

Relative Operator Entropy について

大阪府立桃谷高校 亀井栄三郎 (Eizaburo Kamei)

1. Introduction. Entropy とは一言で言えば “混沌さ” を測る量と言えよう。von Neumann は、彼の著書「量子力学の数学的基礎」[14]において、statistical operator A , 即ち、 $A \in T(H)_{+,1}$, Hilbert space H 上の positive trace class operators で $\text{tr} A = 1$, に対して、

$$s(A) = -\text{tr} A \log A$$

として entropy を与えている。Umegaki は σ -finite von Neumann algebra に対し、relative entropy を定式化することに成功した。彼の定式化は von Neumann algebra を $B(H)$ としたとき、次の様になる。[17], [18].

$$s(A|B) = \text{tr} A(\log A - \log B), \quad A, B \in T(H)_{+,1}.$$

又、Nakamura と Umegaki [13] は、von Neumann の entropy を一般化し、 H 上の positive operator A に対し、operator entropy を

$$S(A) = -A \log A$$

を与えた。ここでは、この operator entropy の相対化は、どの

様なものが、という事について考える。

Umegaki の relative entropy は、その後、Araki によって、Tomita Takesaki theory を用いることで、一般の von Neumann algebra 上の positive linear functional にまで拡張された。[1], [2]。

ところが Uhlmann [16] は、この relative entropy を interpolation theory を用いる事で $*$ -algebra にまで広げた。そこで、relative operator entropy を与えるに当たって、まず Uhlmann の方法を簡単に見直す事から始める。

まず、 ϕ, ψ を $*$ -algebra $\mathcal{A}$ 上の positive linear functional とし、 $\mathcal{A} \ni 1$ とする。ここで sesquilinear form を次の様に与える。

$$\langle x, y \rangle = \phi(xy^*) + \psi(y^*x)$$

通常の方法で $\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle$ という inner product とし、 $\mathcal{A}$ から Hilbert space を構成する。このとき Pusz-Woronowicz [14] によって、この Hilbert space 上に可換な positive operators A, B で $A+B=1$,

$$\phi(xy^*) = \langle A\tilde{x}, \tilde{y} \rangle, \quad \psi(y^*x) = \langle B\tilde{x}, \tilde{y} \rangle$$

となるものが取れる。この事より Uhlmann は relative entropy を

$$S(\phi|\psi) = - \lim_{r \rightarrow +0} \frac{1}{r} \langle (A^{1-r}B^r - A)\hat{1}, \hat{1} \rangle$$

で与えている。Uhlmann の定義は、 $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} (x^r - 1) = \log x$ 、という事実に基づいて与えられている。

ところで、 $A^{1-r}B^r$ は、 $r = \frac{1}{2}$ のとき丁度 geometric mean であり、その一般形を表わしたものと考えるとよい。そこで、

これを operator mean の立場から見直してみる。operator mean の理論は、Kubo-Ando [10] によって完成された。

operator mean m とは、Hilbert space 上の positive operators 上の binary operation で次の性質を持つものを言う。

$$(1) \text{ monotonicity } A \leq B, C \leq D \Rightarrow A m C \leq B m D.$$

$$(2) \text{ semicontinuity } A_n \downarrow A, B_n \downarrow B \Rightarrow A_n m B_n \downarrow A m B.$$

$$(3) \text{ transformer inequality } T^*(A m B)T \leq T^*AT m T^*BT.$$

(3) の等号は T が invertible のとき成立。

この operator mean m は、 $1 m x = f(x)$ で $[0, \infty)$ 上の positive operator monotone function と 1 対 1 に対応している。実際に、positive operators A, B に対しては、 A, B が invertible という仮定の下で

$$(*) \quad A m B = A^{\frac{1}{2}} \{ (A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \} A^{\frac{1}{2}}$$

という形で表わす事ができる。この事を最初に指摘したのは Y. Kato である。[3], [4]。

2. Relative Operator Entropy. Operator mean における対応(*)

を x^r , $0 \leq r \leq 1$, という operator monotone function にあては

めると $A^{\frac{1}{2}} (A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^r A^{\frac{1}{2}}$ となり、 A と B が可換の場合は

$A^{1-r} B^r$ という Uhlmann の relative entropy の定義の中に出てきた

形が得られる。そこで、 $1 \log x = x^r$, $0 \leq r \leq 1$ によって定

ある operator mean を Uhlmann の定義に当てはめると、

$$\begin{aligned} S(A|B) &= s\text{-}\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} (A \sharp_r B - A) \\ &= s\text{-}\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} A^{\frac{1}{2}} \{ (A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^r - 1 \} A^{\frac{1}{2}} \\ &= A^{\frac{1}{2}} (\log A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

ここで A, B は invertible である、と仮定しているから問題はな
いが、一般には、この極限が存在するとは限らない。この存
在性の議論については、J. I. Fujii, M. Fujii and Y. Seo [8] によ
って詳しく議論されているので、それに譲り、ここでは、極限
が存在する場合に限り、話を進めていく事にする。このとき
は、operator mean の場合と同様、invertible なもので近似すればよ
いから、以下 invertible な operators と仮定しても一般性は失な
われない。

ところで Uhlmann は $\phi(xx^*)^{\frac{1}{2}}$ と $\psi(x^*x)^{\frac{1}{2}}$ という seminorm 間の
quadratic interpolation として、 $\langle A^{1-r} B^r \tilde{x}, \tilde{x} \rangle^{\frac{1}{2}}$, $0 \leq r \leq 1$, を与えてい
るのであるが、上で与えた $\{A \sharp_r B\}$, $0 \leq r \leq 1$, は丁度、これの
operator 版となっている事がわかる。実際

$$A \sharp_0 B = A, \quad A \sharp_1 B = B, \quad A \sharp_{\frac{1}{2}} B = A \sharp B \text{ (geometric mean)}$$

であり、 A, B に対し、 $r \rightarrow A \sharp_r B$ は連続となっている。

又、[18] の第 9 章にまとめられている quadratic interpolation の
持つ様々の性質と同様の性質が成り立っている。例えば、

“Wigner-Yanase-Dyson-Lieb-Uhlmann の concavity” に相等す

るものも、 g_r が operator mean である、という事より次の様に簡単に示す事ができる。

$$A \geq \alpha A_1 + \beta A_2, \quad B \geq \alpha B_1 + \beta B_2, \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta = 1$$

のとき

$$\begin{aligned} A \, g_r B &\geq (\alpha A_1 + \beta A_2) \, g_r (\alpha B_1 + \beta B_2) \\ &\geq \alpha (A_1 + B_1) \, g_r \beta (A_2 + B_2). \end{aligned}$$

そこで、先程得た

$$S(A|B) = A^{\frac{1}{2}} (\log A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}}$$

を Uhlmann の relative entropy の operator 版として、"relative operator entropy" と呼ぶのが妥当であろう。この結論を得た。[6]。

又、これは、 $B=1$ とした場合、 $S(A|1) = -A \log A$ となり、Nakamura and Umegaki [13] の operator entropy と一致する。

operator mean の議論においては、それを表現する operator monotone function に、positive という制限がついていた。この制限をはずして一般化できるか、例えば $\log x$ に対してはどうか、という問題は、以前より提起してきた事ではあったが、[5]、それにどのような意味を持たせ得るか、という点については不確かなままであった。今、Uhlmann の方法を真似ること、"relative operator entropy" の結論を得た事より、operator mean を拡張することの保障が得られた、と思う。

そこで、これに、"solidarity (連帯)" との呼称を与え、事とする。これは Kubo and Ando が用いた "connection" に対応させるものである。即ち、一般の operator monotone function $f(x)$ に対し、

$$A \leq B = A^{\frac{1}{2}} f(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}}$$

で与えられるものを solidarity という。これについての一般論は [8] に譲る。ここでは、relative operator entropy の基本的性質についてまとめておく。

$$1. \quad B \leq C \Rightarrow S(A|B) \leq S(A|C).$$

$$2. \quad S(\alpha A | \alpha B) = \alpha S(A|B), \quad \alpha > 0.$$

$$3. \quad S(A+B | C+D) \geq S(A|C) + S(B|D)$$

$$4. \quad A \geq B \text{ 又は } A \text{ が invertible のとき } S(A|B) = 0 \Leftrightarrow A = B.$$

$$5. \quad \text{Jointly concavity:}$$

$$A = \alpha A_1 + \beta A_2, \quad B = \alpha B_1 + \beta B_2, \quad \alpha, \beta > 0, \quad \alpha + \beta = 1.$$

$$\Rightarrow S(A|B) \geq \alpha S(A_1|B_1) + \beta S(A_2|B_2).$$

$$6. \quad \text{Peiels-Bogoliubov 型 不等式}$$

$$\Phi: \text{normal positive linear map, } \Phi(1) \text{ は invertible,}$$

$$\Rightarrow \Phi(S(A|B)) \leq S(\Phi(A) | \Phi(B)).$$

しかしながら、この relative operator entropy が Umegaki の relative entropy と一致するのは、 A と B が可換なときのみである。一致しない例は 2×2 行列において簡単に見つける事ができる。にもかかわらず、これが有効である、と思える理

由の1つに、次の J. I. Fujii と Y. Seo [9] によって得られた結果がある。

M を II_1 -factor von Neumann algebra とし、 N を M の subfactor とする。このとき、 M から N への conditional expectation が unique に存在し、これを E とする。次に

$$S(N) = \sup \{ \|S(A|E(A))\| ; 0 \leq A \leq 1, A \in M \}$$

とすると、次の Pimsner-Popa 型の定理が得られる。

Theorem 1.

$$S(N) = \log [M:N]$$

ここで $[M:N]$ は Jones' index である。

3. Uhlmann's transformation. 次に、先程の $\{A \#_r B\}, 0 \leq r \leq 1$, についてもう少し詳しく見て行く事にする。これは Uhlmann の使った quadratic interpolation の役割を果たしていたのであるが、ここで使われている性質は、 $\#_r$ の持つ operator mean としてのものだけである。そこで、他にも同様の議論を組み立てる事はできないか、と考えるのは自然な事であろう。まず、

arithmetic mean $A \#_a B = \frac{A+B}{2}$ に関して、 $A \#_r B = (1-r)A + rB$,

$0 \leq r \leq 1$, と与えれば、これは $A \#_r B$ が持つ性質と全く同様の

事が成り立つ。又、harmonic mean $A \#_h B = \left(\frac{A^{-1}+B^{-1}}{2}\right)^{-1}$ に対しても

$A \#_r B = ((1-r)A^{-1} + rB^{-1})^{-1}$ とすれば同様である。そこで、こ

れらを使って, *relative operator entropy* を求めたのと同様の計算をそれぞれ行なってみる。

$$(a) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} (A \operatorname{ar} B - A) = B - A$$

$$(h) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} (A \operatorname{hr} B - A) = A - AB^{-1}A$$

(h) についての計算は $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} (1 \operatorname{hr} x - 1) = 1 - x^{-1}$ より得る。

そこでこれらの *solidarities* をそれぞれ,

$$S_a(A|B) = B - A, \quad S_h(A|B) = A - AB^{-1}A$$

と表わすと, $S(A|B)$, $S_a(A|B)$, $S_h(A|B)$ の間に次の不等式が成り立つ。[7]。

Theorem 2.

$$S_a(A|B) \geq S(A|B) \geq S_h(A|B).$$

最初の不等式は Klein の不等式としてよく知られている。後の不等号も $\log x \geq 1 - x^{-1}$ より明らかである。

次に、この定理の関係を更に精密に評価できないか、という事について考える。その為には $1 \operatorname{m}_{(t)} x = \left(\frac{1+x^t}{2}\right)^{\frac{1}{t}}, -1 \leq t \leq 1$, によって与えられる *operator mean* が適当である。これは, *power mean* と呼ばれるもので [11], [12],

$$t = 1 \text{ のとき } \frac{1+x}{2} = 1 \operatorname{a} x \quad (\text{arithmetic mean})$$

$$t = 0 \text{ のとき } x^{\frac{1}{2}} = 1 \operatorname{g} x \quad (\text{geometric mean})$$

$$t = -1 \text{ のとき } \frac{2x}{1+x} = 1 \operatorname{h} x \quad (\text{harmonic mean})$$

とあり, *arithmetic mean* から *harmonic mean* への *parameterization*

を与えており、かつ各 t において symmetric mean, 即ち.

$$A m_{(t)} B = B m_{(t)} A, \text{ である。又、}$$

$$1 \geq t \geq s \geq -1 \text{ ならば } A m_{(t)} B \geq A m_{(s)} B$$

である。更に各 t に対し、

$$1 m_{(t),r} x = (1-r+rx^t)^{\frac{1}{t}}, \quad 0 \leq r \leq 1$$

とすると、 $\{A m_{(t),r} B\}, 0 \leq r \leq 1$ は

$$t=1 \text{ のとき } \{A a_r B\}, t=0 \text{ は } \{A g_r B\}, t=-1 \text{ は } \{A h_r B\}$$

となり、これらの一般形でもある。そこで、同様に Uhlmann 流の計算をすれば、

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} (A m_{(t),r} B - A) = \frac{1}{t} \{A^{\frac{1}{2}} (A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^t A^{\frac{1}{2}} - A\}$$

となる。計算は、l'Hopital の法則を使うことで

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \{(1-r+rx^t)^{\frac{1}{t}} - 1\} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{t} (1-r+rx^t)^{\frac{1}{t}-1} (x^t-1) \\ &= \frac{1}{t} (x^t-1). \end{aligned}$$

であることより得られる。この solidarity を

$$S_t(A|B) = \frac{1}{t} \{A^{\frac{1}{2}} (A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^t A^{\frac{1}{2}} - A\}$$

とすれば、

$$S_1(A|B) = S_a(A|B),$$

$$S_0(A|B) = S(A|B)$$

$$S_{-1}(A|B) = S_h(A|B)$$

となり、 $t \geq s$ のとき $S_t(A|B) \geq S_s(A|B)$

も得られる。又、先の定理を精密化したものとして、次を得る

Theorem 3. $t \in [0, 1]$ とすれば

$$S_a(A|B) \geq S_t(A|B) \geq S(A|B) \geq S_{-t}(A|B) \geq S_h(A|B).$$

以上を整理すると $(\frac{1+x^t}{2})^{\frac{1}{t}}$ によって与えられる power mean に対し、solidarity $S_t(A|B)$ が対応し、しかもそれは $S(A|B)$ を通り、 $S_a(A|B)$ と $S_h(A|B)$ の parameterization を与えている。またこの solidarity $S_t(A|B)$ は

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} (A m_{(t),r} B - A) = S_t(A|B)$$

によって与えられている。これは Uhlmann が relative entropy を与えた方法の operator 版であることより、この変換を、Uhlmann's transformation と呼ぶ事にする。

もう少し一般論らしく次の様にまとめる。

m を symmetric な operator mean とする。このとき次の性質をもつ m_r , $0 \leq r \leq 1$, を m に対する Uhlmann's interpolation と呼んでおく。

$$(I.1) \quad A m_0 B = A, \quad A m_1 B = B, \quad A m_{\frac{1}{2}} B = A m B,$$

$$(I.2) \quad (A m_r B) m (A m_s B) = A m_{\frac{r+s}{2}} B.$$

$$(I.3) \quad \text{各 } A, B \text{ に対し, } r \rightarrow A m_r B \text{ は連続.}$$

ところで、 $A m_{(t),r} B$ についてはこれらの条件は満たされているのであるが、全ての symmetric mean に対して必ずしも Uhlmann's interpolation が取れるとは限らない。

例えば、 $f(x) = \frac{1}{8}(1 + 6\sqrt{x} + x)$ は symmetric mean を与える operator monotone function ではあるが、これによって決まる mean に対し、Uhlmann's interpolation を与えることはできない。

そこで当面、Uhlmann's interpolation が取れる様な symmetric mean の事を interpolational mean と呼ぶこととする。そして、 m を interpolational mean, m_r を Uhlmann's interpolation としたとき

$$S_m(A|B) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} (A m_r B - A)$$

を $A m B$ から $S_m(A|B)$ への Uhlmann's transformation と呼ぶ。

Theorem 4. m, n を interpolational mean とする。このとき

$$A m B \leq A n B \text{ ならば } S_m(A|B) \leq S_n(A|B).$$

以上は、Uhlmann の行っている方法をそのまま真似ながら operator mean の言葉で一般論らしくしたにすぎず、本質は power mean で成されている事柄でしかない。特に条件 (I, 1) (I, 2), (I, 3) については、Uhlmann が与えているものをそのまま書き直したものでしかない為、少し窮屈する。

今後若干の手直しをする必要があることを報告しておく。

On Relative Operator Entropy

Eizaburo Kamei

Abstract. In [6], we introduced the relative operator entropy by

$$S(A|B) = A^{1/2} (\log A^{-1/2} B A^{-1/2}) A^{1/2},$$

where A and B are invertible positive operators on a Hilbert space.

If $B = 1$, this coincides with the operator entropy defined by Nakamura and Umegaki [7].

By this definition, a Pimsner - Popa type theorem is proved [9]; let M be a II_1 factor, N a subfactor of M , E the conditional expectation of M onto N and $[M:N]$ be Jones' index, then

$$\log[M:N] = \sup \{ \|S(A|E(A))\|; 0 \leq A \leq 1, A \in M \}.$$

From the viewpoint of the theory of operator means established by Kubo and Ando [10], this relative operator entropy is an operator version of Uhlmann's relative entropy [16] which is formulated by the interpolation theory.

An operator mean m is determined by a nonnegative operator monotone function f on $(0, \infty)$ with the correspondence

$$A m B = A^{1/2} f(A^{-1/2} B A^{-1/2}) A.$$

The Uhlmann's formulation can be rewritten in the words of operator means as follows;

$$\lim_{r \rightarrow 0} 1/r (A_{\#r} B - A) = A^{1/2} (\log A^{-1/2} B A^{-1/2}) A^{1/2},$$

where $A_{\#r} B = A^{1/2} (A^{-1/2} B A^{-1/2})^r A^{1/2}$, $0 \leq r \leq 1$.

The relative entropy is given by the mean correspondence to an operator monotone function $\log x$ but not an operator mean, so we introduce the solidarities as a generalization of the operator means [8].

According to Uhlmann's formulation, we give a transformation from a class of operator means to a class of solidarities, which we call Uhlmann's transformation. In particular, the power means give a parameterized estimation of the relative operator entropy [7].

References

- [1] H. Araki: Relative entropy of states of von Neumann algebras, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 11 (1976), 809-833.
- [2] H. Araki: Relative entropy for State of von Neumann algebras II, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 13 (1977), 173-192.
- [3] J. I. Fujii: On geometric and harmonic means of operators, Math. Japon., 24 (1979), 203-207.
- [4] J. I. Fujii: Operator concave function and means of positive linear functionals, Math. Japon., 25 (1980), 453-461.
- [5] M. Fujii: On operator concavity related to means of operators, Math. Japon., 30 (1985), 283-288.
- [6] J. I. Fujii and E. Kamei: Relative operator in noncommutative information theory, to appear Math. Japon..
- [7] J. I. Fujii and E. Kamei: Uhlmann's interpolational method for operator means, to appear.
- [8] J. I. Fujii, M. Fujii and Y. Seo: An extent-ion of the Kubo-Ando theory: Solidari-ties, Preprint.
- [9] J. I. Fujii and Y. Seo: Jones' index and the relative operator entropy, to appear Math. Japon..

- [10] F. Kubo and Ando: Means of positive linear operators, Math. Ann., 248 (1980), 205-224.
- [11] F. Kubo: On Logarithmic operator means, 10th Symp. Appl. Func. Anal. (ed. by Umegaki), Sci. Univ. Tokyo, 1987, 47-61.
- [12] T. P. Lim: The power mean and the logarithmic mean, Amer. Math. Monthly, 81 (1974), 879-883.
- [13] M. Nakamura and H. Umegaki: A note on the entropy for operator algebras, Proc. Jap. Acad., 37 (1961), 149-154.
- [14] J. von Neumann: Die mathematischen grundlagen der quantenmechanik, Springer - Berlin, (1932).
- [15] W. and S. L. Woronowicz: Functional calculus for sesquilinear forms and the purification map, Rep. on Math. Phys., 8 (1975) 159-170.
- [16] A. Uhlmann: Relative entropy and Wigner-Yanase-Dyson-Lieb concavity in interpolation theory, Commun., Math., Phys., 54 (1977), 22-32.
- [17] H. Umegaki: Conditional expectation in an operator algebra IV, Kodai Math. Sem. Rep., (1962), 59-85.
- [18] H. Umegaki and M. Ohya: "Quantum Mechanical Entropies (in Japanese)", Kyoritsu Publishing Company (1984).