

非線形波動と自己適合移動格子スキーム

早稲田大学応用数理学科 丸野健一

テキサス大学パンアメリカン校数学科 Bao-Feng Feng

神戸大学数学科 太田泰広

Ken-ichi Maruno

Department of Applied Mathematics, Waseda University

Bao-Feng Feng

Department of Mathematics, The University of Texas–Pan American

Yasuhiro Ohta

Department of Mathematics, Kobe University

1 はじめに

広田と Ablowitz & Ladik による 1970 年代後半の先駆的な仕事によりソリトン方程式の可積分性を保つ離散化は「離散可積分系」という数理科学の一分野にまで成長し、数学、物理、工学の様々な分野とも関連しながらさらに進化を続けている [1, 2, 3, 4]. 広田は双線形方程式と τ 関数を元にしてソリトン方程式の可積分性を保ちつつ離散化する方法を提案し、KdV 方程式, sine-Gordon 方程式, KP 方程式など様々なソリトン方程式の離散化に成功した [5, 6, 7, 8, 9]. Ablowitz と Ladik はソリトン方程式の Ablowitz-Kaup-Newell-Segur (AKNS) 型線形固有値問題 (すなわち Lax ペア) を元にしてソリトン方程式を離散化する方法を提案し、非線形シュレーディンガー方程式などのソリトン方程式を可積分性を保ちながら離散化することに成功した [10, 11, 12, 13, 14]. 現在では様々なソリトン方程式の可積分性を保つ離散化がなされており、ある程度はシステムティックに離散化を行うことができる (Lax ペアを用いた可積分系の離散化については Suris の大著 [2] を見るとよいだろう).

一方, Wadati-Konno-Ichikawa (WKI) 型線形固有値問題に付随するソリトン方程式が知られているが、このクラスに属するソリトン方程式はホドグラフ変換によって AKNS 型線形問題に付随するソリトン方程式に変換されることが石森と和達-十河によって示されている [15, 16, 14, 17, 18, 19, 20, 14]. WKI 型線形固有値問題に付随するソリトン方程式の可積分性を保つ離散化は最近まで知られていなかった. 最近, 著者らは WKI 型線形固有値問題に付随するソリトン方程式の可積分性を保つ離散化に成功したが、驚くべきことにそれらは急激に変位が変化するところで格子間隔が自動的に調節される自己適合移動格子スキーム (self-adaptive moving mesh scheme) になることがわかった [21, 22, 23, 24, 25, 26].

本稿では文献 [27] に従って WKI 型線形固有値問題に付随するソリトン方程式の可積分な離散化法, すなわちソリトン方程式の自己適合移動格子スキームの構築法について解説する. 自己適合移動格子スキームの構築法は文献 [27] において 2 つ提案されている. 1 つは双線形方程式を用いた方法であり, 広田の離散化法の拡張である. もう一方は線形固有値問題 (Lax ペア) を用いた方法であり, Ablowitz-Ladik の離散化法の拡張である. この 2 つの離散化法を用いた自己適合移動格子スキームの構築の詳細を短パルス方程式を例にして解説していく. 短パルス方程式は WKI 型線形固有値問題に付随するソリトン方程式であるが, ホドグラフ変換によって AKNS 型線形固有値問題に付随するソリトン方程式に変換される. ソリトン方程式に関連するホドグラフ変換は保存則と密接に関連することがよく知られているが, 自己適合移動格子スキームにおける移動格子と離散ホドグラフ変換, 離散保存則との関係について議論し, 自己適合移動格子スキームの数理的なからくりについて解説する. また, 自己適合移動格子スキームの数値計算例をいくつか示し, 自己適合移動格子スキームが大変形を伴う非線形波動の数値計算法として有効であることを示す.

2 短パルス方程式とホドグラフ変換

短パルス方程式 [28, 29, 30, 31, 32, 33]

$$u_{xt} = u + \frac{1}{6}(u^3)_{xx} \quad (1)$$

は結合非分散方程式とも呼ばれている方程式系 [34, 35, 36, 37]

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial T} = \rho u \quad (3)$$

にホドグラフ変換

$$\begin{aligned} x &= \int \rho(X, T) dX \\ &= X_0 + \int_{X_0}^X \rho(\tilde{X}, T) d\tilde{X}, \\ t &= T \end{aligned} \quad (4)$$

によって変換される. ここで X_0 は積分定数であり左側の境界 (つまり, 領域の左端の座標が $x = X_0$) から決まる. また, 左側の境界値は $u(X_0, T) = 0$ であるとする. 不定積分表示においては, 積分定数は境界から決められる. 無限区間の場合には

$$\begin{aligned} x &= \int_{-\infty}^X \rho(\tilde{X}, T) d\tilde{X}, \\ t &= T \end{aligned} \quad (5)$$

となる。このホドグラフ変換は逆変換可能であるが、逆変換可能なホドグラフ変換のことを Reciprocal 変換と呼ぶ場合もある。ホドグラフ変換とは、従属変数と独立変数を入れ替える変換であり、流体力学で複雑な流れを解析するのに応用されている。ここではそれを拡張したものを考えている。流体力学でのホドグラフ変換の応用については文献 [38] に詳しい。ホドグラフ変換とソリトン、微分幾何学との関係についての文献は [39, 20, 40, 41] などがある。

ホドグラフ変換 (4) は微分則

$$\frac{\partial}{\partial X} = \rho \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{u^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \quad (6)$$

を与える。ホドグラフ変換 (4) は保存則 (2) に起因していることに注意しよう。つまり、 ρ は保存密度、 $\frac{u^2}{2}$ は流束である。この保存則により

$$\frac{\partial x}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \int \rho(X, T) dX = \int \frac{\partial}{\partial T} \rho(X, T) dX = - \int \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{u^2}{2} \right) dX = - \frac{u^2}{2}$$

となり、上記の微分則が導かれる。ホドグラフ変換 (4) を方程式 (3) に適用すると

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{u^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right) u = u \quad (7)$$

となる。これは (1) に書き換えられるので、短パルス方程式は結合非分散方程式とホドグラフ変換の組に等価である。このホドグラフ変換は幾何学的には、弧長パラメータを用いたラグランジュ表示（結合非分散方程式）とデカルト座標を用いたオイラー表示（短パルス方程式）の間の座標変換に対応している [25]。

結合非分散方程式系 (2), (3) は以下の 2×2 線形固有値問題 (Lax ペア) の両立条件として導出される [34]:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial X} = U \Psi, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial T} = V \Psi, \quad (8)$$

$$U = -i\lambda \begin{pmatrix} \rho & u_x \\ u_x & -\rho \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \frac{i}{4\lambda} & -\frac{u}{2} \\ \frac{u}{2} & -\frac{i}{4\lambda} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Ψ は 2 成分縦ベクトルである。ホドグラフ変換 (4) を上記の線形固有値問題 (8), (9) に適用すると短パルス方程式の線形固有値問題が得られる [30]:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \tilde{U} \Psi, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \tilde{V} \Psi, \quad (10)$$

$$\tilde{U} = -i\lambda \begin{pmatrix} 1 & u_x \\ u_x & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{V} = \begin{pmatrix} \frac{i}{4\lambda} - \frac{i\lambda}{2}u^2 & -\frac{u}{2} - \frac{i\lambda}{2}u^2u_x \\ \frac{u}{2} - \frac{i\lambda}{2}u^2u_x & -\frac{i}{4\lambda} + \frac{i\lambda}{2}u^2 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

$\tilde{U}$ と $\tilde{V}$ は λ を $i\lambda$ と置き直すことにより

$$\tilde{U} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & u_x \\ u_x & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{V} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\lambda} + \frac{\lambda}{2}u^2 & -\frac{u}{2} + \frac{\lambda}{2}u^2u_x \\ \frac{u}{2} + \frac{\lambda}{2}u^2u_x & -\frac{1}{4\lambda} - \frac{\lambda}{2}u^2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

と書き直せる。これは短パルス方程式の Lax ペアである。短パルス方程式の Lax ペアは WKI 型の Lax ペアである [30]。一般に、WKI 型線形固有値問題に付随するソリトン方程式は、AKNS 型線形固有値問題に付随するソリトン方程式にホドグラフ変換を適用することによって導かれる [17, 18, 19, 20]。

3 短パルス方程式の自己適合移動格子スキーム

短パルス方程式 (1) の (空間) 離散化法について以下に解説する。

方法 1: 双線形形式を用いた離散化

- ステップ 1: 短パルス方程式 (1) をホドグラフ変換 (4) によって結合非分散方程式 (2), (3) に変換する。
- ステップ 2: 結合非分散方程式を双線形方程式に変換する。
- ステップ 3: 結合非分散方程式の双線形方程式を (空間) 離散化する。
- ステップ 4: (空間) 離散化された双線形方程式から半離散結合非分散方程式を作る。
- ステップ 5: ホドグラフ変換を離散化し、離散ホドグラフ変換を用いて離散結合非分散方程式を変換すると、半離散短パルス方程式、すなわち短パルス方程式の自己適合移動格子スキームが得られる。

方法 2: Lax ペアを用いた離散化

- ステップ 1: 短パルス方程式 (1) の Lax ペアをホドグラフ変換 (4) で結合非分散方程式 (2), (3) に変換する。
- ステップ 2: 結合非分散方程式の Lax ペアを (空間) 離散化する。離散化された Lax ペアの両立条件は半離散結合非分散方程式を与える。
- ステップ 3: ホドグラフ変換を離散化し、半離散結合非分散方程式の Lax ペアを離散ホドグラフ変換を用いて変換する。
- ステップ 4: ステップ 3 で得られた Lax ペアの両立条件より、半離散短パルス方程式、すなわち短パルス方程式の自己適合移動格子スキームが得られる。

連続の場合には短パルス方程式 (1) は結合非分散方程式 (2), (3) とホドグラフ変換 (4) の組に等価であったが、空間離散の場合にも同様の関係が成立する。

以下に、短パルス方程式の自己適合移動格子スキームの具体的な構築手順の詳細を示す。

方法 1:

ステップ 1: 短パルス方程式 (1) をホドグラフ変換 (4) によって結合非分散方程式 (2), (3)

に変換する.

ステップ2: 結合非分散方程式 (2), (3) は従属変数変換

$$u = \frac{g}{f}, \quad \rho = 1 - 2(\ln f)_{XT} \quad (13)$$

により双線形方程式

$$D_T^2 f \cdot f = \frac{1}{2} g^2, \quad (14)$$

$$D_X D_T f \cdot g = fg \quad (15)$$

に変換される. ここで, D_X と D_T は $D_X^m f \cdot g = (\partial_X - \partial_{X'})^m f(X)g(X')|_{X'=X}$ で定義される広田演算子である.

ステップ3: 双線形方程式 (14), (15) の空間変数 X を離散化する:

$$D_T^2 f_k \cdot f_k = \frac{1}{2} g_k^2, \quad (16)$$

$$\frac{1}{a} D_T (f_{k+1} \cdot g_k - f_k \cdot g_{k+1}) = \frac{1}{2} (f_{k+1} g_k + f_k g_{k+1}). \quad (17)$$

ステップ4: 従属変数変換

$$u_k = \frac{g_k}{f_k}, \quad \rho_k = 1 - \frac{2}{a} \left(\ln \frac{f_{k+1}}{f_k} \right)_T \quad (18)$$

を考える. これは (13) の離散版である. この従属変数変換により, 双線形方程式 (16), (17) は半離散結合非分散方程式

$$\partial_T \rho_k + \frac{\frac{u_{k+1}^2}{2} - \frac{u_k^2}{2}}{a} = 0, \quad (19)$$

$$\partial_T \left(\frac{u_{k+1} - u_k}{a} \right) = \rho_k \frac{u_{k+1} + u_k}{2} \quad (20)$$

に変換される.

ステップ5: ホドグラフ変換の離散化を考える:

$$x = X_0 + \int_{X_0}^X \rho(\tilde{X}, T) d\tilde{X} \Rightarrow x_k = X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} a \rho_j, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

ここで $x_0 = X_0$ であり, 左側境界の座標である. (無限区間の場合には Remark 2 を参照.) また, $\rho_k \equiv \rho(X_k, T)$ はパラメトリック座標 T , $X_k = X_0 + ak$ での ρ の値を意味する. 今, 格子間隔

$$\delta_k = x_{k+1} - x_k \quad (22)$$

を導入すると, 離散ホドグラフ変換より格子間隔は関係式

$$\delta_k = a \rho_k \quad (23)$$

を満たすことがわかる。よって、半離散結合非分散方程式 (19), (20) は離散ホドグラフ変換 (21) によって自己適合移動格子スキーム

$$\partial_T \delta_k = \frac{-u_{k+1}^2 + u_k^2}{2}, \quad (24)$$

$$\partial_T(u_{k+1} - u_k) = \delta_k \frac{u_{k+1} + u_k}{2} \quad (25)$$

に変換される。格子間隔 δ_k は格子点 x_k と $\delta_k = x_{k+1} - x_k$ の関係にあるが、この関係式は離散ホドグラフ変換

$$x_k = X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \delta_j \quad (26)$$

に起因している。点の集合 $\{(x_k, u_k)\}_{k=0,1,\dots}$ は半離散短パルス方程式の解を与える。上の離散ホドグラフ変換は離散的空間におけるオイラー的記述とラグランジュ的記述の間の変換であると解釈することができる [25]。

離散ホドグラフ変換 (26) は微分-差分公式

$$\frac{\Delta}{\Delta X_k} = \frac{\Delta}{a} = \frac{\Delta x_k}{a} \frac{\Delta}{\Delta x_k} = \rho_k \frac{\Delta}{\Delta x_k} = \rho_k \frac{\Delta}{\delta_k}, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x_k}{\partial T} \frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\partial \delta_j}{\partial T} \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{-u_{j+1}^2 + u_j^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{-u_k^2 + u_0^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} - \frac{u_k^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad (u_0 = 0 \text{ の場合}) \end{aligned} \quad (28)$$

を与える。ここで Δ は差分作用素 $\Delta f_k \equiv f_{k+1} - f_k$ である。また、 $X_k = X_0 + ak$ である。この微分-差分公式を方程式 (25) に適用すると

$$\frac{1}{\delta_k} \frac{\partial(u_{k+1} - u_k)}{\partial t} - \frac{u_k^2}{2} \frac{1}{\delta_k} \frac{\partial(u_{k+1} - u_k)}{\partial x_k} = \frac{u_{k+1} + u_k}{2} \quad (29)$$

が得られる。連続極限 $\delta_k \rightarrow 0$ をとると、これは短パルス方程式 (1) になる。

Remark 1: 方程式 (19) は格子間隔 δ_k の発展を記述する。これは保存則 (2) の空間離散版に他ならず、格子間隔 δ_k は保存密度に対応している。つまり、メッシュの格子間隔 δ_k は時間連続・空間離散の保存則に従う。空間離散の保存則より、自己適合移動格子スキームは以下の性質を持つことがわかる：

- (i) $\frac{-u_{k+1}^2 + u_k^2}{2} < 0$ が成り立つ時、すなわち、流束 $\frac{u_k^2}{2}$ と $\frac{u_{k+1}^2}{2}$ の間の傾き (差分商) が正の時、保存密度は減少するので、格子間隔 δ_k は減少する。
- (ii) $\frac{-u_{k+1}^2 + u_k^2}{2} > 0$ が成り立つ時、すなわち流束 $\frac{u_k^2}{2}$ と $\frac{u_{k+1}^2}{2}$ の間の傾き (差分商) が負の時、保存密度は増大するので、格子間隔は増大する。

このことから、このスキームは与えられたデータ $\{x_k, u_k\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N$) に対してメッシュの格子間隔を自動的に調節していくことがわかる。自己適合移動格子スキームの鍵は、メッシュの格子間隔が保存則の保存密度になっていることにある。これは、連続系におけるホドグラフ変換と保存則の関係がそのまま離散に持ち込まれた結果である。連続系においては、ホドグラフ変換は方程式の背後に隠れており見えないが、離散系ではメッシュの格子点を与える式として表に現れる。

Remark 2: 無限区間の場合には、(21) は

$$x = \int_{-\infty}^X \rho(\tilde{X}, T) d\tilde{X} \Rightarrow x_k = \sum_{j=-\infty}^{k-1} a\rho_j, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (30)$$

となる。この時、(28) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x_k}{\partial T} \frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=-\infty}^{k-1} \frac{\partial \delta_j}{\partial T} \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + \left(\sum_{j=-\infty}^{k-1} \frac{-u_{j+1}^2 + u_j^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} - \frac{u_k^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (31)$$

となる。

Remark 3: ホドグラフ変換の τ 関数表示は

$$x = X - 2(\ln f)_T \quad (32)$$

であり、

$$\frac{\partial x}{\partial T} = -2(\ln f)_{TT} = -\frac{g^2}{f^2} \quad (33)$$

となる。離散ホドグラフ変換の τ 関数表示は、

$$x_k = X_k - 2(\ln f_k)_T \quad (34)$$

であり、

$$\frac{\partial x_k}{\partial T} = -2(\ln f_k)_{TT} = -\frac{g_k^2}{f_k^2} \quad (35)$$

となる。ただし、有限区間の場合には $f_0 = 1$ とする。

次に Lax ペアを用いた方法を紹介する。

方法 2:

ステップ 1: Lax ペア (10), (12) をホドグラフ変換 (4) で (8), (9) に変換する。

ステップ 2: Lax ペア (8), (9) を離散化する:

$$\Psi_{k+1} = U_k \Psi_k, \quad \frac{\partial \Psi_k}{\partial T} = V_k \Psi_k, \quad (36)$$

$$U_k = \begin{pmatrix} 1 - i\lambda a\rho_k & -i\lambda(u_{k+1} - u_k) \\ -i\lambda(u_{k+1} - u_k) & 1 + i\lambda a\rho_k \end{pmatrix}, \quad V_k = \begin{pmatrix} \frac{i}{4\lambda} & -\frac{u_k}{2} \\ \frac{u_k}{2} & -\frac{i}{4\lambda} \end{pmatrix}. \quad (37)$$

ここで Ψ_k は2成分ベクトルである。両立条件より半離散結合非分散方程式 (19), (20) を得る。

ステップ3: ホドグラフ変換の離散化 (21) を考える。格子間隔 $\delta_k = x_{k+1} - x_k$ を導入すると、これは関係式 $\delta_k = a\rho_k$ を満たす。 U_k と V_k を格子間隔 δ_k で書きかえ、 λ を $i\lambda$ で置きかえると

$$U_k = \begin{pmatrix} 1 + \lambda\delta_k & \lambda(u_{k+1} - u_k) \\ \lambda(u_{k+1} - u_k) & 1 - \lambda\delta_k \end{pmatrix}, \quad V_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\lambda} & -\frac{u_k}{2} \\ \frac{u_k}{2} & -\frac{1}{4\lambda} \end{pmatrix} \quad (38)$$

となる。

ステップ4: この Lax ペアは短パルス方程式の自己適合移動格子スキーム (24), (25) の Lax ペアである。つまり、両立条件より自己適合移動格子スキームが得られる。

4 自己適合移動格子スキームによる短パルス方程式の数値計算

本節では、短パルス方程式の自己適合移動格子スキーム (24), (25) を用いた数値計算例を示す。時間発展解法は修正オイラー法を用いた。

短パルス方程式の N -ソリトン解は以下の公式で与えられる:

$$u = \frac{g}{f}, \quad \rho = 1 - 2(\ln f)_{XT}, \quad (39)$$

$$x = \int \rho(X, T) dX = X_0 + \int_{X_0}^X \rho(\tilde{X}, T) d\tilde{X}, \quad t = T, \quad (40)$$

$$f = \begin{vmatrix} \mathcal{A}_N & I_N \\ -I_N & \mathcal{B}_N \end{vmatrix} = |I_N + \mathcal{A}_N \mathcal{B}_N|, \quad g = \begin{vmatrix} \mathcal{A}_N & I_N & \mathbf{e}_N^\top \\ -I_N & \mathcal{B}_N & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & -\mathbf{a}_N & 0 \end{vmatrix}, \quad (41)$$

$$\mathcal{A}_N = \begin{pmatrix} \frac{e^{\xi_1 + \xi_1}}{4(1/p_1 + 1/p_1)} & \frac{e^{\xi_1 + \xi_2}}{4(1/p_1 + 1/p_2)} & \cdots & \frac{e^{\xi_1 + \xi_N}}{4(1/p_1 + 1/p_N)} \\ \frac{e^{\xi_2 + \xi_1}}{4(1/p_2 + 1/p_1)} & \frac{e^{\xi_2 + \xi_2}}{4(1/p_2 + 1/p_2)} & \cdots & \frac{e^{\xi_2 + \xi_N}}{4(1/p_2 + 1/p_N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{e^{\xi_N + \xi_1}}{4(1/p_N + 1/p_1)} & \frac{e^{\xi_N + \xi_2}}{4(1/p_N + 1/p_2)} & \cdots & \frac{e^{\xi_N + \xi_N}}{4(1/p_N + 1/p_N)} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_N = \begin{pmatrix} \frac{a_1 a_1}{1/p_1 + 1/p_1} & \frac{a_1 a_2}{1/p_1 + 1/p_2} & \cdots & \frac{a_1 a_N}{1/p_1 + 1/p_N} \\ \frac{a_2 a_1}{1/p_2 + 1/p_1} & \frac{a_2 a_2}{1/p_2 + 1/p_2} & \cdots & \frac{a_2 a_N}{1/p_2 + 1/p_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_N a_1}{1/p_N + 1/p_1} & \frac{a_N a_2}{1/p_N + 1/p_2} & \cdots & \frac{a_N a_N}{1/p_N + 1/p_N} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a}_N = (a_1, a_2, \dots, a_N), \quad \mathbf{e}_N = (e^{\xi_1}, e^{\xi_2}, \dots, e^{\xi_N}), \quad \mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0),$$

$$\xi_i = p_i X + \frac{1}{p_i} T, \quad 1 \leq i \leq N.$$

ここで I_N は $N \times N$ 単位行列, $\mathbf{a}^\top$ はベクトル $\mathbf{a}$ の転置ベクトルである.

この公式より, 2-ソリトン解の τ -関数 f, g は以下で与えられることがわかる:

$$f = 1 + \frac{a_1^2 p_1^2}{16} e^{2\xi_1} + \frac{a_2^2 p_2^2}{16} e^{2\xi_2} + \frac{a_1 a_2 p_1^2 p_2^2}{2(p_1 + p_2)^2} e^{\xi_1 + \xi_2} + \frac{a_1^2 a_2^2 p_1^2 p_2^2}{256} \left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} \right)^4 e^{2\xi_1 + 2\xi_2} \quad (42)$$

$$g = a_1 e^{\xi_1} + a_2 e^{\xi_2} + \frac{a_1 a_2 p_2^2}{16} \left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} \right)^2 e^{\xi_1 + 2\xi_2} + \frac{a_1^2 a_2 p_1^2}{16} \left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} \right)^2 e^{2\xi_1 + \xi_2}, \quad (43)$$

$$\xi_i = p_i X + \frac{1}{p_i} T, \quad i = 1, 2.$$

解のパラメーターによって, 上記の解は2種類の2ループソリトン解と1種類のブリーザー解のうちのどれかになる:

- (a) 波数 p_1, p_2 が実数, a_1 と a_2 が同符号の場合, 2つのループ型ソリトンが衝突する解となる.
- (b) 波数 p_1, p_2 が実数, a_1 と a_2 が異符号の場合, 正のループ型ソリトンと負のループ型ソリトンが衝突する解となる.
- (c) 波数 p_1, p_2 が共役複素数, a_1, a_2 が共役複素数の場合, ブリーザー解 (振動する解) となる.

自己適合移動格子スキーム (24), (25) を用いた短パルス方程式の数値計算例を以下に示す. 以下の数値計算では, 格子点の数を $N = 200$, 計算領域を $D = 80$, 修正オイラー法における時間発展の刻み幅を $dt = 0.0001$ とした. 図1に短パルス方程式の2ループソリトン相互作用 (上記の (a) に対応) の数値計算結果を示す. 図2に短パルス方程式の正のループソリトンと負のループソリトンの相互作用 (上記の (b) に対応) の数値計算結果を示す. 図3は短パルス方程式のブリーザー (上記の (c) に対応) の数値計算結果を示している. これらの数値計算結果は, 短パルス方程式の厳密解に非常に近く, 自己適合移動格子スキームが非常に有効な数値計算スキームになっていることを示している.

5 おわりに

本稿では, WKI 型固有値問題に付随するソリトン方程式の可積分性を保存する離散化を行い格子間隔が自動的に調節される自己適合移動格子スキームを構成する方法について解説した. 短パルス方程式の場合のいくつかの数値計算例を提示し, 自己適合移動格子スキームは大変形を伴う現象の数値計算に有効であることを示した. 本稿で取り上げたのは短パルス方程式であるが, これまで Camassa-Holm 方程式, Hunter-Saxton 方程式, WKI 弾性梁方程式, Dym 方程式, 結合型短パルス方程式, 複素短パルス方程式, reduced Ostrovsky 方程式などでも同様の自己適合移動格子スキームを得ることに成功している.

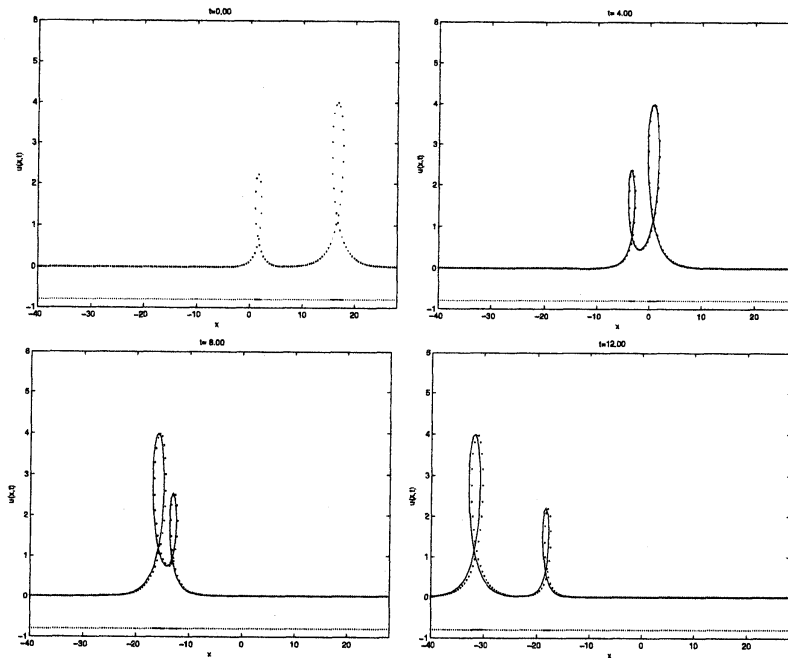


図 1: 2-ループソリトンの数値計算. 点線が数値計算, 実線が厳密解. グラフの下部の点はメッシュの分布を示す. パラメータは $p_1 = 0.9$, $p_2 = 0.5$, $a_1 = e^{-2}$, $a_2 = e^{-8}$.

一般に自己適合移動格子スキームは, メッシュの格子間隔 (メッシュの格子点) の発展方程式と従属変数の発展方程式の連立方程式で構成される. 短パルス方程式の数値計算例で見たように, 自己適合移動格子スキームは通常の数値計算法では計算することが難しい状況でも非常に精密に計算することができるので, 自己適合移動格子スキームは大変形を伴う波動現象の数値計算に有効となりうると考えられる.

時間発展解法の改良による数値計算精度の向上や空間2次元, 3次元の場合への拡張などが今後の課題である. 本論文で提案した方法の適用範囲は空間1次元の可積分系に限定されているが, 文献 [25] で示されているように自己適合移動格子スキームは離散微分幾何学との深い関係もあり, その関係を追求していくことで自己適合移動格子スキームの適用範囲をさらに広げることができる可能性がある.

参考文献

- [1] Grammaticos, B., Kosmann-Schwarzbach, Y. and Tamizhmani, T. (Eds), “*Discrete Integrable Systems*”, Lecture Notes in Physics **644**, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

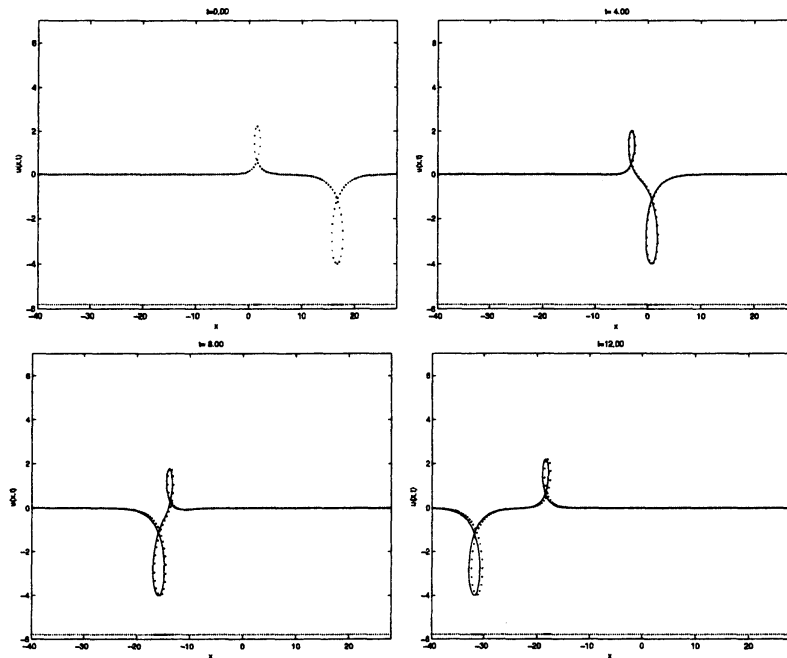


図 2: 正ループ-負ループソリトンの数値計算. 点線が数値計算, 実線が厳密解. グラフの下部の点はメッシュの分布を示す. パラメータは $p_1 = 0.9$, $p_2 = 0.5$, $a_1 = e^{-2}$, $a_2 = -e^{-8}$.

- [2] Suris, Y. B., “*The Problem of Integrable Discretization: Hamiltonian Approach*”, Birkhäuser, Basel, 2003.
- [3] Bobenko, A. I. and Suris, Y. B., “*Discrete Differential Geometry*”, Graduate Studies in Mathematics **98**, AMS, Rhode Island, 2008.
- [4] Bobenko, A. I. and Seiler, R. (Eds.), “*Discrete Integrable Geometry and Physics*”, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications **16**, Oxford Univ. Press, Oxford, 1999.
- [5] Hirota, R., “Nonlinear partial difference equations. I. A difference analogue of the Korteweg-de Vries equation”, *J. Phys. Soc. Jpn.* **43** (1977) 4116–4124.
- [6] Hirota, R., “Nonlinear partial difference equations. II. Discrete-time Toda equation”, *J. Phys. Soc. Jpn.* **43** (1977) 2074–2078.
- [7] Hirota, R., “Nonlinear partial difference equations. III. Discrete sine-Gordon equation”, *J. Phys. Soc. Jpn.* **43** (1977) 2079–2086.

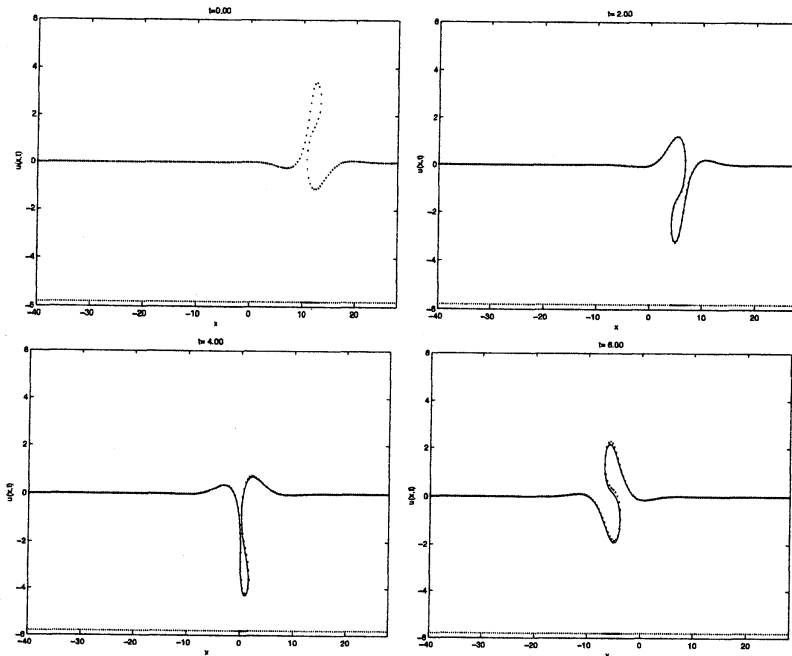


図 3: ブリーザーの数値計算. 点線が数値計算, 実線が厳密解. グラフの下部の点はメッシュの分布を示す. パラメーターは $p_1 = 0.4 + 0.44i$, $p_2 = 0.4 - 0.44i$, $a_1 = (1 + i)e^{-2}$, $a_2 = (1 - i)e^{-8}$.

- [8] Hirota, R., "Nonlinear partial difference equations. IV. Bäcklund transformation for the discrete-time Toda equation", *J. Phys. Soc. Jpn.* **45** (1978) 321–332.
- [9] Hirota, R., "Nonlinear partial difference equations. V. Nonlinear equations reducible to linear equations", *J. Phys. Soc. Jpn.* **46** (1979) 312–319.
- [10] Ablowitz, M. J. and Ladik, J. F., "Nonlinear differential-difference equations", *J. Math. Phys.* **16** (1975) 598–603.
- [11] Ablowitz, M. J. and Ladik, J. F., "Nonlinear differential-difference equations and Fourier analysis", *J. Math. Phys.* **17** (1976) 1011–1018.
- [12] Ablowitz, M. J. and Ladik, J. F., "A nonlinear difference scheme and inverse scattering", *Stud. Appl. Math.* **55** (1977) 213–229.
- [13] Ablowitz, M. J. and Ladik, J. F., "On the solution of a class of nonlinear partial difference equations", *Stud. Appl. Math.* **57** (1977) 1–12.

- [14] Ablowitz, M. J. and Segur, H., “*Solitons and Inverse Scattering Transform*”, SIAM, Philadelphia, 1981.
- [15] Wadati, M., Konno, K. and Ichikawa, Y., “New integrable nonlinear evolution equations”, *J. Phys. Soc. Jpn.* **47** (1979) 1698–1700.
- [16] Konno, K., Ichikawa, Y. and Wadati, M., “A loop soliton propagating along a stretched rope”, *J. Phys. Soc. Jpn.* **50** (1981) 1025–1026.
- [17] Ishimori, Y., “On the modified Korteweg-de Vries soliton and the loop soliton”, *J. Phys. Soc. Jpn.* **50** (1981) 2471–2472.
- [18] Ishimori, Y., “A relationship between the Ablowitz-Kaup-Newell-Segur and Wadati-Konno-Ichikawa schemes of the inverse scattering method”, *J. Phys. Soc. Jpn.* **51** (1982) 3036–3041.
- [19] Wadati, S. and Sogo, K., “Gauge transformations in soliton theory”, *J. Phys. Soc. Jpn.* **52** (1983) 394–398.
- [20] Rogers, S. and Schief, W. K., “*Bäcklund and Darboux Transformations: Geometry and Modern Applications in Soliton Theory*”, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [21] Ohta, Y., Maruno, K. and Feng, B. F., “An integrable semi-discretization of the Camassa-Holm equation and its determinant solution”, *J. Phys. A* **41** (2008) 355205.
- [22] Feng, B. F., Maruno, K. and Ohta, Y., “A self-adaptive moving mesh method for the Camassa-Holm equation”, *J. Comput. Appl. Math.* **235** (2010) 229–243.
- [23] Feng, B. F., Maruno, K. and Ohta, Y., “Integrable discretizations for the short-wave model of the Camassa-Holm equation”, *J. Phys. A* **43** (2010) 265202.
- [24] Feng, B. F., Maruno, K. and Ohta, Y., “Integrable discretizations of the short pulse equation”, *J. Phys. A* **43** (2010) 085203.
- [25] Feng, B. F., Inoguchi, J., Kajiwara, K., Maruno, K. and Ohta, Y., “Discrete integrable systems and hodograph transformations arising from motions of discrete plane curves”, *J. Phys. A* **44** (2011) 395201.
- [26] Feng, B. F., Inoguchi, J., Kajiwara, K., Maruno, K. and Ohta, Y., “Integrable discretizations of the Dym equation”, *Front. Math. in China*, **8** (2013) 1017–1029
- [27] Feng, B. F., Maruno, K. and Ohta, Y., “Self-adaptive moving mesh schemes for short pulse type equations and their Lax pairs”, *Pacific J. Math. for Industry* **6** (2014) 8.
- [28] Schäfer, T. and Wayne, C. E., “Propagation of ultra-short optical pulses in cubic nonlinear media”, *Physica D* **196** (2004) 90–105.

- [29] Chung, Y., Jones, C. K. R. T., Schäfer, T. and Wayne, C. E., “Ultra-short pulses in linear and nonlinear media”, *Nonlinearity* **18** (2005) 1351–1374.
- [30] Sakovich, A. and Sakovich, S., “The short pulse equation is integrable”, *J. Phys. Soc. Jpn.* **74** (2005) 239–241.
- [31] Sakovich, A. and Sakovich, S., “Solitary wave solutions of the short pulse equation”, *J. Phys. A* **39** (2006) L361–367.
- [32] Matsuno, Y., “Multiloop soliton and multibreather solutions of the short pulse model equation”, *J. Phys. Soc. Jpn.* **76** (2007) 084003.
- [33] Matsuno, Y., “Soliton and periodic solutions of the short pulse model equation”, In: Lang, S. P. and Bedore, H. (Eds.) *Handbook of Solitons: Research, Technology and Applications*, (2009), pp. 541–586, Nova Publishers.
- [34] Konno, K. and Oono, H., “New coupled integrable dispersionless equations”, *J. Phys. Soc. Jpn.* **63** (1994) 377–378.
- [35] Hirota, R. and Tsujimoto, S., “Note on “New coupled integrable dispersionless equations””, *J. Phys. Soc. Jpn.* **63** (1994) 3533.
- [36] Konno, K. and Oono, H., “Reply to note on “New coupled integrable dispersionless equations””, *J. Phys. Soc. Jpn.* **63** (1994) 3534.
- [37] Konno, K., “Integrable coupled dispersionless equations”, *Applicable Analysis* **57** (1995) 209–220.
- [38] 永田雅人, “高速流体力学”, (森北出版, 2010).
- [39] Rogers, C. and Shadwick, W.F., “*Bäcklund transformations and their applications*” (Academic Press, New York, 1982)
- [40] Goldstein, R. E. and Petrich, D. M., “The Korteweg-de Vries hierarchy as dynamics of closed curves in the plane”, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 3203–3206.
- [41] 井ノ口順一, “曲線とソリトン”, (朝倉書店, 2010).