
 $1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq y_{k+1} - 1$,
 ここに $\Delta(x)$ は ${}^t(1, 0, \dots, 0)$, ${}^t(0, \dots, 0, 1)$, $\dots$, $-{}^t(x_1, x_2, \dots, x_k)$ を頂点とする単体である。

注 B_1 は明らかである。また、 B_2 も下図より明らかである。



この予想 B_k が簡単なアルゴリズムにより確かめられることを示すことが本稿の目的である。

$x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{Q}_0^k$ とし

$$\alpha_j = \frac{x_j}{1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k} \quad \text{for } 1 \leq j \leq k$$

とする。明らかに $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k < 1$ である。

補題 1. L を正の実数とするとき、 $1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq L$ となるための必要十分条件は $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k \leq 1 - L^{-1}$ となることである。

証明 $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 1 - (1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k)^{-1}$ より明らか。 ■

補題 2. $\text{Int}(\Delta(x)) \cap \mathbb{Z}^k \neq \{0\}$ となるための必要十分条件は次の条件 (*) を満たす非負整数 $p_1, p_2, \dots, p_k$ が存在することである。

$$\begin{aligned} (*) \quad q &:= p_1 + p_2 + \dots + p_k \geq 1, \\ (q+1) \alpha_j &> p_j \quad \text{for } 1 \leq j \leq k. \end{aligned}$$

証明 $p_1, p_2, \dots, p_k$ を (*) を満たす非負整数とする。

$$c_{k+1} = (q+1)(1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_k)$$

$$c_j = (q+1)\alpha_j - p_j \quad \text{for } 1 \leq j \leq k$$

とすれば、

$$c_1 + c_2 + \dots + c_{k+1} = 1, \quad c_j > 0 \quad \text{for } \forall j \quad (1)$$

である。また、

$$p_j = c_{k+1} x_j - c_j \quad \text{for } 1 \leq j \leq k \quad (2)$$

だから $0 \neq -^t(p_1, p_2, \dots, p_k) = c_1 {}^t(1, 0, \dots, 0) + \dots + c_k {}^t(0, \dots, 0, 1) + c_{k+1} {}^t(-x_1, -x_2, \dots, -x_k) \in \text{Int}(\Delta(x)) \cap \mathbb{Z}^k$.

逆に、 $-^t(p_1, p_2, \dots, p_k)$ を 0 と異なる $\text{Int}(\Delta(x)) \cap \mathbb{Z}^k$ の元とすれば、(1), (2) を満たす有理数 $c_1, c_2, \dots, c_{k+1}$ が存在する。このとき、

$$q := p_1 + p_2 + \dots + p_k$$

$$\begin{aligned}
&= c_{k+1} (x_1 + x_2 + \dots + x_k) \\
&\quad - c_1 - c_2 - \dots - c_k \\
&= c_{k+1} (1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k) - 1
\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}
(q+1) \alpha_j &= c_{k+1} (1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k) \alpha_j \\
&= c_{k+1} x_j = p_j + c_j > p_j
\end{aligned}$$

従って、上記の予想 B_k は次の予想 B'_k と同値である。

予想 B'_k $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ を $\sum_{i=1}^k \alpha_i < 1$ を満たす正の有理数とする。

(*) を満たす非負整数 $p_1, p_2, \dots, p_k$ が存在しなければ $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k \leq 1 - (y_{k+1} - 1)^{-1}$

補題 3 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ を $\sum_{i=1}^k \alpha_i < 1$ を満たす正の有理数とするとき、(*) を満たす非負整数 $p_1, p_2, \dots, p_k$ が存在するための必要十分条件は 2 以上の整数 m で

$$L m \alpha_1 J + L m \alpha_2 J + \dots + L m \alpha_k J = m - 1$$

となるものが存在することである。

証明 $p_j = L m \alpha_j J$ とおけば十分条件は明らかであるから必要条件を示す。 $m = q + 1$ とおけば $m \alpha_j > p_j$ だから

$$L m \alpha_j J \geq p_j \quad \text{従って、}$$

$$m > L m \alpha_1 J + L m \alpha_2 J + \dots + L m \alpha_k J \geq q = m - 1 \quad \blacksquare$$

系 4 次の条件を満たす正の有理数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ が存在すれば、予想 B'_k は偽である。

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k > 1 - (y_{k+1} - 1)^{-1},$$

$$L m \alpha_1 J + L m \alpha_2 J + \dots + L m \alpha_k J < m - 1$$

$$\text{for } 2 \leq \forall m \leq y_{k+1}.$$

証明 $K = (1 - (y_{k+1} - 1)^{-1} + \min(\sum_{i=1}^k \alpha_i, 1 - y_{k+1}^{-1})) / 2$ とし、 $\beta_j = \alpha_j K / (\sum_{i=1}^k \alpha_i)$ とすれば、 $1 - y_{k+1}^{-1} > K = \sum_{i=1}^k \beta_i > 1 - (y_{k+1} - 1)^{-1}$ である。また、 $2 \leq m \leq y_{k+1}$ を満たすすべての整数 m に対して

$$\sum_{i=1}^k \lfloor m \beta_i \rfloor \leq \sum_{i=1}^k \lfloor m \alpha_i \rfloor < m - 1 \quad \text{である。}$$

一方、 $m > y_{k+1}$ ならば

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \lfloor m \beta_i \rfloor &< \sum_{i=1}^k m \beta_i = m K \\ &< m - m y_{k+1}^{-1} < m - 1. \end{aligned}$$

従って、補題 3 より $\alpha_j := \beta_j$ に対して (*) を満たす非負整数 $p_1, p_2, \dots, p_k$ は存在しない。 ■

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ を $\sum_{i=1}^k \alpha_i < 1$ を満たす正の有理数とする。 $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k$ と仮定してよい。補題 3 により $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ が条件

(*) 2 以上のすべての整数 m に対して $\sum_{i=1}^k \lfloor m \alpha_i \rfloor < m - 1$ を満たすならば、 $\sum_{i=1}^k \alpha_i \leq 1 - (y_{k+1} - 1)^{-1}$ であることがいえれば予想 B_k は正しい。以下、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ が (*) を満たすと仮定する。このとき、明らかに $\alpha_1 \leq 2^{-1}$, $\alpha_2 \leq 3^{-1}$ である。また、 $\alpha_j \leq (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_j) / j < j^{-1}$ である。次に、 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ を $\alpha_j \leq \beta_j$ を満たす有理数とする。 $\sum_{i=1}^k \beta_i \leq 1 - (y_{k+1} - 1)^{-1}$ ならば $\sum_{i=1}^k \alpha_i \leq 1 - (y_{k+1} - 1)^{-1}$ だから、 $\sum_{i=1}^k \beta_i > 1 - (y_{k+1} - 1)^{-1}$ と仮定しよう。 $2 \leq m \leq y_{k+1}$ を満たすすべての整数 m に対して $\sum_{i=1}^k \lfloor m \beta_i \rfloor < m - 1$ ならば、系 4 により B_k は偽である。そこで、ある 2 以上の整数 m に対して $q := \sum_{i=1}^k \lfloor m \beta_i \rfloor \geq m - 1$ であると仮定する。ここで、仮に各 i に対して $\alpha_i > \beta_i := \lfloor m \beta_i \rfloor / (q + 1)$ とすれば、 $\sum_{i=1}^k \lfloor (q + 1) \alpha_i \rfloor \geq \sum_{i=1}^k \lfloor m \beta_i \rfloor = q$ となり最初の仮定に矛盾する。従って、ある i に対して $\alpha_i \leq \beta_i (< \beta_i)$ となる。以上のことから、下記のプログラムにより予想 B_k が確かめられることが分る。また、 β_i の分母 $q + 1$ が $k y_{k+1}$ 以下であることに注意すれば、このプログラムが有限時間で終了することも分

る。

```

#define dim 4

int L;

main()
{
    int i,y; rational b[dim]; void ex();
    for(i=1,L=2;i<dim;i++) {
        y=L+1;
        L*=y;
    } /* L=y1y2...ydim=ydim+1-1 */
    b[0]=(rational)1/(rational)2;
    b[1]=(rational)1/(rational)3;
    for(i=2;i<dim;i++) b[i]=(rational)1/(rational)(i+1);
    ex(b);
    printf("Conjecture Bdim is true \n");
}

void ex(b)
    rational b[];
{
    int i,j,m,q,p[dim]; rational a[dim],s; void ex();
    for(s=i=0;i<dim;i++) s+=b[i];
    if((1-s)*L>=1) return;
    for(m=2;m<=L+1;m++) {
        for(q=i=0;i<dim;i++)
            q+=(p[i]=m*b[i]-(rational)1/(rational)(dim*L));
        /* = L*m*b[i] */
        if(q>=m-1) {
            for(i=0;i<dim;i++) a[i]=b[i];

```

```

        for(i=0;i<dim;i++) {
            if(p[i]==0) break; /* p[j]==0 for j>i */
            a[i]=(rational)p[i]/(rational)(q+1);
            for(j=i+1;j<dim;j++)
                if(a[i]<b[j]) a[j]=a[i];
            else break; /*  $\alpha_j \leq \alpha_i$  if  $i < j$  */
            ex(a);
            a[i]=b[i];
        }
        return;
    }
}

printf("Conjecture Bdim is false\n");
exit(0);
}

```

注 $\text{dim} = 3, 4$ のときは上記プログラムの始めに
`#define rational double`
 の一行を付け加えるか、または `int` 型の変数が 32 bit ならば
`typedef struct rational {`
 `int p,q;`
`} rational;`

を付け加えて `rational` 型の変数に対する演算子 `+`, `-`, `*`, `/` の多重定義をすればよい。前者の場合は浮動小数点の演算の誤差が γ_{dim+1}^2 以下であり、後者の場合は整数の演算が $-2^{31} \sim 2^{31}$ の範囲内で行われる。いずれの場合も、ごく短時間で計算は終了し、 B_3 および B_4 が（従って A_4 および A_5 も）正しいことが確かめられた。

$\text{dim} \geq 5$ のときは多倍長演算をサポートしたプログラム言語が必要である。

文献

- [1] H. Tsuchihashi, The upper-bound of the volume of the dual polytopes of integral convex polytopes P in $\mathbf{R}^n$ with $\text{Int}(P) \cap \mathbf{Z}^n = \{0\}$, in preparation.
- [2] J. Zaks, M. A. Perles and J. M. Wills, On the lattice vertex polytopes having interior lattice points, *Elemente der Math.*, 37 No. 2, (1982), 44-46.