

四元法 (Quaternion) と明治前期の日本 —日本の「高等数学」教育史の一断面—

立教大学名誉教授 公田 蔵 (Osamu Kota)
Professor Emeritus, Rikkyo University

1. はじめに

東京大学の前身校の一つである東京開成学校の明治7年(1874)の工学科の学科目の中に「高等数学」があり、そこでは微分積分とともに四元法(Quaternion)の初歩が教授されていた。ここでは明治前期の日本における四元法に関連した数学の教育について考察する。

2. 東京開成学校と「四術算」

「東京開成学校」は東京大学の前身校の一つで、明治6年に「第一大学区第一番中学」の校名を改めたものであり、専門の学を教授することを目的としたものであった¹。しかし、明治6年にはまだ専門学の授業はほとんど行われなかった。専門学の授業が行われるようになるのは、実質的には明治7年(1874)からである²。

「東京開成学校第二年報 明治七年」には、この年法学化学工学本科および予科の課程を定めたとある。予科課程三年、本科課程三年であり、各学年ごとに学科目と簡単な内容が記されている。予科の数学の内容は、算術の復習、代数、幾何、三角法、代数幾何(アナリチカル、ヂヲメトリー)である。本科課程の工学科の「第一年 下級」の中に

高等数学(ハキエル、マセマチックス) [四術算及微分積分(クアトルニヤンス、エンド、デフエレンシヤル、エンド、エンテグラル、カルキユラス)]

とあり(原文は縦書きで、括弧内は原文では振り仮名)、その内容については別項に

四数法

- 第一 法ノ因テ起ル所ノ理ヲ論シ及其ノ用ヲ弁ス
 - 第二 通常幾何ト此法ノ同異ヲ論ス
 - 第三 加法乗法ノ凡例ヲ説ク
- 問題凡三十五

微分積分

- 第一 微分ノ原因及ヒ其式ノ凡例ヲ説ク
- 第二 積分一般ノ式ヲ終ル

¹ 「第一大学区第一番中学」という名称は、明治5年8月の「学制」公布のとき以来で、それ以前は「南校」、「大学南校」であった。「第一番中学」という名称になったことは、「学制」による「大学」としての実力が備わっていないと考えられたためではないかと思われる。東京開成学校が東京医学校と合併して東京大学が創設されるのは明治10年4月である。

² 「東京開成学校第二年報」には、「明治七年大二学校ノ体裁ヲ一変ス」と記されている。

と記されている。明治初期には Quaternion の訳語は一定せず、「東京開成学校年報」では課目の名称としては「四術算」が用いられているが、内容について説明したこの箇所だけは「四数法」となっている。東京数学会社の訳語会が数学の分科としての Quaternion の訳語を「四元法」と決定するのは、明治16年のことである。なお、「東京開成学校第二年報」には授業の担当者は記されていないが、この年度の高等数学はスミス (Robert Henry Smith) が担当したと考える。

翌年の「東京開成学校第三年報 明治八年」には各学科の課目と、課目によっては教科書が記されているが、工学本科の科目「四術算」には、ふりがなのような形で「ケルランド及テイト両氏」と、「微分」には「チャルチ氏」と注記されている。前者は

Philip Kelland and Peter Guthrie Tait, Introduction to Quaternions, 1873

である。この本の内容については後に述べるが、明治8年は1875年であるから、当時の最新の書物を教科書として講義が行われていたのである³。後者は

Albert Ensign Church, Elements of the Differential and Integral Calculus

である。Rosenstein [13] によれば、Church は Westpoint の米国陸軍士官学校 (United States Military Academy) ⁴出身で同校の教授であった人で、この本は初版1842年で、1872年まで版を重ねたものであるという⁵。

「東京開成学校第三年報」の「諸教授申報抄訳」には次のような記述がある。

機械工学教授スミス氏曰ク昨年ヨリ本年ニ超跨スル前学歳ノ第二学期中工学本科中級生 (七月以前下級生) ノ学業進歩スル実ニ驚クベキ者アリ先キニ該生徒初テ工学専門ニ入ルヤ其予科ニ在リ本科ニ緊要ナル学科豫修ノ充分ナラザルト其學術ヲ実践スルニ慣習セザルトニ因リ頗ル困難スト雖トモ之ヲ教導スルニ従ヒ漸次機械ノ要理ヲ熟知シ高等数学ヲ教ユルモ亦意外ノ学オヲ顯シ以テ異常ノ進歩ヲ表ス... 下級生 (七月以前予科第一第二級) ハ九月本科ニ入ル已来該生徒ニ... 重学及図画推算学等教則ニ載スル者ハ精密ニ之ヲ授ケリ然レトモ其進歩ハ未タ迅速ナル能ハス...

土木工学教授ワスソン氏曰ク... 又同 [註: 工学本科を指す] 下級生ニ測量及高等数学即チ代数幾何⁶及微分積分ヲ教授ス而シテ余ノ微分積分ヲ教ユルヤ合衆国ウェストポイント陸軍兵学校数学教授ノ教法ニ倣ヘリ...

これから、この年度の微分積分はワスソン (ワッソン, James R. Wasson) が担当したことがわかる。Wasson はアメリカの Westpoint 米国陸軍士官学校の出身で、明治5年 (1872) 来日、開拓使仮学校教師、開拓使測量長をつとめ、明治8年 (1875) 10月東京開

³Kelland-Tait の本の序文 (Kelland による) には、1873年10月と記されている。Smith が着任したのは明治7年 (1884) 9月である。

⁴フランスの Ecole polytechnique に範をとって1802年に設立された学校で、アメリカにおける最初の工学の専門教育機関である。

⁵この本は明治16年 (1883) に岡本則録により邦訳され、文部省から出版された。当時としては程度が多少高く、微分方程式、漸伸線、曲率論などを含んでいるという ([11], p. 125)。小倉金之助は、この本は Lagrange の解析函数論の影響を受けたものであると述べている ([12], p. 335)。なお、[11], [12] (pp. 205 - 206) とともに原書の刊行年を1874年としている。明治8年に東京開成学校において、この本を教科書として、どれだけの内容が講義されたかについてはわからないが、初等的な部分だけではないかと考える。

⁶代数幾何とは解析幾何のことである。

成学校の土木工学教師となり、明治10年1月まで在任した ([17], pp. 71 – 73) . 申報抄訳には記されていないが、この年度の「四術算」は、その内容から、重学に関連して Smith が担当したと考える。

「東京開成学校第四年報 明治九年」によれば、明治9年7月に、明治7年制定の諸学科課程が改正されたが、「年報」所載の改正された学科課程では、工学本科下級の「高等数学」は課目名が記されているだけで内容は記されていない。この年度の「諸教授申報抄訳」中の Wasson の申報には、工学本科下級生に対して「代数幾何、微分、積分及陸地測量学ヲ卒ル」とある。Smith の申報には担当した個別の課目と内容に関する記載はない。したがって、明治9年に「四術算」が教えられたかどうかについては「年報」からはわからない。Smith はこれ以降の年度についても「重学」を教えており、「重学」の中でベクトルなど「四術算」関連の内容が教授されたと考えるが、「年報」には「重学」の内容や「四術算」についての記述はない。しかし、上に述べたように、明治7年および8年には「四術算」が教えられていたのである。

小松醇郎は [8] で「工学科のみが数学を高等数学・四元法・微分積分まで教えることになっており、しかもそれは本科一年間のみであって、これは机上案のみであろう。或いはこの一覧の執筆者の誤りであると思われる」と述べているが ([8], p. 273), これは「東京開成学校年報」ではなく、明治8年および9年の「東京開成学校一覧」によったためであると思われる⁷。

3. Hamilton と Tait — 四元数の創始者と四元法の唱道者

Hamilton (Sir William Rowan Hamilton, 1805 – 1865) が複素数の幾何学的表示にヒントを得て、その拡張として3次元の空間に対して同様なことはできないかと考えはじめたのは1830年で、四元数のアイディアを得たのは1843年である。Hamilton は1843年以来四元数に関する論文を次々と発表し、1853年には著書“Lectures on Quaternions”を出版するが、この本は大冊である上に難解であった。64ページにわたる序文 (Preface) には、Hamilton が四元数のアイディアを得るに至るまでの歴史と、その背後にある彼の思想と哲学が述べられているが、これは一般の読者にとっては難しくて退屈であったと思われる⁸。Hamilton は、四元数のアイディアを得る以前から、代数学を「純粹時間 (pure time)」の科学として位置づけて⁹研究しており、二つの実数の順序対としての複素数の定義や四元数の背後には、このような Hamilton の思想がある。ついで Hamilton は、哲学的な部分を除き、幾何学などへの応用を重視した形で、四元数に関する第二の著書“Elements of Quaternions”を執筆するが、大体完成した段階で Hamilton は1865年に亡くなり、これが出版されたのは逝去の翌年の1866年であった¹⁰。

Hamilton は1865年に亡くなったが、Crowe [4] によれば、Hamilton の生前にはQuaternion はまだ数学の一分野として確立されたものにはならなかった。Peter Guthrie Tait

⁷[8] が執筆された頃は、「東京開成学校年報」を資料として利用することは困難であった。

⁸この Preface は [5] に収録されている。

⁹これは Kant の思想の影響である。

¹⁰当初の計画では物理学への応用についても記される予定であったというが、これは著者の逝去によって果たされなかった。なお、Hamilton の“Elements”は第2版が2巻本として1899 – 1901に出版された。

(1831 – 1901) のような積極的な「四元法主義者」もあったが、他方、William Thomson (Lord Kelvin, 1824 – 1907) のような四元数の価値を認めず、四元数の嫌いな学者も多かったのである。しかし、1865年には「四元法」を数学の一分野として位置づけるための基礎固めは大体できていたのである。

Peter Guthrie Tait は1831年スコットランドのEdinburghの近くで生まれた。1847年Edinburgh大学に入学するが、1年でCambridgeに移り、1852年Cambridge大学を卒業。1853年、出版されたばかりのHamiltonのLectures on Quaternionsを読む。1854年北アイルランドのBelfastのQueen's Collegeの数学教授となる。1858年からHamiltonと文通し、熱烈な「四元法主義者」となる。1860年Edinburgh大学の自然哲学の教授となる。Edinburghでは、Taitは「自然哲学」の教授であったということもあり、また、数学教授のPhilip Kelland (1810 – 1879) がその講義の中で四元数を扱ったこともあって、四元法を講義しなかったという (Crowe [4], pp. 120 – 121. Tait [15] の序文にもこれを意味するような文言がある)。

TaitがEdinburghに戻って間もない頃、William Thomsonと共著の数理物理学の本が企画されるが、実現したのは力学の部分だけであった。これが

William Thomson and P. G. Tait, Treatise of Natural Philosophy, 1867

である¹¹。これは当時 $T + T'$ と称され、よく読まれた本であったが、難しい本であったという¹²。執筆に当たり、ThomsonとTaitは、数学的取り扱いに四元数を用いるかどうかで意見が対立した。Thomsonが四元数の導入に強く反対したため、 $T + T'$ には四元数はいいられていない。Kelvinは1901年、Taitの没後George Chrystalへ宛てた書簡の中で、「われわれ (KelvinとTait) は38年間、四元数について戦争をしてきた」と記しているという ([4], p. 119)。

Taitはゴルフが好きで、ゴルフボールの運動に関する研究がある。また、1898年にはJosephus problem (継子立て) を一般化し、人数が n 人で m 人ごとに取り除く場合の法則を与えたという ([1], p. 459)。

Hamiltonの“Lectures on Quaternions”は分量も多く難解であったので、Taitはもっと平易で例の多い四元数の本を書くことを企て、1859年に執筆に着手するが、当時Hamiltonも四元数に関する著作を執筆中であり、Hamiltonからの強い要請で、Taitは自分の著作の出版をHamiltonの著書の出版 (Elements of Quaternions, 1866) 後まで延期したのである。これがTaitの“An Elementary Treatise of Quaternions” (1867) である。

TaitのTreatiseは、四元数そのものの解説とともに、幾何学および物理学への応用、特に物理学への応用に重点をおいて書かれており、総ページ数の約1/3は物理への応用が記されている。Hamiltonの著書よりはページ数も少なく読みやすいため好評で、1873年には加筆した第2版が出版され、さらに、大幅に増補した第3版が1890年に出版された

¹¹後に、第2版が2巻本として1878 – 1883に出版される。

¹²この本に対する評価はさまざまである。Kleinは[7]において、 $T + T'$ はきわめて示唆に富む本であって、Klein自身、たいへんな苦勞もあったが、大いに楽しんで各章を熟読したと述べている。物理学者Segreは、Fermiにすすめられて読んでみたが、難しいばかりで得るところはあまり多くなかったと述べている ([14])。FermiもSegreもノーベル物理学賞受賞者である。

のである¹³.

Tait の Treatise の第2版は次のような11章から成り、本文296ページである。

CHAPTER I	Vectors and Their Composition
CHAPTER II	Products and Quotients of Vectors
CHAPTER III	Interpretations and Transformations of Quaternion Expressions
CHAPTER IV	Differentiation of Quaternions
CHAPTER V	The Solution of Equations of the First Degree
CHAPTER VI	Geometry of the Straight Line and Plane
CHAPTER VII	The Sphere and Cyclic Cone
CHAPTER VIII	Surfaces of the Second Order
CHAPTER IX	Geometry of Curves and Surfaces
CHAPTER X	Kinematics
CHAPTER XI	Physical Applications

第3版は内容が大幅に増え、章も一章増えて、本文421ページになっている¹⁴。Hamilton の Elements や Tait の Treatise によって、四元法は幾何学および物理学、特に物理学に応用される数学として認識されるようになり、物理学者がベクトルや四元法に関心をもつようになったのである。こうして四元法は応用数学の一分野として物理学者の間に次第に知られるようになったのであるが、他方、Hamilton の四元数の背後にある、Hamilton の時間と空間に対する哲学・思想は見えなくなっていたのである¹⁵。

Tait の Treatise の第1章では、ベクトルの和、差、実数倍と、幾何学への応用が述べられている。また、一変数ベクトル値関数の微分も扱われている。四元数はベクトルの「比」と関連させて第2章で幾何学的に導入される。それは次の通りである。

空間の二つの（零ベクトルでない）ベクトルを α, β とする。

α, β が同じ向きまたは反対向きの時には、 $\beta = a\alpha$ (a は実数) と表されるから、ベクトル β, α の比 $\frac{\beta}{\alpha} = a$ であり、 α を β に変えるには α を a 倍すればよい。

α, β が同じ向きでも反対向きでもないときには、 α を β に変えるには、まず α を、その大きさを何倍かして β と同じ大きさにし、ついでこれを回転によって β と同じ向きにすればよい。ベクトルの大きさを揃えるのには一つの数（すなわち、 β, α を表す線分の長さの比）が関係し、空間における回転には三つの数が関係する。したがって、ベクトル β, α の比 $\frac{\beta}{\alpha} = q$, すなわち $\beta = q\alpha$ をみたす multiplier（作用素） q は、四つの数が関係する。そこでこの q を Quaternion（四元数）という。 α を β に変える四元数 q につ

¹³Tait の Treatise は、第2版と第3版が東京大学総合図書館に所蔵されているが、これは明治年間から東京大学に所蔵されていた図書ではなく、関東大震災で東京帝国大学図書館本館焼失の後、震災復興のため米国から寄贈された図書である。

¹⁴第3版では第6章として Sketch of the Analytical Theory of Quaternions が加わり、以下章の番号が一つずつずれる。最後の物理学への応用の章は、内容が大幅に増補されている。

¹⁵しかし、数学としての Quaternion を普及させるためには、「哲学」や「思想」を正面切って強く出さないほうがよかったといえるであろう。これは Grassmann の Ausdehnungslehre の1844年版と1862年版とについてと同様である。

いて, stretching factor (引き伸ばし作用素) を q の *tensor* といい Tq で表し, turning factor (回転作用素) を q の *versor* といって Uq で表す.

$$q = TqUq = UqTq$$

が成り立つ.

次に, 互いに直交する三つの単位ベクトル I, J, K (直交系 I, J, K は正の向きであるとする) について, J を K に変える四元数 (回転作用素, versor) を i , K を I に変えるものを j , I を J に変えるものを k , すなわち

$$iJ = K, \quad jK = I, \quad kI = J$$

として, これらの間に成り立つ関係

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j$$

等を導き, i と I , j と J , k と K は同一視してよいことが述べられる. そして, 単位ベクトルは, これを作用素 (原文では factor) と見るときは, そのベクトルに垂直な平面上での正の向きの直角の回転作用素 (versor) であることが述べられる.

ついで四元数は数とベクトルの和として表されることが, 次のようにして示される. Tait の本では, 始点 O , 終点 A の有向線分 OA で表されるベクトルを上線を引いて $\overline{OA}$ と表しているが, 式が煩雑になるので, ここでは上線を省略する.

$q = \frac{OB}{OA}$ を四元数とする. 点 B から直線 OA に垂線を引き, OA との交点を C とすれば, ベクトル $OB = OC + CB$ である. そして, $OC = xOA$ (x は数) と表される. また, CB は OA に垂直であるから, $CB = \gamma OA$, γ は OA と CB とに垂直なベクトル, と表される. よって,

$$\frac{OB}{OA} = \frac{xOA + \gamma OA}{OA} = x + \gamma$$

ゆえに, 四元数は数とベクトルの和として表される. Hamilton は, この数とベクトルをそれぞれこの四元数の scalar, vector と呼び, この四元数の名称の前にそれぞれ記号 S, V をつけて表したのである. すなわち,

$$q = Sq + Vq$$

である.

任意のベクトルは, 互いに直交する単位ベクトル i, j, k により, $xi + yj + zk$ の形に表されるから, 四元数 q は $q = w + xi + yj + zk$ と表される.

このように, 四元数はベクトルにベクトルを対応させる作用素として幾何学的に定義されている. 複素数の一般化として四元数を理解するのには適した方法であるといえるが, 作用素や同一視という概念がはいつてくるので¹⁶, Hamilton の本よりは読みやすい

¹⁶ 英国の Cambridge 学派では, 「記号代数」に関連して作用素という考えは普及していたという.

とはいっても、「数学者向け」であって、やさしい本ではなかった。これよりもっと平易な入門書ということで著されたのが Kelland-Tait の “Introduction to Quaternions” (1873) であって、これが東京開成学校で教科書として用いられた本である。この本は次のような 10 章から成り、本文 227 ページである¹⁷。

CHAPTER I	Introduction
CHAPTER II	Vector Addition and Subtraction
CHAPTER III	Vector Multiplication and Division
CHAPTER IV	The Straight Line and Plane
CHAPTER V	The Circle and Sphere
CHAPTER VI	The Ellipse
CHAPTER VII	The Parabola and Hyperbola
CHAPTER VIII	Central Surfaces of the Second Order
CHAPTER IX	Formulae and Their Application
CHAPTER X	Vector Equation of the First Degree
Appendix	

第 10 章では力学的な内容（応力変形）を扱っているが、それ以外の章では幾何学的内容が主題である。Appendix は各章末におかれた問題の略解である。第 10 章は Tait によるものであるが、それ以外の章は Kelland が執筆した。第 2 章ではベクトルの和、差、実数倍と、応用として幾何の問題が扱われている。四元数は第 3 章でベクトルの積、商と関連して幾何学的に導入されているが、導入の方法は Tait の Treatise とは異なっている。Kelland-Tait では、四元数を次のように導入する。

空間において、互いに直交する三つの単位ベクトルを i, j, k とし、直交系 i, j, k は正の向きであるとする。まず i, j, k の積を考える。積 ij というとき、左に記したベクトルは、右に記したベクトルに対する作用素と考える。そして、 ij は、ベクトル j を、 i に垂直な平面上で正の向きに直角だけ回転して得られるベクトルを表すとする。すなわち、 i を左から掛けるということは、 i を軸とする正の向きの直角の回転を行うことを意味すると定めるのである。したがって、 $ij = k$ である。このように積を定義すれば、 $ik = -j, ji = -k$ 等の関係が成り立つ。ベクトルの積について結合法則、分配法則が成り立つとし、また、 a, b を実数とするとき、 $(ai)(bj) = abij$ が成り立つとする。そうすれば $ij = k$ から $i(ij) = ik = -j$ 、他方 $i(ij) = (ii)j = i^2j$ であるから $i^2j = -j$ 、よって $i^2 = -1$ である。同様にして $j^2 = k^2 = -1$ 、また $ijk = -1$ である。

単位ベクトル i としては、空間の任意の単位ベクトルをとることができるから、空間

¹⁷Kelland-Tait の本の初版は、現在東京大学工学部と教養学部図書館に所蔵されている。この稿をまとめるに当たり閲覧したのは教養学部図書館所蔵のものであるが、それには明治期の「東京大学」の蔵書印（東京帝国大学となる以前のもの）があり、また、「第一高等学校」のラベルが貼られている。この本には、第 6 章までの若干のページに鉛筆で下線が引かれていたり、公式や計算などの書き込みがある。その内容から見て、おそらく学生によるものであらうと思われる。Jan. 12th. など、月日を記した書き込みがあることと、書き込みのあるページが数ページ飛んでいるところがあることから、この本を教科書として使用していた際の書き込みであると考えられる。ただし、年を記した書き込みがないので、書き込みがいつ頃のものかはわからないが、明治期のものであらう。

の任意の単位ベクトル α に対して, $\alpha^2 = -1$ が成り立つ.

次に α, β を二つのベクトルとする (零ベクトルではないとする).

まず α, β が単位ベクトルの場合を考える. α, β を含む平面上で β に垂直な単位ベクトルを γ とし, 空間で単位ベクトル δ を, β, γ, δ が正の向きの直交系をなすようにとり, $\epsilon = -\delta$ とする. α, β のなす角を θ とすれば,

$$\alpha = \beta \cos \theta + \gamma \sin \theta$$

と表されるから,

$$\alpha\beta = (\beta \cos \theta + \gamma \sin \theta)\beta = \beta^2 \cos \theta + \gamma\beta \sin \theta = -\cos \theta + \epsilon \sin \theta$$

次に, 一般の場合は, α, β を単位ベクトルの実数倍として表すことにより,

$$\alpha\beta = T\alpha T\beta(-\cos \theta + \epsilon \sin \theta)$$

となる. ここに $T\alpha$ はベクトル α の長さを表す. Hamilton は $T\alpha$ を α の *tensor* と呼んだ. この式を書き直せば

$$\alpha\beta = -T\alpha T\beta \cos \theta + \epsilon T\alpha T\beta \sin \theta$$

となる. 右辺の第1項, 第2項をそれぞれ $\alpha\beta$ の *scalar part*, *vector part* といい, $S\alpha\beta, T\alpha\beta$ で表す. すなわち,

$$S\alpha\beta = -T\alpha T\beta \cos \theta, \quad V\alpha\beta = \epsilon T\alpha T\beta \sin \theta$$

$T\alpha T\beta \sin \theta$ は, α, β を隣り合う二辺とする平行四辺形の面積である¹⁸.

次に, ベクトルの商を考えよう. α, β を二つの (零ベクトルではない) ベクトルとする. 商 $\frac{\beta}{\alpha}$ とは, α に左から作用させれば β が得られる作用素であるとする. すなわち $\frac{\beta}{\alpha}\alpha = \beta$ とする.

まず α, β が単位ベクトルの場合を考える. 上で積を扱ったときのようにベクトル γ, ϵ と角 θ とをとれば,

$$(\cos \theta + \epsilon \sin \theta)\alpha = (\cos \theta + \epsilon \sin \theta)(\beta \cos \theta + \gamma \sin \theta)$$

右辺を展開し, $\epsilon\beta = -\gamma, \epsilon\gamma = \beta$ に注意して計算すれば

$$(\cos \theta + \epsilon \sin \theta)\alpha = \beta, \quad \text{よって} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \cos \theta + \epsilon \sin \theta$$

が得られる. この商 $\frac{\beta}{\alpha}$, すなわち $\cos \theta + \epsilon \sin \theta$ は, ϵ を回転軸とする角 θ の *versor* (回転作用素) である.

¹⁸現代の用語を用いるならば, $S\alpha\beta$ はベクトル α, β の内積の符号を変えたもので, $T\alpha\beta$ は α, β の外

一般の場合は、 α, β を単位ベクトルの実数倍として表すことにより、

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{T\beta}{T\alpha} (\cos \theta + \epsilon \sin \theta)$$

が得られる。

よって、二つのベクトルの積、商は、tensor と versor の積として表される。tensor と versor の積を、Hamilton は *Quaternion* (四元数) と呼んだのである。四元数は、スカラーとベクトルの和として表される。

ベクトル値関数の微分法や作用素 ∇ など、四元数を用いた解析は、Tait の *Treatise* では扱われているが、Kelland-Tait では取り上げられていない。Kelland-Tait の本は、Tait の *Treatise* への入門の意味もある上に、当時は「初等代数」の講義の一部として四元数が扱われていたという事情もあるようである。また、「代数」として扱うといっても、Kelland-Tait では四元数の $w + xi + yj + zk$ の形の表示による計算はあまり表面に出さず、四元数 q のスカラー部分 Sq 、ベクトル部分 Vq を用いた式で表している。なお、Kelland-Tait の本は、第2版が1882年に出版され、第3版が1904年にCargill Gilston Knottの校訂によって出版された。

4. 明治10年代の東京大学における四元法関連の教育

さきに述べたように、東京開成学校ではKelland-Taitの本によってQuaternionが教えられていたが、「東京開成学校第二年報」に記されている「四数法」の内容から見ると、この本の最初のいくつかの章の内容だけが教授されたと考える。工学科の高等数学の科目としてのQuaternionということからは、力学と密接に関係する、ベクトル解析の前段階のような内容を連想してしまいがちであるが、実際には、ベクトルを用いた幾何(四元法の表記を用いての)が教えられていたのである。力学のための準備としてはそれで間に合ったであろう。なお、「東京開成学校第三年報」のWassonの申報に「高等数学即ち代数幾何及微分積分ヲ教授ス」とあるから、明治8年度の工学本科の下級生は、「普通」の解析幾何学とともに「四数法」でベクトルを用いた幾何学を学ぶことになり、内容を理解しやすかったであろうとも思われるが、この生徒について、Smithは申報で「教則ニ載スル者ハ精密ニ之ヲ授ケリ然レトモ其進歩ハ未タ迅速ナル能ハス」と述べているのである。

ところで、明治初期の東京開成学校、東京大学理学部工学科における機械工学の外国人教師は

明治7年—11年(1874—1878) スミス (Robert Henry Smith)

明治11年—16年(1878—1883) ユーウキング (James Alfred Ewing)

であり、Ewingの後任として理学部物理学教授として着任したのは

明治16年—23年(1883—1890) ノット (Cargill Gilston Knott)

であるが、いずれもEdinburgh大学出身で、Taitに学んでいる。

Robert Henry Smithは1872年Edinburgh大学卒業で、明治7年(1874)東京開成学校教師、明治10年4月東京大学理学部工学科教師、明治11年(1878)英国へ帰国、1916年(大正5年)2月逝去。

James Alfred Ewing は 1855 年スコットランドに生まれる。1876 年 Edinburgh 大学卒業、William Thomson のもとで大西洋海底電線敷設の仕事に従事する。明治 11 年 (1878) Fleeming Jenkin の推薦により東京大学理学部工学科教師として来日、明治 16 年 (1883) 英国へ帰国。その後 Cambridge 大学の力学及び応用数学教授、英国海軍教育部長、Edinburgh 大学学長及び副総長などを歴任。1887 年 Royal Society 会員に選ばれる。1935 年 (昭和 10 年) 1 月逝去。主な業績は磁気ヒステリシスの研究と、日本および英国における工学教育の確立である。

Cargill Gilston Knott は 1856 年スコットランドに生まれる。Edinburgh 大学を卒業後 Tait の助手をつとめる。明治 16 年 (1883) 東京大学理学部物理学教師として来日、電磁気学、力学などを講義し、物理学実験を指導する。明治 20 年に田中館愛橘らと共同で日本全土の地磁気測定を行い、翌年「日本全国地磁力実測報告」をまとめる。明治 23 年 (1890) 帰国。帰国後は Edinburgh 大学で応用数学を教授する。1922 年 (大正 11 年) 逝去。

東京開成学校・東京大学における Smith と Quaternion の教育についてはさきに述べた。Ewing や Knott が四元法の教育を行ったかどうかは「東京大学年報」だけではわからないが、力学などに関連してベクトルは教えられたと考える。数学については、菊池大麓 (1855 - 1917) が明治 10 年 (1877) に英国留学から帰国した後は、外国人教師によらない教育になるのである。

小倉金之助は「日本における近代的数学の成立過程」において、明治 13 年の東京大学数学科の四年生の教科書・参考書の中に Kelland-Tait の本が示されていることを記している ([12], p. 51)。これは数学科の第四年の課目「応用数学」の教科書・参考書として示されたものと思うが、「東京大学第一年報 起明治十三年九月止同十四年十二月」(1880 - 1881) によれば、この年度は理学部物理学数学星学科の第四年の学生はなく、第四年の「応用数学」は開講されていない。第三年生に対しては菊池大麓が「純正及応用数学」として力学 (静力学、分子動力学) を講義している。翌年度には菊池は物理学第四年生に対して「応用数学」として力学の続き (分子動力学、固質体動力学、流質体力学) と音学を講義している。力学に関連してベクトルや四元法の初歩が教授されたと考えるが、申報には科目の内容の詳細については記されていない。その次の年度の「東京大学第三年報 起明治十五年九月止明治十六年二月」(1882 - 1883) 所載の菊池大麓の申報には次のような記述がある。

物理学及星学第四年生ニハ力学 (分子動力学、固体動力学、水力学) 及音学ヲ講授シタリ数学及物理学第三年生ニハ力学 (静力学分子動力学) 及高等積分学ヲ講授シタリ又数学第三年生ニハ別ニ高等解析幾何学及インヴェリアント等ノ数理ヲ授ケ数学第二年生ニモ此科ノ講義ノ一部分ヲ聴カシメタリ数学物理学及工学第二年生ニハ微分積分及立体解析幾何学ヲ講授シタリ授業ハ総テ講義ヲ以テシ午後ニ於テ数学演習ノ場ヲ設ケ右各年級ノ学生ヲシテ各其聴講シタル学科ノ問題解式ニ従事セシメタリ此他尚ホ各年級学生及研究生ヲ集メテ正科外ノ課目ニ就キ臨時講義ヲ為シ又トムソン及テイト著物理学ノ会読ヲ為サシメタリ

ここに記されている「トムソン及テイト著物理学」は、当時英国でよく読まれた本であった T + T', すなわち "Treatise of Natural Philosophy" のことであると思われるが、同じ著者による、よりやさしい "Elements of Natural Philosophy" (1879) という本があるので、学生に会読をさせたところから、あるいはそちらかもしれない。

「東京大学第四年報 起明治十六年九月止明治十七年十二月」(1883 - 1884) の、「物理学受持ノット申報」の中には次のような記述がある。

第二年級力学ノ授業ハ毎週四時ナリ其方法ハ首ニ講義ヲ用ヒ且マックスウキル氏著物質及ヒ運動編、クリフアルド氏著力学、トムソン氏及テイト氏合著博物編等ノ各部ヲ選抜シテ之ヲ自讀セシメタリ其細課目ハ質点力学及剛体力学初歩、歪、弾性、液体等ニシテ且毎週四時間ノ内二時間ヲ以テ種々ノ問題ヲ設ケ実地ニ応用スヘキ各般ノ単位ニ就キ充分ニ学生ヲシテ練習セシメタリ第三年級物理学ノ授業ハ毎週一時間光学及電氣学ニ於ル初歩ノ実験ヲ肄習セシメ工学及化学生ニハ別ニ毎週二時間物理学実験ヲ授ケタリ總テ該級ノ学業ハ甚タ不満足ナリキ是レ然シナカラ左ノ理由ニ関セリ

第一、各級学生ノ学力不同ナルヨリ最良ノ学生ニ対シ稍々低度ノ物理学ヲ授ケサルヲ得ス以テ大ニ全級ノ進歩ヲ妨クル是ナリ

第二、授業時間ノ不充分ナル僅ニ毎週一時間ニ過キサレハ完備ノ修学ニ必要トスル教員学生交互ノ達意理会ニ不便ヲ覺ユルヲ少ナカラサル是ナリ

第四年級物理学ノ授業科目ハ電氣学及磁氣学ニシテ毎週四時間概ネ講義ヲ以テ之ヲ授ケ且マックスウキル氏著電氣磁氣学若クハトムソン氏著越歴静力学ノ解シ難キ所ヲ講明シタリ其他尚ホ物理学生ハ常ニ実験ニ従事シ学年ノ終リニ至リ歪タルニッケル線ニ関スル熱越歴論ヲ卒業論文トシテ作レリ渾テ此級ノ進歩ハ満足スヘキモノトス

ここに記されている書物は

James Clerk Maxwell, Matter and Motion, 1876,

William Kingdon Clifford, Elements of Dynamic: Part 1. Kinematic, 1878,

William Thomson and Peter Guthrie Tait, Treatise of Natural Philosophy, 初版 1867, 第 2 版 (2 巻本) 1878 - 83,

James Clerk Maxwell, Treatise on Electricity and Magnetism, 2 vols., 1873, (第 2 版., 1881) ,

William Thomson, Electrostatics and Magnetism

である。Maxwell の電磁気学の本は四元法の知識がなくても一応読めるようには書かれている¹⁹けれども、四元法を知っているほうが内容を理解しやすい²⁰。また、線積分、面

¹⁹Maxwell の電磁気学の本では、ベクトルは第 1 巻の最初から用いているが、成分による表示も併記している。第 2 巻では、Maxwell の方程式を成分による表示で示した後に、四元法による表示を記している。なお、Maxwell が Tait のすすめによって四元法に関心を持ち、四元法を学んだのは 1867 年以降であるという ([4], p. 132)。

²⁰Josiah Willard Gibbs (1839 - 1903) や Oliver Heaviside (1850 - 1925) は Maxwell の電磁気学の

積分, Stokes の定理など数学そのものを述べた部分もある. Knott がこの本をどのように取り扱ったのかわかればと思っている. なお, この年度は, 数学科第四年級の「高等数学」において, 寺尾寿により, 日本で初めて複素函数論が講義された年でもあった.

その翌年度の「理科大学申報 起明治十八年九月止明治十九年十二月」(1885 - 1886) 所載のノットの申報は次の通りである.

明治十八年九月ヨリ同十九年七月ニ至ル一学年中ニ余ガ教授シタル学科并学生ハ左ノ如シ

第一年級(諸学科)ニ力学物質及熱学ノ大意及其原則ナリ授業ノ方法ハ講義ト口頭并筆記試験ニ因ル

第二年級(数学物理学星学土木学)ニ力学但高等微分積分学ヲ用ヒサルモノナリ其授業ノ方法ハ前ニ同シ

第四年級(数学物理学)ニ電気学及磁石学ニシテ其实験上并ニ数理上ヨリ講授セリ授業ノ方法ハ前ニ同ト雖トモ之ヲ補フニ夥多ノ有益ナル英書ヲ自讀研究為サシムルヲ以テセリ

第四年級の項には「夥多ノ有益ナル英書ヲ自讀研究為サシム」とある. ここには書名は記されていないが, 前年度の申報に記されているような書物はその中に含まれていたと考えてよいであろう.

5. 菊池大麓と四元法 — 「数理釈義」に関連して

「明治二十一年分理科大学年報」の中の菊池大麓の申報には, 「四元法」に関する記述がある.

謹テ明治廿年九月ヨリ廿一年七月ニ至ル授業ノ申報ヲ呈ス

本学年間下官受持ノ学科ハ数学物理学第一年生ノ純正数学数学星学第二年生ノ力学数学第二年生ノ純正数学星学物理学第三年生ノ力学(以上講義)及第二年第三年数学星学物理学々生ノ数学演習ナリ

第一年生ノ純正数学ハ第一期間毎週三時間主トシテ立体解析幾何学ヲ講スル筈ナリシガデテルミナント及四元法ノ為ニ意外ニ時ヲ要シタルニ依リ終ニ第一期ニ於テハ立体解析幾何学ノ端緒ヲ講スルニ止マリタレハ已ムヲ得ス本年ニ限り第二及第三学期ニ於テモ毎週一時間ツヽノ講義ヲナシ辛クシテ其大意ヲ終レリ本学年ノ経験ニ依レハ此講義ノ時間ヲ増加セサルヘカラス

力学ハ数学星学及物理学ノ学生ニ第二年第三年ノ二学年続ケテ運動学乃²¹静力学ヨリ分子動力学固体動力学流体力学ヲ教授スルノ定ナリ本年ハ是迄通りニテ別ニ変リタルヲナシ然ルニ第一年ニモノット教師ノ力学ノ講義アルヲ以テ来学年ヨリハ少シク之レヲ略シ稍ヤ時間ヲ減スルヲ得ヘシ

本を読んで四元法に対して関心を持つようになり, ついで, 力学や電磁気学などの物理学に対して有用なのは四元数ではなくてベクトルであることに気づき, 難しい四元法を用いないベクトル解析を考案したのである. Gibbs がベクトル解析のアイディアを得たのは遅くとも 1880 年である. Heaviside は 1890 年頃からの電磁気学に関する一連の論文でベクトル解析の有用性を唱道し, 四元法を排斥したのである.

²¹これは「理科大学年報」の筆写原本のままで, 「及」と書くべきところの書き誤りである.

数学第二年生ノ純正数学ハ第三学期ノ一期ノミナルヲ以テ充分ナル講義ヲナス能ハサリキ故ニ是又來学年ヨリ時間ヲ増加セサルヘカラス
右等ノ理由有ルヲ以テ來学年ニ於テハ学科課程ニ少シク改正ヲ加フルノ必要アリ²²

学生ノ學業進歩等ニ付テハ特ニ記スヘキ程ノヲナシ

明治廿一年七月 理科大学教授菊池大麓

ここで菊池が「デテルミナント及四元法ノ為ニ意外ニ時ヲ要シタルニ依リ」と記しているのは、菊池がこれらについて詳細に講義したためではないかと考える。そしてそれは、菊池がその前年の明治19年(1886)に、William Kingdon Clifford (1845-1879)の遺稿を最初はRowe, ついでKarl Pearsonが整理・編集²³して出版した“Common Sense of the Exact Sciences”(1885)を翻訳し、「菊池大麓訳 数理積義」として出版したことと関係があると考えられる。菊池は「数理積義」の緒言において、この原書を明治18年に入手し、一読して、すべて数学に志す者はこれを読んで利益を得るところが実に大きいであろうと思い、同年9月から東京教育博物館において東京及び近県の教員を対象としてこの本の大意を講義したが、講義のみでは少数の人々に達するだけであるから、これを翻訳出版したのであると述べているのである。

「数理積義」は五編から成り、各編の表題は次の通りである。

第一編 数

第二編 「スペース」²⁴

第三編 量(目次には「クオンチチー」と振り仮名がついている)

第四編 位置

第五編 運動

この本は一般の読者を対象とした数学の啓蒙書であるが、取り扱われている内容は初等数学とは限らない²⁵。例えば、第五編では速度に関連して微分法の考え方も説明されている。

²² 学科課程は明治21年7月に改正され、例えば第一年には毎週3時間、1年間の「解析幾何」が置かれた。そして、数学科の学科課程は従前のものより整備されたのである。学科課程の改正には、この菊池の申報に記されているような実施上の不具合を直したこともあるが、留学から帰国した藤沢利喜太郎の意見もふまえて、数学科を整備充実することが主たるねらいであったと考える。

²³ RoweはCambridge大学出身で、大学では菊池と同期であったという。後にLondonのUniversity Collegeの数学教授となるが、1884年、Cliffordの遺稿の整理・編集を完成しないままに逝去した。Croweによれば、この本の後半の部分はPearsonの手になるという。

²⁴ 本文の第二編の最初に、菊池は次のように注記している。「「スペース」トハ宇宙間總テノ場所ノ意義ニシテ其所ニ実物ノ有ルト無シトニ関ラス之ヲ云フナリ故ニ或ハ場所ト訳スモ適当ナラサルニ非スト雖意味未タ全ク尽クサハルカ如シ故ニ今仮ニ「スペース」ノ語ヲ存シ置ク英語ヲ知ラサル読者ハ之ニ其文ノ前後ニ由リテ宇宙或ハ場所等ノ意ヲ付シテ看レハ大体文意明瞭ナル可キナリ」。當時はspaceという概念も目新しく、「空間」という訳語も確立していない時代であった。

²⁵ 「数理積義」について、[11]には、「証明というより説明調であるが、当時の日本に欠落していた全体的な数学像を伝える上で意味のある本であったといえよう」と記されている([11], p. 126)。小倉金之助は「日本における近代的数学の成立過程」において、「なかなか面白い本です」と述べている([12], p. 63)。岡潔は「春宵十話」(毎日新聞社, 1963)において、中学三年生のとき、わからないところがおもしろくて読みふけたことと、その中で一つだけ印象的であったのが「クリフォードの定理」で、これがいかにも神秘的に思えたことなどを記している(pp. 22-23, p. 226)。この「クリフォードの定理」は「数理積義」第二編の後半の部分にある。

ベクトル（「数理釈義」では「ヴェクトル」），複素数（「数理釈義」では「複数」と記され，「コムプレックス，ナムバー」と振り仮名が付けられている²⁶），四元法，行列式（「数理釈義」では「デハルミナント」）は第四編の中で扱われているが，そこには Hamilton の四元法だけではなく，Grassmann（Hermann Günther Grassmann, 1809 – 1877）の Ausdehnungslehre²⁷の一端も記されている．しかも，Hamilton よりは Grassmann に関連する事項のほうが詳しく述べられているのである²⁸．

「数理釈義」では， i は平面上での反時計回りの直角の回転として導入され，演算 i について $i^2 = -1$ を導き，複素数は幾何学的に導入される．ついで，原点を A とし，ベクトル AP , AQ を考えると， AQ と AP の長さの比を ρ ，角 PAQ を ϕ とすれば

$$\rho(\cos \phi + \sqrt{-1} \sin \phi)AP = AQ$$

という関係があることを示す．そして，これはベクトル AQ と AP の比は何か，すなわち，ベクトル AP を変じて AQ とする演算は何かということを述べているといい，引き伸ばしは「スケーラー」，廻転は「ヴェクトル」で表されるから，

二「ヴェクトル」ノ比ハーツノ「スケーラー」トーツノ「ヴェクトル」ノ積ヨリ成ル演算ナリ是レ ソル ウキルリヤム，ハミルトン²⁹ノ Quaternion（クワテルニオン）ト名ケタルモノニシテ氏ノ有名ナル四元法ノ基ナリ
故ニ「クワテルニオン」ノ本性ハ「ヴェクトル」歩³⁰ヲ変シテ他ノ「ヴェクトル」歩トナス演算ナリ而シテ廻転ト引延シニ由リテ之ヲ為ス³¹ハ右ニ述タル所ニ由リテ詳ナラン

という．ただしこの説明は，3次元の空間についてではなく2次元の空間（複素数平面）についてなされているので，「四元法」の「四」については説明されていない．

ついで，ベクトルの積を考える．「数理釈義」では積を二通り定義する．外積と内積であるが，内積，外積という用語は記されていない．なお，「数理釈義」では，「定義」といわず，「契約」あるいは「見解を下す」というような表現を用いている．

1. まず，二つのベクトル AP , AQ の積 $AP.AQ$ を， AP , AQ を二辺とする平行四辺形の符号つき面積と定める．そうすれば，

$$AQ.AP = -AP.AQ, \quad AP.AP = (AP)^2 = 0$$

²⁶ Complex number を「複数」と訳したのは，東京数学会社の訳語会では，素数（prime number）に対して composite number を「複素数」と訳していたことによると考える．なお，今日の中国でも，complex number は「複数」である．

²⁷ Grassmann は Ausdehnungslehre に関する書物を 2 回，1844 年と 1862 年に出版している．

²⁸ Clifford は英国流の数学だけではなく，Grassmann や Riemann の業績など，ヨーロッパ大陸の数学（特に幾何学）にも通じていた．Crowe は，Clifford は Hamilton よりは Grassmann のほうに関心があったと述べている．

²⁹ 「ソル」は Sir である．なお，「数理釈義」は縦書きで，「ソル」には左傍線，「ウキルリヤム，ハミルトン」には右傍線がつけられている．

³⁰ 「歩」は step の訳語である．Clifford は step を vector と同様の意味に用いている．これは Hamilton に基づくものであって，Hamilton は初期に（直線上の）ベクトルのことを step と呼んだのである．Vector という用語は Hamilton によるものであるが，これが初めて用いられたのは 1847 年である．

が成り立つ。相互にこのような関係をもつ量はドイツの数学者グラスマンが初めて用いたところであって、氏はこれらの量に alternate unit (オルテルネート ユーニット) という名称を与えたといい、「オルテルネート、ユニット」は尋常の代数学とは異なる自己特有の代数学をもつといい、ついで

是ニ於テ読者ハ是マテ総テ何如ナル量ニテモ必ス適応シ決シテ変ス可カラサル自然ノ理ナリトシテ毫モ疑ハサリシ算術ノ規則ハ唯一小部分タル「スケーラー」量ニノミ適応ス可キモノナルヲ発見スルナラン此等ノ規則ハ自然ノ理ニ非ラス唯我輩ノ契約ニ過キス漸々我輩ノ用キル記号ノ意義ヲ拡ムルニ於テハ或ハ之ヲ擲棄テサル可カラス

と述べる。そして、 A, B を二つのオルテルネート、ユニット、 a, b をスケーラーとするとき、 $aA + bB$ で表される量を「オルテルネート、ナンバー」といい、二つのオルテルネート、ナンバー $aA + bB, a'A + b'B$ の積を determinant (デハルミナント) という。一般に、若干個のオルテルネート、ユニットがあるとき、これと同数個のオルテルネート、ナンバーを作り、これらを相乗じたものをデハルミナントというのであると述べる。そして、幾何学的説明を交えながら、

$$(aA + bB)(a'A + b'B) = (ab' - a'b)A.B$$

を導く。三つのオルテルネート、ユニットから成るデハルミナントについて同様の性質を得ることは読者に委ねている。そして、二つのベクトルの積は面積であり、また、この二つのベクトルを含む平面に直角であるベクトルであると述べる。

ついで、次の節で、ベクトルの積を、これとは別に、次のように定義するのである。

2. 二つのベクトル AP, AQ の積 $AP.AQ$ を、前とは別に、次のように定める。

ベクトル AP は、 AP に垂直な、ある図形の面積を表すとする。点 A がこの図形上を動くとき、ベクトル AQ が動いて作られる、最初の図形を底面とする斜嚢の体積をベクトル AP, AQ の積 $AP.AQ$ とする。

いま、この斜嚢の高さを AH とし、ベクトル AP, AQ の大きさをそれぞれ r, ρ 、角 PAQ の大きさを θ とすれば、

$$AP.AQ = r\rho \cos \theta$$

となる。よって、二つのベクトルの積はスカラー量になる。

このようにして、四元数を用いることなく、ベクトルの外積と内積が幾何学的に定義され、行列式が導入されている。

「数理釈義」は翻訳書ではあるが、日本語の数学書で Hamilton や Grassmann のアイディアの一端を記したのものとして最初のものである³¹。しかし、この本を読んだだけで Hamilton や Grassmann のアイディアを正確に理解することは非常に困難である。

³¹ 単行本以外のものまで含めれば、東京数学物理学会記事第2巻(明治18年(1885))に掲載された隈本有尚の論文のほうが早い。

もし、菊池が明治20年に「数理釈義」にしたがって（というより、それを敷衍して）講義を行ったとすれば、Hamiltonの四元法とともにGrassmannのAusdehnungslehreの一端がわが国で「純正数学」として講義されたことになる。このときの講義内容がどのようなものであったかを知りたいと思っている。

参考文献

- [1] Cajori, Florian, *A History of Mathematics*, 3rd ed., Chelsea, 1980.
- [2] *Mathematical Papers by William Kingdon Clifford*, edited by Robert Tucker, 1862. Reprint: Chelsea, 1968.
- [3] 菊池大麓訳「数理釈義」, 博聞社, 1886. (Clifford, William Kingdon, *Common Sense of the Exact Sciences*, 1885の邦訳)
- [4] Crowe, Michael J., *A History of Vector Analysis*, Dover Publ., 1985.
- [5] *The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton, Vol. III, Algebra*, Cambridge, 1967.
- [6] Kelland, Philip and Tait, Peter Guthrie, *Introduction to Quaternions*, Cambridge, 1873, (2nd ed. 1882, 3rd ed. 1904).
- [7] Klein, Felix, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Teil I, Springer, 1926. (邦訳: 彌永昌吉監訳「クライン: 19世紀の数学」, 共立出版, 1995)
- [8] 小松醇郎「幕末・明治初期数学者群像」, 下巻, 吉岡書店, 1991.
- [9] 近藤基吉・井関清志「近代数学〔上〕－現代数学の黎明期」, 日本評論社, 1982.
- [10] Maxwell, James Clerk, *Treatise on Electricity and Magnetism*, 2 vols., 1873, (2nd ed. 1881, 3rd ed. 1891) Reprint of 3rd ed.: Dover, 1954.
- [11] 「日本の数学100年史」, 上, 岩波書店, 1983.
- [12] 小倉金之助著作集第2巻「近代日本の数学」, 勁草書房, 1973.
- [13] Rosenstein, George M., Jr., "The Best Method. American Calculus Textbooks of the Nineteenth Century", in *A Century of Mathematics in America, Part III*, Amer. Math. Soc., 1989.
- [14] エミリオ・セグレ著, 久保亮五・矢崎裕二訳「古典物理学を創った人々 ガリレオからマクスウェルまで」, みすず書房, 1992. (Segre, Emilio Gino, *Personaggi e scoperte nella fisica classica - Dalla caduta dei gravi alle onde elettromagnetiche*, 1983の邦訳)
- [15] Tait, Peter Guthrie, *An Elementary Treatise of Quaternions*, Cambridge, 1867 (2nd ed. 1873, 3rd ed. 1890).
- [16] 「東京大学年報」, 全6巻, 東京大学出版会, 1993 - 1994.
- [17] 渡辺正雄「増訂 お雇い米国人科学教師」, 北泉社, 1996.