

・ ℓ 函数の決定

— quasi-homogeneous, isolated singularity の場合

三輪 哲二

この稿の目的は, quasi-homogeneous かつ isolated な singularity の ℓ 函数が, weight で "explicit" に計算できるのを示す事である。

問題の説明から始める。

$f(x)$ を原点で "正則な函数" とする。この時 S について多項式で "ある" ような微分作用素 $P(s, x, D)$ が存在して (Bernstein [1], Björk [2])

$$(1) \quad P(s, x, D) f(x)^{s+1} = \ell(s) f(x)^s$$

となる。ここで $\ell(s)$ は S の多項式である。このような $\ell(s)$ の全体は 二変数多項式環 $\mathbb{C}[S]$ の ideal を作る。そのイデアルの生成元を $f(x)$ の ℓ 函数という。

以下 $\mathcal{D}$ を微分作用素の層, $\mathcal{D}[S]$ を S について多項式の微分作用素の層とする。

ℓ 函数 $\ell(s)$ は $\mathcal{D}[S]$ 左加群

$$(2) \quad \mathcal{M} = \mathcal{D}[S] f(x)^s / \mathcal{D}[S] f(x)^{s+1}$$

における $\mathcal{D}[S]$ -準同型 $S: P(s, x, D) f^s \mapsto s P(s, x, D) f^s$

の最小多項式である。 $\text{End}_{\mathbb{C}[s]}(M)$ が有限次元 $\mathbb{C}$ である事が言えれば, (1)を満たす $P(s, x, D)$ 及び $\psi(s)$ の存在の別証明になるが, まだ証明されていない。

ここで扱うのは次の二つの仮定を置く場合。

仮定 1 vector field X があって $Xf = f$

$\mathcal{O} = (f_1, \dots, f_n)$ $f_\nu = \frac{\partial f}{\partial x_\nu}$ とおくと
この仮定は $f \in \mathcal{O}$ と同じである。

仮定 2 $S = \{x \in \mathbb{C}^n; f(x) = 0\}$ の特異点は原点のみである。

仮定 2 から, 座標変換により $f(x)$ は多項式になる。また仮定 2 のもとで, 座標変換の後仮定 1 の X は次の形に取れる。(斎藤 恭司 [3])

$$(3) \quad X = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{r} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

ここで $(r; r_1, \dots, r_n)$ は正の整数で "weight" と呼ぶ。

$$(4) \quad X f(x)^s = s f(x)^{s-1} \cdot X f(x) = s f(x)^s$$

であるから (2) は次のように書きかえられる。

$$(5) \quad \mathcal{M} = \mathcal{D} f(x)^S / \mathcal{D} f(x)^{S+1}$$

$\mathcal{J} = \{ P(x, D) \in \mathcal{D} ; P f^S \in \mathcal{D} f^{S+1} \}$
を求めて見よう。

$P f^S = Q f^{S+1}$ とすると $(P - Q f) f^S = 0$
よって $P = (P - Q f) + Q f$ と書けるから

$\mathcal{J}_0 = \{ P(x, D) \in \mathcal{D} ; P(x, D) f(x)^S = 0 \}$
とすれば

$$(6) \quad \mathcal{J} = \mathcal{J}_0 + \mathcal{D} f$$

で与えられる。

命題 1 $\mathcal{J}_0 = \sum \mathcal{D} (f_i \frac{\partial}{\partial x_j} - f_j \frac{\partial}{\partial x_i})$

(略証) $P(x, D) f(x)^S = 0$ とする。左辺の計算を実行して S のべきに展開すると

$$P_m(x, \text{grad } f) S^m + \dots = 0 \quad (m \text{ は } P \text{ の階数})$$

となるから $P_m(x, \text{grad } f) = 0$

ここで後に述べる補題から仮定 2 を使うと

$$P_m(x, \xi) \in \oplus \mathcal{O}_0[\xi] (f_i \xi_j - f_j \xi_i)$$

となり

$P(x, D) = \sum Q_{ij}(x, D) (f_i \frac{\partial}{\partial x_j} - f_j \frac{\partial}{\partial x_i}) + \text{低階}$
と書けるから、同じ議論をくり返す事により
命題は証明される。

命題1の証明に必要な代数的補題を説明する。

A を noetherian local ring

$\mathfrak{m}$ を A の maximal ideal とする。

① M を A module とする時 $f \in A$ が " M regular" とは $f: M \longrightarrow M$ が injective

② $(f_1, \dots, f_n)$ が " M regular" とは

f_i が $M/f_1M + \dots + f_{i-1}M$ regular

③ M : 有限生成, $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{m}$ の時
次は同値

i) $(f_1, \dots, f_n)$ が " M regular"

ii) $\alpha = (f_1, \dots, f_n)$ として

$$\bigoplus_{\nu=0}^{\infty} \alpha^{\nu} M / \alpha^{\nu+1} M \longleftarrow (M/\alpha M)[T_1, \dots, T_n]$$

は bijective

$$\text{iii) } \bigoplus_{\nu=0}^{\infty} \alpha^{\nu} M \longleftarrow M[T_1, \dots, T_n]$$

の kernel は $A[T_1, \dots, T_n]$ module として $f_i T_j - f_j T_i$ で生成される。

ここで $\longleftarrow$ は 各同次成分ごとに T_i に f_i を代入する操作である。

④ A を regular local ring とする。
 この時 $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{M}$ $\mathcal{O} = (f_1, \dots, f_n)$
 に対して $\dim(A/\mathcal{O}) = \dim A - n$
 が成立すれば $(f_1, \dots, f_n)$ は A regular

さて $\ell(s)$ は $s+1$ で割られる事に注意する。
 実際、そうでないとすれば (1) で $s = -1$ と
 おくと矛盾する。

$\ell(s) = (s+1) \ell_n(s)$ と分解して $\ell_n(s)$ を
 求めよう。そのためには $\mathcal{M}$ の部分加群

$$(b) \mathcal{M}_n = \mathcal{O}(s+1)f^s / (\mathcal{O}(s+1)f^s \cap \mathcal{O}f^{s+1})$$

の準同型としての s の最小多項式を求めれば
 よい。

命題 2 $\mathcal{M}_n = \mathcal{O} / \mathcal{O}f_1 + \dots + \mathcal{O}f_n$

(証明) $P(s+1)f^s = Qf^{s+1}$ とする

$s = -1$ とおくと $0 = Q \cdot 1$

よって Q は $\sum_{i=1}^n Q_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ の形をしている。

$$Qf^{s+1} = (s+1) \sum_{i=1}^n Q_i f_i f^s \quad \text{だから}$$

$$(s+1) \text{ で割って } Pf^s = \sum_{i=1}^n Q_i f_i f^s$$

$$\text{従って } P - \sum_{i=1}^n Q_i f_i \in \sum \mathcal{D}(f_i \frac{\partial}{\partial x_j} - f_j \frac{\partial}{\partial x_i})$$

$$\text{よって } P \in \sum \mathcal{D} f_i \quad // \quad \sum \mathcal{D}(\frac{\partial}{\partial x_j} f_i - \frac{\partial}{\partial x_i} f_j)$$

命題3

(8) $X: \mathcal{D}/\mathcal{D}f_1 + \dots + \mathcal{D}f_n \rightarrow$
の最小多項式と

(9) $X^*: \mathcal{Q}/(f_1, \dots, f_n) \rightarrow$
の最小多項式とは一致する。(X^* は X のadjoint)

(証明)

(8)の作用は $P(x, D) \mapsto P(x, D) \cdot X$

(9)の作用は $a(x) \mapsto X^* a(x)$ である。

$\forall P(x, D) \notin (X) \in \mathcal{D}f_1 + \dots + \mathcal{D}f_n$

$\Leftrightarrow \notin (X^*) \forall P^*(x, D) \forall a(x) \in (f_1, \dots, f_n)$

$\Leftrightarrow \notin (X^*) \forall a(x) \in (f_1, \dots, f_n) //$

最後に (9) の線型写像を具体的に決定しよう。
まず, $\mathcal{Q}/(f_1, \dots, f_n)$ の $\mathbb{C}$ 基底として, 単項式
から成るものが取れるが, 単項式は X^* の
固有ベクトルだから, X^* は対角化される。

従って t^{-rX^*} もまた $\mathcal{Q}/(f_1, \dots, f_n)$ の
線型写像として確定するが, 我々の定理は
次の通りである。

定理 $\text{Trace}(t^{-rX^*}) = \frac{(t^{r_1} - t^r) \dots (t^{r_n} - t^r)}{(1 - t^{r_1}) \dots (1 - t^{r_n})}$

注意 齊藤 [3] Lemma 1.5. による, isolated singularity のための必要条件を weight の条件に書き直すと

weight $(\tau; \tau_1, \dots, \tau_n)$ の多項式で "isolated singularity" を持つものが存在すれば

(10) 各 $\{\nu_1, \dots, \nu_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ に対し i) か ii) が成り立つ。

i) $\tau \in \langle \tau_{\nu_1}, \dots, \tau_{\nu_k} \rangle$

ii) $\exists \{\mu_1, \dots, \mu_k\} \subset \{1, \dots, n\}$

$\{\mu_1, \dots, \mu_k\} \cap \{\nu_1, \dots, \nu_k\} = \emptyset$

$\tau - \mu_i \in \langle \tau_{\nu_1}, \dots, \tau_{\nu_k} \rangle$

但し $\langle \tau_{\nu_1}, \dots, \tau_{\nu_k} \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^k m_i \tau_{\nu_i} ; m_i \in \{0, 1, 2, \dots\} \right\}$

条件 (10) から定理の右辺が t の多項式になる事が言える。しかし, 逆は言えない。(例えば

$(\tau; \tau_1, \dots, \tau_4) = (93; 31, 3, 10, 18)$)

また条件 (10) が十分かどうかは知られていない。なお

Orlik-Wagreich: Isolated singularities of algebraic surfaces with $\mathbb{C}^*$ -action にある分類は間違っている。

定理の系

定理の右辺を $\sum t^{\alpha_\nu}$ と書くと

$$-X^* = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & -\alpha_\mu \end{pmatrix}$$

μ : Milnor 数

$$h(s) = (s+1) \prod_{\substack{\text{重複しない} \\ \alpha_\nu \text{ についての積}}} (s + \alpha_\nu)$$

注意 $X_0^* = -\frac{1}{r} \sum_{i=1}^n r_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n r_i$

であるから, $\alpha_v > 0$ である。

(定理の証明) $g_v(y_1, \dots, y_n) = f_v(y_1^{r_1}, \dots, y_n^{r_n})$ とする。

$$A = \mathcal{O}_X / (f_1, \dots, f_n)$$

$$B = \mathcal{O}_Y / (g_1, \dots, g_n)$$

$$M = \sum_{0 \leq \nu_i < r_i} \mathbb{C} y_1^{\nu_1} \dots y_n^{\nu_n}$$

とかくと $A \otimes_{\mathbb{C}} M = B$ である。

この同型は $a(x) \otimes y_1^{\nu_1} \dots y_n^{\nu_n} \mapsto a(y_1^{r_1}, \dots, y_n^{r_n}) y_1^{\nu_1} \dots y_n^{\nu_n}$ で与えられる。

t^{rX_0} は A の元には $x_i \mapsto t^{r_i} x_i$ と働くが、 B, M の元への作用を $y_i \mapsto t y_i$ と決めてやれば、上の同型と適合している。

$$\text{Trace}(t^{rX_0}|_A) = \frac{(1-t^{r-r_1}) \dots (1-t^{r-r_n})}{(1-t^{r_1}) \dots (1-t^{r_n})}$$

を言えは“よいが”、明らかに

$$\text{Trace}(t^{rX_0}|_M) = \frac{(1-t^{r_1}) \dots (1-t^{r_n})}{(1-t) \dots (1-t)}$$

であるから、

$$\text{Trace}(t^{r_{X_0}}|_B) = \frac{(1-t^{r-r_1}) \cdots (1-t^{r-r_n})}{(1-t) \cdots (1-t)}$$

を言えばよい。(以上のトリックは Milnor-Orlik [4] のものを代数的に再構成したものである。)

補題 $g_1, \dots, g_n$ を n 個の同次多項式としその次数を $s_1, \dots, s_n$ とする。

また $\star \{y \in \mathbb{C}^n; g_1(y) = \dots = g_n(y) = 0\} = \{0\}$ とする。この時 線型写像

$$T: \mathcal{O}/(g_1, \dots, g_n) \longrightarrow \mathcal{O}/(g_1, \dots, g_n)$$

$$a(y) \longmapsto a(ty)$$

の trace は

$$\frac{(1-t^{s_1}) \cdots (1-t^{s_n})}{(1-t) \cdots (1-t)}$$

で与えられる。

(補題の証明) $\mathcal{M} = (y_1, \dots, y_n)$ とする。

$$n_\nu = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}^\nu / (\mathcal{M}^{\nu+1} + \mathcal{M}^\nu (g_1, \dots, g_n))$$

とすれば $\text{Trace } T = \sum n_\nu t^\nu$

まず n_ν が $g_1, \dots, g_n$ の係数に依らない事を言う。 $g_1, \dots, g_n$ の係数の空間において条件 $\star$ は同次多項式で定義される超曲面を除いた所で成り立つ。従って n_ν が係数につき locally constant であればよい。

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} n_\nu = \dim \mathcal{O}/(g_1, \dots, g_n)$$

が constant である事はよく知られている。

ところが, $g_1, \dots, g_n$ が同次である事に注意すれば, $\mathbb{C}$ 上 $\mathbb{C}^n$ 上の $\mathbb{C}$ 上 $\mathbb{C}^n$ の作る有限次元ベクトル空間において, $g_1, \dots, g_n$ から生成される $\mathbb{C}$ 上 $\mathbb{C}^n$ の全体のなす部分空間の次元は $g_1, \dots, g_n$ の係数に下半連続に依存するから n は上半連続となり $\star$ の条件のもとでは一定になる。 $g_i(y) = y_i^{s_i}$ の時に計算して補題を得る。 //

参考文献

- Bernstein [1] The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter, F.A.A., 1972.
- Björk [2] Dimensions over Algebras of Differential Operators (to appear).
- 斎藤恭司 [3] Quasi-homogeneous isolated Singularities von Hyperflächen, Inven. math., 1971.
- Milnor-Orlik [4] Isolated singularities defined by weighted homogeneous polynomials, Topology, 1970.

付記 以上は, 佐藤・柏原西氏との協同の仕事を筆者がまとめたものである。