

Cyclic Composition Operators on the Disc Algebra

信州大 理 高木 啓行 (Hiroyuki Takagi)

サイクリックな合成作用素の研究が、最近 活発になっている。この講演では、ディスク環上のサイクリックな合成作用素について、わかったことをいくつか 報告する。

B を 可分な Banach 空間とし、 T を B 上の有界線形作用素とする。 T による B の元 f の軌跡 (orbit) は、

$$\text{Orb}(T; f) = \{f, Tf, T^2f, \dots, T^nf, \dots\}$$

と表す。もし、ある $f \in B$ に対して、 $\text{Orb}(T; f)$ から生成される閉部分空間が B 全体になるとき、すなわち、

$$\overline{\text{span Orb}(T; f)} = B$$

となるとき、 T は サイクリック (cyclic) であるという。とくに、ある $f \in B$ に対して、 $\text{Orb}(T; f)$ の閉包自体が B 全体になるとき、すなわち、

$$\overline{\text{Orb}(T; f)} = B$$

となるとき、 T は 超サイクリック (hypercyclic) であるという。明らかに、超サイクリックな作用素は、サイクリックである。

サイクリックな作用素は、[4], [5] などの本にでてくるが、系統だった詳しい解説は見当たらないし、注目度も低かったようである。しかし、定義の中の集合 $\overline{\text{span Orb}(T; f)}$ が T の不変部分空間になっていることなどを考えると、この概念の重要性に 気づかされる。この作用素が、脚光をあびるようになったのは、実に 1990 年代になってからである。とはいっても、定義で述べられているような現象は、G.D. Birkhoff [1] や W. Seidel and J. Walsh [8] らの古典的な結果に存在していた。それに着目して この作用素の研究をはじめたのが、P.S. Bourdon と J.H. Shapiro である。彼らは、1990 年代前半に、Hardy 空間 $H^2(\mathbb{D})$ 上の合成作用素が (超) サイクリックになるかどうかを 調べた。その結果は、[2], [3], [9, Chapters 7, 8] に 詳しく述べられている。それによると、 $\mathbb{D}$ から $\mathbb{D}$ への正則関数 φ による $H^2(\mathbb{D})$ 上の合成作用素 C_φ について、たとえば、

$\varphi(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}$ のとき、 C_φ は、 $H^2(\mathbb{D})$ 上の超サイクリックな作用素になる。

$\varphi(z) = \frac{2z}{4-z}$ のとき、 C_φ は、 $H^2(\mathbb{D})$ 上の 超サイクリックではないが
サイクリックな作用素になる。

$\varphi(z) = \frac{z}{2-z}$ のとき、 C_φ は、 $H^2(\mathbb{D})$ 上のサイクリックな作用素でない。

というようなことがわかる。この例の φ はすべて 放物型の一次分数変換だが、 C_φ のサイクリック性は 3 つの様相を呈している。このように、 $H^2(\mathbb{D})$ 上の合成作用素が (超) サイク

リックになるかどうかの判定は、相当微妙であることが見込まれる。彼らの結果はかなりの広範囲をカバーしているが、現時点でも、サイクリックな合成作用素の完全な特徴づけにはいたっていない。

さて、この講演では、目先を変えて、 $H^2(\mathbb{D})$ のかわりに他の空間を考えることにしたい。P.S. Bourdon and J.H. Shapiro の結果は、 $H^2(\mathbb{D})$ についてだけしか述べられていないが、空間 $H^p(\mathbb{D})$ ($1 \leq p < \infty$) に一般化しても成り立つことが、注記されている。その際の証明の補足や変更については、[7] をみていただきたい。ただし、そこでは $p = \infty$ の場合を除いている。実は、有界正則関数の空間 $H^\infty(\mathbb{D})$ は可分でないから、その上でサイクリックな作用素を考えるのは意味がないのである。そこで、同じノルムの空間として、ディスク環をとりあげることにする。

$\mathbb{D}$ を複素平面の単位開円板とし、 $\overline{\mathbb{D}}$ を $\mathbb{D}$ の閉包とする。 $\overline{\mathbb{D}}$ 上で連続で $\mathbb{D}$ 上で正則な関数全体からなる $\overline{\mathbb{D}}$ 上の関数環を、ディスク環 (disc algebra) といい、 $A(\overline{\mathbb{D}})$ と表す。いうまでもなく、 $A(\overline{\mathbb{D}})$ は可分な Banach 空間である。つぎに、

$$S(\overline{\mathbb{D}}) = \{\varphi \in A(\overline{\mathbb{D}}) : \varphi(\overline{\mathbb{D}}) \subset \mathbb{D}\}$$

とおく。いま、 $S(\overline{\mathbb{D}})$ から関数 φ をひとつえらんでおき、 $A(\overline{\mathbb{D}})$ 上の作用素 C_φ を、

$$(C_\varphi f)(z) = f(\varphi(z)) \quad (z \in \overline{\mathbb{D}}, f \in A(\overline{\mathbb{D}}))$$

と定義する。すると、 C_φ は $A(\overline{\mathbb{D}})$ 上の有界線形作用素で、 $\|C_\varphi\| = 1$ となる。この作用素 C_φ を、(φ による) $A(\overline{\mathbb{D}})$ 上の合成作用素 (composition operator) という。

これから、つぎの問題を考えよう。

問題. どんな $\varphi \in S(\overline{\mathbb{D}})$ に対して、 $A(\overline{\mathbb{D}})$ 上の合成作用素 C_φ は、サイクリックになるか？あるいは、超サイクリックになるか？

まず、 $\|C_\varphi\| = 1$ より、どんな $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$ に対しても、

$$\text{Orb}(T; f) \subset \{g \in A(\overline{\mathbb{D}}) : \|g\| \leq \|f\|\}$$

となるから、

定理 1 $A(\overline{\mathbb{D}})$ 上の合成作用素は超サイクリックにはならない。

はじめに述べたように、 $H^2(\mathbb{D})$ 上の合成作用素には超サイクリックになるものが存在したから、 $A(\overline{\mathbb{D}})$ と $H^2(\mathbb{D})$ とでは、その上の合成作用素の超サイクリック性が異なっていることになる。何にせよ、この定理によって、ディスク環上の合成作用素の超サイクリック性の問題が簡明に解決してしまったので、あとはサイクリック性の問題だけ考えればよい。

それについては、また微妙な様相が出てくるが、ここでは、 $H^2(\mathbb{D})$ の場合と同様な結果について、述べてみたい。

つぎの定理は、[3, Theorem 1.7] と同様にして示される。

定理 2 $\varphi \in S(\mathbb{D})$ が $\mathbb{D}$ 上で 1 対 1 でないとき、 $A(\mathbb{D})$ 上の合成作用素 C_φ は サイクリックにならない。

こうして、問題は つぎのようにしぼられる：

$\varphi \in S(\mathbb{D})$ が $\mathbb{D}$ 上で 1 対 1 の場合に、

$A(\mathbb{D})$ 上の合成作用素 C_φ が サイクリックになるか？

まず、小手調べとして、 $\varphi \in S(\mathbb{D})$ が 一次分数変換の場合を考えてみる。この場合には、 φ が具体的に式で表せるので、かなり扱いやすい。P.S. Bourdon and J.H. Shapiro も、 $H^2(\mathbb{D})$ の場合に同様の考察をしていて ([3, Theorem 2.2]), その論法をくみとって、ディスク環の場合に応用することにする。そうすると、 $\varphi \in S(\mathbb{D})$ が 一次分数変換で、 φ のひとつの不動点が $\mathbb{D}$ 内にある場合は、 $H^2(\mathbb{D})$ の場合と同様の つぎの定理が みちびける。

定理 3 $\varphi \in S(\mathbb{D})$ は 一次分数変換で、 φ の不動点のひとつ p が $\mathbb{D}$ 内にあるとする。このとき、 φ は、

- (a) φ が 楕円型で、 $\arg \varphi'(p)$ が π の有理数倍のとき。
- (b) " $\arg \varphi'(p)$ が π の無理数倍のとき。
- (c) φ が 双曲型で、 φ のもうひとつの不動点が $\partial\mathbb{D}$ にあるとき。
- (d) " φ のもうひとつの不動点が $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ にあるとき。
- (e) φ が 斜航型のとき。

と分類することができ、 $A(\mathbb{D})$ 上の合成作用素 C_φ について、

- (b), (d), (e) のとき、 C_φ は サイクリックであり、
- (a), (c) のとき、 C_φ は サイクリックでない。

この定理の証明は、[3, Theorem 2.2] の証明と 同じ道筋をたどることで 達成できる。そのとき、 $A(\mathbb{D})$ の集合の稠密性を調べることになるが、それには、 $A(\mathbb{D})$ の共役空間についての情報が 必要になる。 $H^2(\mathbb{D})$ の場合は、 $H^2(\mathbb{D})^* \cong H^2(\mathbb{D})$ だから 簡単であったが、ディスク環の場合は そう簡単にはいかない。しかし、Cauchy 変換 ([10, 6.1 節] などをみよ) などの概念を使えば、この難所が回避できる。詳しくは、[7] をみていただきたい。

さて、定理 3 では、 $\varphi \in S(\mathbb{D})$ が 一次分数変換という 特殊な場合だけを考えたわけだが、この場合を 一般化する常套手段がある。それは、一次分数変換モデル定理 (linear-fractional model theorem) ([3, Theorem 0.4], [9, §8.1, 8.2]) を用いる方法である。このモデル定理において、 φ が $\mathbb{D}$ 内に不動点をもつ場合は、つぎの Königs の定理 ([6], [9, §6.1]) となる。

Königs の定理 φ は $\mathbb{D}$ 上の 1 対 1 の正則関数で, $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ をみたすものとする. もし, φ が $\mathbb{D}$ 内に不動点 p をもてば,

$$\sigma(\varphi(z)) = \lambda \sigma(z) \quad (z \in \mathbb{D})$$

をみたす定数 λ と, $\mathbb{D}$ 上の 1 対 1 の正則関数 σ が存在する. ただし, $\lambda = \varphi'(p)$ である. また, φ に対して, σ は定数倍を無視すれば一意的に決まる.

この定理の関数 σ を, φ の **Königs 関数** という. [3, Theorem 3.2] のアイデアを用いれば, 定理 3 の (d), (e) の部分は, つぎのように拡張できる.

定理 4 $\varphi \in S(\mathbb{D})$ は, $\mathbb{D}$ 上で 1 対 1 で, $\mathbb{D}$ 内に不動点をもつとする. φ の König 関数 σ が $A(\mathbb{D})$ の元で, σ の多項式全体が $A(\mathbb{D})$ において稠密なとき, $A(\mathbb{D})$ 上の合成作用素 C_φ はサイクリックになる.

この定理の仮定は少々みにくいので, 例をあげておこう. G を複素平面の Jordan 領域で, ある定数 λ に対して, $\lambda G \subset G$ をみたすものとする. そして, $\mathbb{D}$ から G の上への Riemann の写像を, Carathéodory の定理によって $\mathbb{D}$ から $\overline{G}$ の上への同相写像に拡張したものを, σ とかく. この関数 σ を用いて, $\mathbb{D}$ 上の関数 φ を,

$$\varphi(z) = \sigma^{-1}(\lambda \sigma(z)) \quad (z \in \mathbb{D})$$

と定めると, φ は定理 4 の仮定をみたす. 実際, Königs の定理の一意性から, φ の König 関数が σ 自身となり, また Mergelyan の多項式近似定理 ([10, 定理 6.5.2]) から, σ の多項式全体が $A(\mathbb{D})$ において稠密になることが簡単に示される. この例の方法から, 定理 4 が適応できる関数 φ をたくさんつくることができる. しかし, これで, $\varphi \in S(\mathbb{D})$ が $\mathbb{D}$ 内に不動点をもつ場合がすべてカバーされたわけではなく, いわんや, $\mathbb{D}$ 内に不動点をもたない場合については, ここではほとんどわかっていない. これから考えてみたいものである.

付記: この講演の内容は, 信州大学大学院の佐藤正樹くんが修士論文 [7] を作成する際に, 彼と講演者が共同研究したことにもとづいている.

参 考 文 献

- [1] G.D. Birkhoff, *Démonstration d'un Théorème élémentaire sur les fonctions entières*, C.R. Acad. Sci. Paris, **189** (1929), 473–475.
- [2] P.S. Bourdon and J.H. Shapiro, *Cyclic composition operators on H^2* , in “Operator Theory/Operator Algebras and Applications,” 51 Part II, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1990, pp. 43–53.

- [3] P.S. Bourdon and J.H. Shapiro, "Cyclic Phenomena for Composition Operators," Mem. **596**, Amer. Math. Soc, New York, 1997.
- [4] J.B. Conway, "A Course in Functional Analysis," 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1990.
- [5] P.R. Halmos, "A Hilbert Space Problem Book," 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1982.
- [6] G.Königs, *Recherches sur les intégrales de certaines équationes fonctionelles*, Annales Ecole Normale Superior (3), **1** (1884), Supplément, 3–41.
- [7] 佐藤 正樹 (M. Sato), サイクリックな合成作用素 (Cyclic compositon operators), 修士論文 (信州大), 1999.
- [8] W.Seidel and J.Walsh, *On approximation by Euclidean and non-Euclidean translates of analytic functions*, Bull. Amer. Math. Soc., **47** (1941), 916–920.
- [9] J.H. Shapiro, "Composition Operators and Classical Function Theory," Springer-Verlag, New York, 1993.
- [10] 竹之内 脩, 阪井 章, 貴志 一男, 神保 敏弥, 「関数環」(数理科学シリーズ 8), 培風館, 1977.