

一般化された数系に関するべき和と指数和への測度論的 アプローチ (Power and exponential sums for generalized coding systems by a measure theoretic approach)

大東文化大・経済 神谷諭一
Yuichi Kamiya
Department of Modern Economics
Faculty of Economics
Daito Bunka University
560 Iwadono, Higashi-Matsuyama,
Saitama, 355-8501, Japan
Email: ykamiya@ic.daito.ac.jp

福島県立医科大・医学 岡田達也
Tatsuya Okada
Department of Natural Sciences
Fukushima Medical University
Fukushima 960-1295, Japan
Email: tokada@fmu.ac.jp

東北学院大学・教養 関口健
Takeshi Sekiguchi
Department of Infomation Science
Faculty of Liberal Arts and Science
Tohoku Gakuin University
Sendai 981-3193, Japan
Email: ken@cs.tohoku-gakuin.ac.jp

東北学院大学・教養 塩田安信
Yasunobu Shiota
Department of Infomation Science
Faculty of Liberal Arts and Science
Tohoku Gakuin University
Sendai 981-3193, Japan
Email: shiota@cs.tohoku-gakuin.ac.jp

本稿では [9] で得られた結果の概略を紹介する.

1 paperfolding 数列に対応する数系

一枚の紙を半分, 半分と続けて折る作業を考える. 折る方向に関して, 「左半分を固定し, 右半分を左半分の上側に重ねる折り方」を 1 で表し, 「左半分を固定し, 右半分を左半分の下側に重ねる折り方」を -1 で表すことにする. この 1 と -1 を folding instruction と呼ぶことにする. folding instruction からなる数列 $\mathbf{b} = \{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ に従って, 一枚の紙を半分, 半分と続けて折り, 開いたときに現れる形 $\vee$ と $\wedge$ を左から並べる. そして, $\vee$ に 1 を対応させ, $\wedge$ に -1 を対応させるとき, 生じる数列が paperfolding 数列 ($\{P_{\mathbf{b}}(n)\}_{n=1}^{\infty}$ と記す) であると考えてよい. 実際には, $\mathbf{b} = \{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ は無限数列であり, 無限回折ることはできないので, 上の文章は paperfolding 数列の厳密な定義ではないが, 気持ちは伝わるだろう. paperfolding 数列の定義の詳細は Allouche–Shallit [1, Section 6.5] や Dekking [2] を参照されたい.

特に, folding instruction からなる数列 $\mathbf{b}$ が $\mathbf{b} = \{1, 1, 1, \dots\}$ (周期 1 の周期数列) であるとき, 生じる数列を regular paperfolding 数列という. regular paperfolding 数列の最初の方を記すと,

$$1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, \dots$$

である. 一方, regular paperfolding 数列に対応する $\vee$ と $\wedge$ を並べてみると

$$\vee, \vee, \wedge, \vee, \vee, \wedge, \wedge, \vee, \vee, \vee, \wedge, \wedge, \vee, \wedge, \wedge, \dots$$

であり, $\vee$ と $\wedge$ の開き方を 90° に調整するとドラゴン曲線になる (Figure 1 参照).

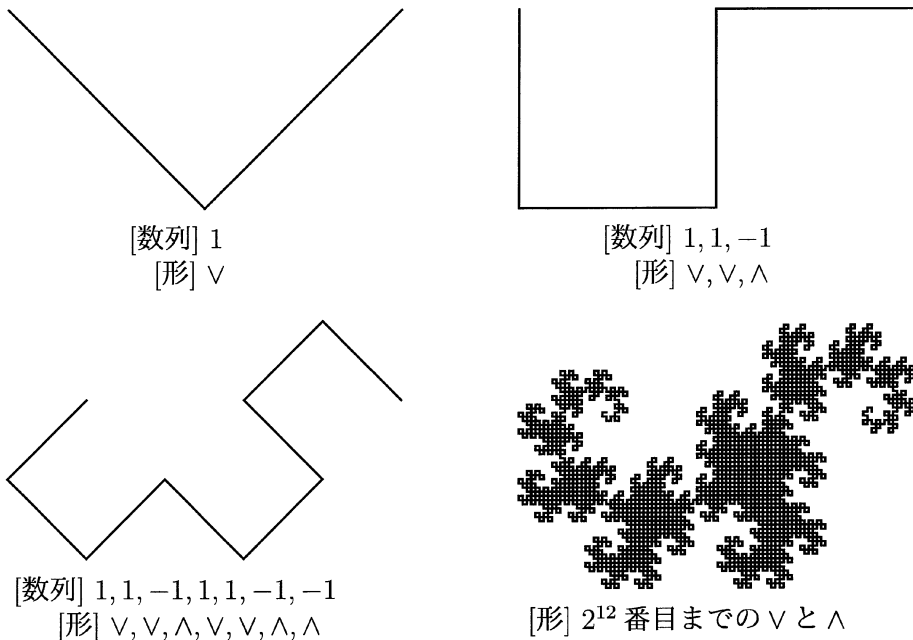


Figure 1: ドラゴン曲線

[8]において, $\mathbf{b} = \{b_k\}_{k=0}^\infty$ が $b_0 = 1$, かつ, 周期 K の周期数列であるとき, $\{P_b(n)\}_{n=1}^\infty$ を表現する数系 $\mathcal{C}_b$ が導入された. まずはこの数系の紹介から始めよう. $\mathbf{b}$ の周期 K に対して,

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 2^K - 2 & 2^K - 1 \\ 2^K - 1 & 2^K - 2 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

なる置換 σ_0 を考える.

η は次の表で定まるものとする：

$\eta(l)$	word
$\eta(0)$	$0 \cdots 0000$
$\eta(1)$	$0 \cdots 000b_0$
$\eta(2)$	$0 \cdots 00b_1b_0$
$\eta(3)$	$0 \cdots 00b_10$
$\eta(4)$	$0 \cdots 0b_2b_10$
$\eta(5)$	$0 \cdots 0b_2b_1b_0$
$\eta(6)$	$0 \cdots 0b_20b_0$
$\eta(7)$	$0 \cdots 0b_200$
$\vdots$	$\vdots$
$\eta(2^K - 1)$	$b_{K-1}0 \cdots 0$

非負整数 n に対し, $n = 2^K j + l$ ($0 \leq l \leq 2^K - 1$) で定まる整数 j, l を用いて, 数系 $\mathcal{C}_b$ を次のように定める：

$$\mathcal{C}_b(n) = \begin{cases} \eta(n), & 0 \leq n \leq 2^K - 1, \\ \mathcal{C}_b(j) \cdot \eta(\sigma_0^j(l)), & n \geq 2^K. \end{cases}$$

ただし, “.” はワードの接続を意味する.

ワード $\mathcal{C}_b(n)$ を構成するディジットの和を $S_{\mathcal{C}_b}(n)$ と記すとき,

$$S_{\mathcal{C}_b}(n) - S_{\mathcal{C}_b}(n-1) = P_b(n)$$

が成り立つことが [8] で証明された. この意味で, 数系 $\mathcal{C}_b$ は自然な対象であり, 次節で論じる数系 $\mathcal{C}_\sigma$ の導入の動機となっている.

2 置換 σ を含む数系 $\mathcal{C}_\sigma$ の導入

q を 2 以上の整数とする. σ は

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & q-1 \\ \sigma(0) & \sigma(1) & \cdots & \sigma(q-1) \end{pmatrix}$$

なる置換とする.

定義 1. 非負整数 n に対し, $n = qj + l$ ($0 \leq l \leq q-1$) で定まる整数 j, l を用いて, 数系 $\mathcal{C}_\sigma$ を次のように定める：

$$\mathcal{C}_\sigma(n) = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq q-1, \\ \mathcal{C}_\sigma(j) \cdot \sigma^j(l), & n \geq q. \end{cases}$$

ただし, “.” はワードの接続を意味する.

定義 2. 非負整数 n に対し, ワード $\mathcal{C}_\sigma(n)$ を構成するディジットの和を $S_{\mathcal{C}_\sigma}(n)$ と記す. 非負整数 n と $1 \leq l \leq q-1$ なる整数 l に対し, ワード $\mathcal{C}_\sigma(n)$ におけるディジット l の個数を $S_{\mathcal{C}_\sigma}(n, l)$ と記す. ベクトル $(S_{\mathcal{C}_\sigma}(n, 1), \dots, S_{\mathcal{C}_\sigma}(n, q-1))$ を $\mathbf{S}_{\mathcal{C}_\sigma}(n)$ と記す.

例 1. 通常の q 進数系は, 定義 1 の観点からは, $\sigma = \text{id}$ (恒等置換) の場合の $\mathcal{C}_\sigma$ とみなすことができる. 2 進数系を Table 1 に表しておこう.

n	j	l	$\mathcal{C}_\sigma(j) \cdot \sigma^j(l)$	$\mathcal{C}_\sigma(n)$	$S_{\mathcal{C}_\sigma}(n)$
0			0	0	0
1			1	1	1
2	1	0	$\mathcal{C}_\sigma(1) \cdot 0$	10	1
3	1	1	$\mathcal{C}_\sigma(1) \cdot 1$	11	2
4	2	0	$\mathcal{C}_\sigma(2) \cdot 0$	100	1
5	2	1	$\mathcal{C}_\sigma(2) \cdot 1$	101	2
6	3	0	$\mathcal{C}_\sigma(3) \cdot 0$	110	2
7	3	1	$\mathcal{C}_\sigma(3) \cdot 1$	111	3

Table 1: 2 進数系

$\sigma = \text{id}$ のときの $S_{\mathcal{C}_\sigma}(n)$ (ベクトル $\mathbf{S}_{\mathcal{C}_\sigma}(n)$) は通常の q 進数系のディジット和であり, 以前から研究されてきているという意味で $S_q(n)$ (ベクトル $\mathbf{S}_q(n)$) と記すことにしよう. $S_q(n)$ は様々な方面から研究されている. その研究の歴史に関しては, 例えば, Allouche–Shallit [1, pp.119–127] を参照されることにして, ここでは, 測度論的手法による研究 ([6], [15], [12], [13], [14], [11]) を紹介しよう.

$[0, 1]$ 区間を I と記す. I を $I_0(0)$ とも書くことにする. 固定された自然数 k に対し, I の部分区間を

$$I_k(n) = \left[\frac{n}{q^k}, \frac{n+1}{q^k} \right), \quad 0 \leq n \leq q^k - 2,$$

$$I_k(q^k - 1) = \left[\frac{q^k - 1}{q^k}, 1 \right],$$

で定める. $\{I_k(n); 0 \leq n \leq q^k - 1\}$ から生成される有限加法族を $\mathcal{F}_k$ と記し, $\cup_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_k$ から生成される加法族を $\mathcal{F}$ と記す. ベクトル $\mathbf{r} = (r_0, \dots, r_{q-2})$ は $0 < r_j < 1$ ($0 \leq j \leq q-2$), かつ, $0 < \sum_{j=0}^{q-2} r_j < 1$ を満たすものとし, $r_{q-1} = 1 - \sum_{j=0}^{q-2} r_j$ とおく. $\mu_{\mathbf{r}}$ を

- (i) $\mu_{\mathbf{r}}(I) = 1$,
- (ii) $0 \leq n \leq q^k - 1$ なる整数 n と $n = qj + l$ ($0 \leq l \leq q-1$) なる整数 j, l に対し,

$$\mu_{\mathbf{r}}(I_k(n)) = \mu_{\mathbf{r}}(I_{k-1}(j)) \times r_l,$$

で定める．このとき， μ_r は $\mathcal{F}$ 上の測度に拡張され (拡張されたものも μ_r と記す)， $(I, \mathcal{F}, \mu_r)$ は確率空間となる．[15], [12], [13], [14], [11] では，分布関数

$$L_r(x) = \mu_r([0, x]), \quad x \in I,$$

に関連して，次の結果が導かれた：

1. N を自然数とする． $t = \log N / \log q$ とし， t の整数部分，小数部分を各々， $[t]$, $\{t\}$ と記す．ベクトル $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{q-1})$ は各成分が実数値をとるものとし， $\langle \xi, S_q(n) \rangle$ は ξ と $S_q(n)$ の内積を表すものとする． $r = (r_0, \dots, r_{q-2})$ の成分を

$$r_0 = \frac{1}{1 + e^{\xi_1} + \dots + e^{\xi_{q-1}}}, \quad r_l = \frac{e^{\xi_l}}{1 + e^{\xi_1} + \dots + e^{\xi_{q-1}}}, \quad 1 \leq l \leq q-1,$$

で与えるとき，

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{\langle \xi, S_q(n) \rangle} = \frac{1}{r_0^{|t|+1}} L_r\left(\frac{1}{q^{1-\{t\}}}\right) \quad (1)$$

が成り立つ．

2. $L_r(x)$ は r の各成分について無限回微分可能である．そこで，(1) の両辺を ξ の各成分で高階微分することができ，その後に $\xi = \mathbf{0}$ とおけば，

$$\sum_{n=0}^{N-1} S_q^{k_1}(n, 1) \cdots S_q^{k_{q-1}}(n, q-1)$$

の $L_r(x)$ を用いた表現式が得られる．

3. $L_r(x)$ の r の各成分についての高階導関数 $\frac{\partial^{u_0+\dots+u_{q-2}}}{\partial r_0^{u_0} \cdots \partial r_{q-2}^{u_{q-2}}} L_r(x)$ は高木関数を一般化した関数で記述できる．

$q = 2$ のときは， $r = r_0$ である． $L_{r_0}(x)$ の r_0 についての導関数が高木関数と密接に関連することが，畑-山口による先駆的な研究 [6] によって発見された．測度論の立場からの接近を試み，[6] の結果を一般の q と高階導関数へと拡張したものが，上記の 3. である．

例 2. $q = 2$ ，かつ， $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき， C_σ は Reflected Binary Code (RBC) と呼ばれる数系になる．RBC を Table 2 に表しておこう．この場合の $S_{C_\sigma}(n)$ も以前から研究されてきているという意味で $S_{\text{RBC}}(n)$ と記すことにしよう． $S_{\text{RBC}}(n)$ の研究については，Flajolet-Ramshaw [3], Flajolet-Grabner-Kirschenhofer-Prodingier-Tichy [4], Grabner-Tichy [5], [7], [8], 小林 [10] などがある．[10] により，[15], [14] による測度論的手法は RBC の場合でも有効であることが示された．

n	j	l	$\mathcal{C}_\sigma(j) \cdot \sigma^j(l)$	$\mathcal{C}_\sigma(n)$	$S_{\mathcal{C}_\sigma}(n)$
0			0	0	0
1			1	1	1
2	1	0	$\mathcal{C}_\sigma(1) \cdot \sigma^1(0)$	11	2
3	1	1	$\mathcal{C}_\sigma(1) \cdot \sigma^1(1)$	10	1
4	2	0	$\mathcal{C}_\sigma(2) \cdot \sigma^2(0)$	110	2
5	2	1	$\mathcal{C}_\sigma(2) \cdot \sigma^2(1)$	111	3
6	3	0	$\mathcal{C}_\sigma(3) \cdot \sigma^3(0)$	101	2
7	3	1	$\mathcal{C}_\sigma(3) \cdot \sigma^3(1)$	100	1

Table 2: RBC

例 3. $q = 3$, かつ, $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ のとき, $\mathcal{C}_\sigma$ は次の Table 3 のようになる.

n	j	l	$\mathcal{C}_\sigma(j) \cdot \sigma^j(l)$	$\mathcal{C}_\sigma(n)$	$S_{\mathcal{C}_\sigma}(n)$	$S_{\mathcal{C}_\sigma}(n, 1)$	$S_{\mathcal{C}_\sigma}(n, 2)$
0			0	0	0	0	0
1			1	1	1	1	0
2			2	2	2	0	1
3	1	0	$\mathcal{C}_\sigma(1) \cdot \sigma^1(0)$	11	2	2	0
4	1	1	$\mathcal{C}_\sigma(1) \cdot \sigma^1(1)$	12	3	1	1
5	1	2	$\mathcal{C}_\sigma(1) \cdot \sigma^1(2)$	10	1	1	0
6	2	0	$\mathcal{C}_\sigma(2) \cdot \sigma^2(0)$	22	4	0	2
7	2	1	$\mathcal{C}_\sigma(2) \cdot \sigma^2(1)$	20	2	0	1
8	2	2	$\mathcal{C}_\sigma(2) \cdot \sigma^2(2)$	21	3	1	1
9	3	0	$\mathcal{C}_\sigma(3) \cdot \sigma^3(0)$	110	2	2	0
10	3	1	$\mathcal{C}_\sigma(3) \cdot \sigma^3(1)$	111	3	3	0
11	3	2	$\mathcal{C}_\sigma(3) \cdot \sigma^3(2)$	112	4	2	1

Table 3: 例 3

例 4. $q = 2^K$ ($K \in \mathbf{N}$), かつ, $\sigma = \sigma_0$ (σ_0 は前節のものと同一) のときの $\mathcal{C}_\sigma$ を考える. このとき, $S_{\mathcal{C}_\sigma}(n, l)$ は, 前節の $S_{\mathcal{C}_b}(n)$ と密接に関連する. 実際に, 前節のワード $\eta(l)$ を構成するディジットの和を $\overline{\eta(l)}$ と記すとき,

$$S_{\mathcal{C}_b}(n) = \sum_{l=1}^{2^K-1} \overline{\eta(l)} S_{\mathcal{C}_\sigma}(n, l)$$

が成り立つ.

以上の背景をもとにし,

$$\sum_{n=0}^{N-1} S_{\mathcal{C}_\sigma}^{k_1}(n, 1) \cdots S_{\mathcal{C}_\sigma}^{k_{q-1}}(n, q-1)$$

を測度論的手法で研究することが, [9] の目的である.

3 置換 σ を含む確率測度 $\mu_{d,r}$ の導入

$[0, 1]$ 区間を I と記す. 固定された自然数 k に対し, I の部分区間を

$$\begin{aligned} I_k(n) &= \left[\frac{n}{q^k}, \frac{n+1}{q^k} \right), \quad 0 \leq n \leq q^k - 2, \\ I_k(q^k - 1) &= \left[\frac{q^k - 1}{q^k}, 1 \right], \end{aligned}$$

で定める. $\{I_k(n); 0 \leq n \leq q^k - 1\}$ から生成される有限加法族を $\mathcal{F}_k$ と記し, $\cup_{k=0}^\infty \mathcal{F}_k$ から生成される加法族を $\mathcal{F}$ と記す.

定義 3. ベクトル $\mathbf{d} = (d_0, \dots, d_{q-2})$ は $0 < d_j < 1$ ($0 \leq j \leq q-2$), かつ, $0 < \sum_{j=0}^{q-2} d_j < 1$ を満たすものとし, $d_{q-1} = 1 - \sum_{j=0}^{q-2} d_j$ とおく. また, ベクトル $\mathbf{r} = (r_0, \dots, r_{q-2})$ は $0 < r_j < 1$ ($0 \leq j \leq q-2$), かつ, $0 < \sum_{j=0}^{q-2} r_j < 1$ を満たすものとし, $r_{q-1} = 1 - \sum_{j=0}^{q-2} r_j$ とおく. このとき, 置換 σ を含む $(I, \mathcal{F})$ 上の確率測度 $\mu_{d,r}$ を以下で定める:

- (i) $\mu_{d,r}(I) = 1$,
- (ii) $\mu_{d,r}(I_1(n)) = d_n, \quad 0 \leq n \leq q-1$,
- (iii) $k \geq 2$ とする. $0 \leq n \leq q^k - 1$ なる整数 n と $n = qj + l$ ($0 \leq l \leq q-1$) なる整数 j, l に対し,

$$\mu_{d,r}(I_k(n)) = \mu_{d,r}(I_{k-1}(j)) \times r_{\sigma(j)}.$$

定義 4. $\mu_{d,r}$ に対応する分布関数 $L_{d,r}$ を

$$L_{d,r}(x) = \mu_{d,r}([0, x]), \quad x \in I,$$

によって定める. なお, $L_{r,r}$ は L_r と省略することにする.

4 結果

まず, [11, Theorem 2.1] や [10, Theorem 1] の自然な拡張として, 次を得る.

定理 1. N を自然数とする. $t = \log N / \log q$ とし, t の整数部分, 小数部分を各々, $[t]$, $\{t\}$ と記す. ベクトル $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{q-1})$ は各成分が実数値をとるものとし, $\langle \xi, S_{C_\sigma}(n) \rangle$ は ξ と $S_{C_\sigma}(n)$ の内積を表すものとする. $\mathbf{r} = (r_0, \dots, r_{q-2})$ の成分を

$$r_0 = \frac{1}{1 + e^{\xi_1} + \dots + e^{\xi_{q-1}}}, \quad r_l = \frac{e^{\xi_l}}{1 + e^{\xi_1} + \dots + e^{\xi_{q-1}}}, \quad 1 \leq l \leq q-1,$$

で与え, 定義 4 における $L_{\mathbf{r}}$ を考えるとき,

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{\langle \xi, S_{C_\sigma}(n) \rangle} = \frac{1}{r_0^{[t]+1}} L_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{q^{1-\{t\}}} \right) \quad (2)$$

が成り立つ.

次に, $L_{\mathbf{r}}(x)$ の $\mathbf{r}$ の各成分についての微分可能性について, 次を得る.

定理 2. $L_{\mathbf{r}}(x)$ は $0 < r_j < 1$ ($0 \leq j \leq q-2$), かつ, $0 < \sum_{j=0}^{q-2} r_j < 1$ を満たす $\mathbf{r} = (r_0, \dots, r_{q-2})$ の各成分について無限回微分可能である.

定理 1 と 2 にもとづき, (2) の両辺を各変数 ξ_l に関して各々 k_l 回微分し, その後で $\xi = \mathbf{0}$ とおけば,

$$\sum_{n=0}^{N-1} S_{C_\sigma}^{k_1}(n, 1) \dots S_{C_\sigma}^{k_{q-1}}(n, q-1) = \frac{\partial^{k_1+\dots+k_{q-1}}}{\partial \xi_1^{k_1} \dots \partial \xi_{q-1}^{k_{q-1}}} \left(\frac{1}{r_0^{[t]+1}} L_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{q^{1-[t]}} \right) \right) \Big|_{\xi=\mathbf{0}} \quad (3)$$

を得る. [11, Theorem 2.2] と同様にして (3) の右辺を計算していくと, 次を得る.

定理 3. ベクトル $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_{q-1})$ と $\mathbf{0} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{q-1}$ に対して, $a(\mathbf{m}, x)$ を

$$a(\mathbf{m}, x) = \frac{\partial^{m_1+\dots+m_{q-1}}}{\partial \xi_1^{m_1} \dots \partial \xi_{q-1}^{m_{q-1}}} \left(\frac{1 + e^{\xi_1} + \dots + e^{\xi_{q-1}}}{q} \right)^x \Big|_{\xi=\mathbf{0}}$$

によって定め, $a^{(i)}(\mathbf{m}, x)$ を $a^{(i)}(\mathbf{m}, x) = (d^i/dx^i)a(\mathbf{m}, x)$ によって定める. 変数 $t > 0$ の関数 $H_{\mathbf{k}, i}(t)$ を

$$\begin{aligned} H_{\mathbf{k}, i}(t) &= \frac{q^i}{i!} \sum_{j_1=0}^{\min\{k_1, |\mathbf{k}|-i\}} \dots \sum_{j_{q-1}=0}^{\min\{k_{q-1}, |\mathbf{k}|-(j_1+\dots+j_{q-2})-i\}} \binom{k_1}{j_1} \dots \binom{k_{q-1}}{j_{q-1}} \\ &\quad \times q^{1-\{t\}} a^{(i)}(\mathbf{k} - \mathbf{j}, 1 - \{t\}) \frac{\partial^{j_1+\dots+j_{q-1}}}{\partial \xi_1^{j_1} \dots \partial \xi_{q-1}^{j_{q-1}}} L_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{q^{1-\{t\}}} \right) \Big|_{\xi=\mathbf{0}} \end{aligned} \quad (4)$$

によって定める. ただし, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_{q-1})$, $|\mathbf{k}| = k_1 + \dots + k_{q-1}$, $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_{q-1})$ であり, 和の取り方の一般形は

$$\sum_{j_*=0}^{\min\{k_*, |\mathbf{k}| - (j_1 + \dots + j_{q-1}) - i\}}$$

である. このとき, $H_{\mathbf{k},i}(t)$ は変数 t について連続, かつ, 周期 1 の周期関数であり

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_{\mathcal{C}_\sigma}^{k_1}(n, 1) \cdots S_{\mathcal{C}_\sigma}^{k_{q-1}}(n, q-1) = \sum_{i=0}^{|\mathbf{k}|} \left(\frac{\log N}{q \log q} \right)^i H_{\mathbf{k},i} \left(\frac{\log N}{\log q} \right)$$

が成り立つ.

注意 1. 定理 1, 2, 3 では, 置換 σ に関する制約は何ら必要ないのだが, 後述の定理 4 では, 置換 σ に関して $\sigma^q = \text{id}$ を仮定せざるを得なかった. 仮定 $\sigma^q = \text{id}$ を外した定理 4 に該当する結果を導くことは, 今後の一つの課題である. なお, 例 1, 2, 3, 4 における σ は全て $\sigma^q = \text{id}$ を満たしている.

仮定. これ以降では, 置換 σ に関して $\sigma^q = \text{id}$ を仮定する.

(4) 内の $\frac{\partial^{j_1 + \dots + j_{q-1}}}{\partial \xi_1^{j_1} \dots \partial \xi_{q-1}^{j_{q-1}}} L_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{q^{1-\{i\}}} \right)$ は合成関数の微分であり, これをさらに精密に表現するために, $L_{\mathbf{r}}(x)$ の $\mathbf{r}$ の各成分についての高階導関数 $\frac{\partial^{u_0 + \dots + u_{q-2}}}{\partial r_0^{u_0} \dots \partial r_{q-2}^{u_{q-2}}} L_{\mathbf{r}}(x)$ の明示公式を導きたい. そのために, まずは記号を導入しておこう. ベクトル $\mathbf{q}$, $\mathbf{e}_l$, $\mathbf{u}$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \underbrace{(1/q, \dots, 1/q)}_{q-1}, \\ \mathbf{e}_l &= \underbrace{(0, \dots, 0, \overset{l}{1}, 0, \dots, 0)}_{q-1}, \quad 0 \leq l \leq q-2, \\ \mathbf{u} &= (u_0, \dots, u_{q-2}), \quad u_l \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \end{aligned}$$

とし,

$$|\mathbf{u}| = u_0 + u_1 + \dots + u_{q-2}, \quad \mathbf{u}! = \prod_{l=0}^{q-2} u_l!,$$

と定める. 非負整数 n に対し, ベクトル $\mathbf{r}_{\sigma^n}$ を

$$\mathbf{r}_{\sigma^n} = (r_{\sigma^n(0)}, \dots, r_{\sigma^n(q-2)})$$

で定める．ある集合 S の指示関数を $\mathbf{1}_S$ と記すことにし， I 上の関数 Φ_l を

$$\Phi_l = \sum_{j=0}^{q-1} \mathbf{1}_{I_2(qj+\sigma^{-j}(l))}, \quad 0 \leq l \leq q-1,$$

で定める． I 上の関数 $\phi(x)$ を $\phi(x) = qx \pmod{1}$ で定める．ただし， $\phi(x)$ の不連続点での値は， $x \in [0, 1)$ のときは $0 \leq \phi(x) < 1$ となるように， $x = 1$ のときは $\phi(x) = 1$ と定めておく． I 上のある関数 f に対し，

$$f \circ \phi^j(x) = f(\underbrace{\phi(\phi(\cdots \phi(x)))}_j)$$

と記すことにする． I 上のルベーグ測度を μ で表す．

定義 5. 一般化された高木関数 $\mathcal{T}_{d,r,u}(x)$ ， $\mathcal{T}_u(x)$ を，以下のように帰納的に定める：

(i) $\mathbf{u} = \mathbf{e}_l$ のとき，

$$\mathcal{T}_{d,r,\mathbf{e}_l}(x) = \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{q^j-1} \mu_{d,r}(I_j(n)) \mathbf{1}_{I_j(n)}(x) \int_0^{\phi^j(x)} \left(\frac{\Phi_l}{r_l} - \frac{\Phi_{q-1}}{r_{q-1}} \right) d\mu_{r_{\sigma^n}, r}$$

と定める．特に，

$$\mathcal{T}_{\mathbf{e}_l}(x) = \mathcal{T}_{q,q,\mathbf{e}_l}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{q^j} \int_0^{\phi^j(x)} (\Phi_l - \Phi_{q-1}) d\mu.$$

(ii) $|\mathbf{u}| \geq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{d,r,\mathbf{u}}(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha=0 \\ u_\alpha > 0}}^{q-2} \left(\left(\frac{\Phi_\alpha}{r_\alpha} - \frac{\Phi_{q-1}}{r_{q-1}} \right) \circ \phi^j(x) \right) \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{q^{j+1}-1} \mu_{d,r}(I_{j+1}(n)) \mathbf{1}_{I_{j+1}(n)}(x) \left(\mathcal{T}_{r_{\sigma^n}, r, \mathbf{u} - \mathbf{e}_\alpha} \circ \phi^{j+1}(x) \right) \end{aligned}$$

と定める．特に，

$$\mathcal{T}_u(x) = \mathcal{T}_{q,q,u}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{q^j} \sum_{\substack{\alpha=0 \\ u_\alpha > 0}}^{q-2} \left((\Phi_\alpha - \Phi_{q-1}) \circ \phi^j(x) \right) \times \left(\mathcal{T}_{u - \mathbf{e}_\alpha} \circ \phi^{j+1}(x) \right).$$

以上の記号の準備のもとで、一般化された高木関数による $\frac{\partial^{u_0+\dots+u_{q-2}}}{\partial r_0^{u_0}\dots\partial r_{q-2}^{u_{q-2}}}L_r(x)$ の明示公式を述べよう。

定理 4. $\frac{\partial^{u_0+\dots+u_{q-2}}}{\partial r_0^{u_0}\dots\partial r_{q-2}^{u_{q-2}}}L_r(x)$ について、次が成り立つ：

(i) $\mathbf{u} = \mathbf{e}_l$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial r_l} L_r(x) &= (\mathbf{1}_{I_1(l)}(x) - \mathbf{1}_{I_1(q-1)}(x))(L_{q,r}(x) - x) \\ &\quad + \left(q \sum_{n=0}^{q-1} r_n \mathbf{1}_{I_1(n)}(x) \right) \mathcal{T}_{q,r,\mathbf{e}_l}(x) + \int_0^x (\mathbf{1}_{I_1(l)} - \mathbf{1}_{I_1(q-1)}) d\mu. \end{aligned}$$

(ii) $|\mathbf{u}| \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{1}{q\mathbf{u}!} \frac{\partial^{u_0+\dots+u_{q-2}}}{\partial r_0^{u_0}\dots\partial r_{q-2}^{u_{q-2}}} L_r(x) &= q \sum_{\substack{j=0 \\ u_j > 0}}^{q-2} (\mathbf{1}_{I_1(j)}(x) - \mathbf{1}_{I_1(q-1)}(x)) \mathcal{T}_{q,r,\mathbf{u}-\mathbf{e}_j}(x) \\ &\quad + \left(q \sum_{n=0}^{q-1} r_n \mathbf{1}_{I_1(n)}(x) \right) \mathcal{T}_{q,r,\mathbf{u}}(x). \end{aligned}$$

注意 2. ここで、定義 3 について論じておきたい。定理 1, 2, 3 のみならば、定義 3 の (ii) を削除して、(iii) の $k \geq 2$ の部分を $k \geq 1$ に取り替えたものを定義としても問題は起こらない。定理 1, 2, 3 は $L_{r,r}$ に関する主張であるからである。一方、定義 5 と定理 4 から、一般化された高木関数 $\mathcal{T}_{d,r,\mathbf{u}}(x)$ を導入するためには、定義 3 の (ii) が必要であることがわかる。今回の論文による定義 3 の導入は、 $\sigma^q = \text{id}$ を満たす置換 σ を含む数系 $\mathcal{C}_\sigma$ に連動したものだといえる。

(4) 内の $\frac{\partial^{j_1+\dots+j_{q-1}}}{\partial \xi_1^{j_1}\dots\partial \xi_{q-1}^{j_{q-1}}} L_r\left(\frac{1}{q^{1-\{t\}}}\right) \Big|_{\xi=0}$ は $\frac{\partial^{u_0+\dots+u_{q-2}}}{\partial r_0^{u_0}\dots\partial r_{q-2}^{u_{q-2}}} L_r\left(\frac{1}{q^{1-\{t\}}}\right) \Big|_{r=\mathbf{q}}$ によって表すことができる。そこで、定理 4 にて $\mathbf{r} = \mathbf{q}$ とおこう。 $\mathbf{r} = \mathbf{q}$ ならば、 $\mu_{r_{\sigma^n}, r}$ と $\mu_{q,r}$ はともにルベーグ測度 μ となることに注意すれば、次を得る。

系 1. $\frac{\partial^{u_0+\dots+u_{q-2}}}{\partial r_0^{u_0}\dots\partial r_{q-2}^{u_{q-2}}} L_r(x) \Big|_{r=\mathbf{q}}$ について、次が成り立つ。

(i) $\mathbf{u} = \mathbf{e}_l$ のとき、

$$\frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial r_l} L_r(x) \Big|_{r=\mathbf{q}} = \mathcal{T}_{\mathbf{e}_l}(x) + \int_0^x (\mathbf{1}_{I_1(l)} - \mathbf{1}_{I_1(q-1)}) d\mu.$$

(ii) $|\mathbf{u}| \geq 2$ のとき、

$$\frac{1}{q\mathbf{u}!} \frac{\partial^{u_0+\dots+u_{q-2}}}{\partial r_0^{u_0}\dots\partial r_{q-2}^{u_{q-2}}} L_r(x) \Big|_{r=\mathbf{q}} = q \sum_{\substack{j=0 \\ u_j > 0}}^{q-2} (\mathbf{1}_{I_1(j)}(x) - \mathbf{1}_{I_1(q-1)}(x)) \mathcal{T}_{\mathbf{u}-\mathbf{e}_j}(x) + \mathcal{T}_{\mathbf{u}}(x).$$

References

- [1] J. P. Allouche and J. Shallit, *Automatic Sequences: Theory, Applications, Generalizations*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [2] M. Dekking, Paperfolding morphisms, plane-filling curves, and fractal tiles. *Theor. Comput. Sci.*, 414 (2012), 20–37.
- [3] P. Flajolet and L. Ramshaw, A note on Gray code and odd-even merge. *SIAM J. Comput.*, 9 (1980), 142–158.
- [4] P. Flajolet, P. Grabner, P. Kirschenhofer, H. Prodinger and R. F. Tichy, Mellin transforms and asymptotics: digital sums. *Theor. Comput. Sci.*, 123 (1994), 291–314.
- [5] P. J. Grabner and R. F. Tichy, Contributions to digit expansions with respect to linear recurrences. *J. Number Theory*, 36 (1990), 160–169.
- [6] M. Hata and M. Yamaguti, The Takagi function and its generalization. *Japan J. App. Math.*, 1 (1984), 183–199.
- [7] Y. Kamiya and L. Murata, Relations among arithmetical functions, automatic sequences, and sum of digits functions. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 24 (2012), 307–337.
- [8] Y. Kamiya and L. Murata, Certain codes related with generalized paperfolding sequences. to appear in *J. Théor. Nombres Bordeaux*.
- [9] Y. Kamiya, T. Okada, T. Sekiguchi, Y. Shiota, Power and exponential sums for generalized coding systems by a measure theoretic approach, preprint
- [10] Z. Kobayashi, Digital sum problems for the Gray code representation of natural numbers. *Interdiscip. Inform. Sci.*, 8 (2002), 167–175.
- [11] K. Muramoto, T. Okada, T. Sekiguchi, and Y. Shiota, Power and exponential sums of digital sums with information per digits. *Math. J. of Toyama Univ.*, 26 (2003), 35–44.
- [12] T. Okada, T. Sekiguchi and Y. Shiota, Applications of binomial measures to power sums of digital sums. *J. Number Theory*, 52 (1995), 256–266.
- [13] T. Okada, T. Sekiguchi and Y. Shiota, An explicit formula of the exponential sums of digital sums. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 12 (1995), 425–438.

- [14] T. Okada, T. Sekiguchi, and Y. Shiota, A generalization of Hata-Yamaguti's results of the Takagi function II: multinomial case. *Japan J. App. Math.*, 13 (1996), 435–463.
- [15] T. Sekiguchi and Y. Shiota, A generalization of Hata-Yamaguti's results of the Takagi function. *Japan J. App. Math.*, 8 (1991), 203–219.