

複素 Leech 格子と散在型鈴木単純群の 2-local geometry

東大・理 吉茂 聡

(Satoshi Yoshiara)

1. 背景と概略

有限単純群の分類定理によれば, 有限単純群は Lie 型の群, 5 次以下の交代群, 26 個の散在群に大別される。Lie 型の群には building と呼ばれる, ある公理を満たす幾何構造が存在する。交代群には thin な building が対応する。

G を標数 p の有限体上で定義された Lie 型の単純群, B とその Borel 部分群 (G の p -Sylow normalizer である事に注意) $P_1, \dots, P_r$ と B を含む G の maximal parabolic subgps. 全体とする。

$\Omega_i := G/P_i = \{gP_i \mid g \in G\}$ とおき,

直和 $\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_r$ 上に反射的, 対称的な関係 I と

$$gP_i I hP_j \iff gP_i \cap hP_j \neq \phi$$

により定める。

この時得られる幾何 $(\alpha_i, \dots, \alpha_r; I)$ は complex 化したものが G に対応する building である。

この幾何は次の形でも定義できることに注意しよう。

$$\alpha_i := P_i^G = \{ P_i^g \mid g \in G \} \text{ とおき,}$$

$$P_i^g \cap P_j^h \supseteq B^g (\exists g \in G)$$

により $\alpha_i \cup \dots \cup \alpha_r$ 上の relation I' を定める。

この時得られる幾何 $(\alpha_i, \dots, \alpha_r; I)$ は上の幾何 $(\alpha_i, \dots, \alpha_r; I)$ に同型である。

さて、散在群についても同様の幾何を構成する試みがある。近年 Buekenhout [1], Ronan-Smith [4] などの中になされてきた。例えば、[4] において提唱された散在群 G の "2-local geometry" とは、上の幾何 ("building") の $p=2$ の類似物である。

それは B を G の 2-Sylow normalizer (または 2-Sylow 群, etc.) ととり、 $P_1, \dots, P_r$ ~~を~~ B を含む適当な性質を持つ (大体 2-constrained 的な) maximal 2-local subgps. 全体をとった時、先の $(\alpha_i, \dots, \alpha_r; I)$ と同様に定義して得られる幾何である。

この構成においては、散在群 G の存在が前提 となっている事に注意しよう。一方、Lie 型の群 L に対する上の "building" $(\alpha_i, \dots, \alpha_r; I)$ or $(\alpha_i', \dots, \alpha_r'; I)$ は

群 L の存在と前提とせず、他の数学的対象を用いて記述できる。例えば、 $L = \mathrm{PSL}_{n+1}(F)$ に対する "building" $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in I$ は、

$PV := \mathbb{P}_F$ 上の n -dim. projective space,

$\alpha_i := PV$ の $(i-1)$ -dim. subspaces,

$x \in I, y \in I \Leftrightarrow PV$ の subspaces として $x \subseteq y$ or $x \supseteq y$.

として記述できる。(つまり、これは通常の n -dim. 射影幾何に他ならない。)

群 G と前提とした定義の利点は、その統一性にあるといえるが、個々の幾何と調べる際には、 G の存在と無関係に、本来の意味での "幾何" の記述を与える事が必要 であり、群 G の性質とさじの上にも更迭のよい手段と与えると期待される。(射影幾何と PSL の関係と想起せよ。)

しかしながら、現在の所、散在群 G に対し、[1] [4] などを得られた幾何のうち、この様に全(群と離れた)記述が与えられているものはごく僅かである。(そもそも、よい表現の与えられた群 G が少ないのだから仕方ない所かも知れないが...) ある種の graph の同じ同型群の subgp として構成された群についてはこのグラフを基に、対応する幾何の定義される場合もあるが、1つの line 上に点列がない (thin) のだから、あまり幾何らしくないし、グラフの構成も複雑なと

が多いので、明快さを欠く。従って、graph を用いた幾何の記述は、ここでは一応除外して考える。そうすると、散在群の幾何のうち、群と密接した明快な記述の~~群~~与えられているものは Mathieu 群 (特に M_{24}) に対するものだけである。

本稿の主目的は、散在型鈴木厚作群 Su_3 の 2-local geometry として知られていた幾何 ([4]) が、 Su_3 の存在と前提とせずにかなり明確に記述できる事実の報告である。(詳しくは [6] をみよ。)

ここで $PSL_{n+1}(3)$ に対する n 次元 proj. space の役目と果たすのは、複素 Leech 格子とよばれる、 $\mathbb{C} \pm 12$ 次元のある複素格子 Λ である。しかし従来の ternary Golay code を用いたこの lattice Λ の表現は我々の目的にはそぐわないので、Lepowsky-Meurman [3] による Leech 格子の構成の複素版と行なって Λ と構成する。この Λ の表現と、幾何の定義の定義から、 $\text{Aut } \Lambda$ (order 6 の center を持ち、それによる商群が Su_3 に同型) の位数、3 種の maximal 2-constrained subgps. の構造などが全 (初等的に、しかたがすく決定できる。(Su_3 の存在証明も得られる。))

この Su_3 の 2-local geometry は散在群の幾何の

中ではとりわけ重要な意味を持つ。それについて以下少し述べる。

[1]において, building の diagram (これは Dynkin diagram になる.) の類似として, 一般の幾何に対する diagram が定義された。この diagram は有限個の点と、それらをつなぐ(ある種の記号の付いた)多重線分から成る。

幾何 $(\alpha_1, \dots, \alpha_k; I)$ が GAB (geometries that are almost buildings) であるとは、この幾何の diagram のどの点も ~~多重線分~~ 記号の付いていない単なる多重線分ではなれることである。([2]) ひとくちに言えば、この幾何が local には rank 2 の building であるとき、GAB と呼ばれる。

さて、Tits の定理 [5] によれば、殆どどの ~~多重線分~~ GAB は、それと同じ diagram を持つ、一般には無限の building の、ある全射による像となる。上の定義から、building は GAB であるが、この結果は building ではない GAB の重要性を示すといえよう。

今の所、数えきれない幾何のうち GAB であることがわかっているのは、Lyons-Sims の群に対するもの ([2] , これは 2-local geometry ではない。) と、そして本稿の主題である Suz の 2-local geometry の 2 つのみである。(多分この 2 つのみと思われる。) Tits の定理を用いると、

この2つの幾何は, どちらも適当な無限 buildings
の像となることがわかる。この“上の” building の
如何なる具体的な数学表現も, 今の所知られていない。
これを与える事は 非常に魅力的な問題に思われる。

Tits の論文 [4] を見ると, Suz の GAB (2-local
geometry とよぶより こちらの方が 良い) の自己同型群 ^{の subgp. Suz} に
対して, “上の” building の自己同型群の部分群 (無限群) で,
その商群が $Suz \times GAB$ の自己同型群となるものが存在する
ことがわかる。 Suz のかなり詳しい群論的解析により, この
無限群は BN-pair を持たぬことが示された。従って, “上の”
building も, かなり対称性の低いトリッキーなものであろう。

いずれにせよ, Suz の 2-local geometry は, GAB
(building ではない) であるという事が, この幾何を特にとり
あげた大きな理由である。

実際に筆者が この問題に取り組んだのは, 一昨年
末から昨年初めにかけて来日された W. M. Kantor 教授の
問へ “Do you have a (geometrical) description of the
geometry associated with Suz ?” に答えるためであった。
GAB に関するものと含め, 彼の多しの興味深い講演と,
私への様々な激励をよりかえり, ここにあつたため Kantor
教授へ深く感謝いたします。

2. 複素 Leech 格子と幾何の構成

以下, $R = \mathbb{Z}[\omega]$, $\omega = (-1 + \sqrt{-3})/2$,
 $\theta = \sqrt{-3}$ とおく。 R 成分の n 行 n 列ベクトル x のなす
 R -module R^n 上に, $h_n(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$
 により hermite 形式 h_n を定義する。 ここで $\bar{y}_i$ は y_i
 の複素共役である。 R^n の R -submodule X および
 R^m の R -submodule Y に対し, X と Y が isometric
 とは, R -module としての isomorphism $f: X \rightarrow Y$
 が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して
 $h_m(f(x), f(y)) = h_n(x, y)$
 が成立する事という。

[定義] (複素 E_8 -格子)

次の R^4 の R -submodule Γ を 複素 E_8 -lattice といふ。

$$\Gamma = \{ c + \theta x \mid c \in \mathbb{C}, x \in R^4 \},$$

$$\text{ここで } C = \left\{ \begin{array}{l} \pm(1, 1, 1, 0), \pm(1, -1, 0, 1) \\ \pm(1, 0, -1, -1), \pm(0, 1, -1, 1), 0 \end{array} \right\} (\subseteq R^4)$$

$\bar{\Gamma} = \Gamma/2\Gamma$ に, h_4 から自然に induce される 非退化
 hermite 形式 $\bar{h}_4$ が定義される。 このとき,

$$\bar{\Gamma} = \bar{\Phi} \oplus \bar{\Psi},$$

ここで $\overline{\Phi}, \overline{\Psi}$ は $\overline{h_4}$ に関する $\overline{\Gamma}$ の極大 totally isotropic subspaces , と分解される。

この分解に対応して, $\overline{\Phi}, \overline{\Psi}$ の全逆像である Γ の R -submodules Φ, Ψ が存在して

$$\Gamma = \Phi + \Psi, \quad \Phi \cap \Psi = 2\Gamma$$

を満たす。

このような Φ, Ψ を一組取り, 以下固定する。

また, Γ の R -submodule Π を

$$\Pi = \{ (x, x, y, 0) \mid x, y \in R, x - y \in \theta R \}$$

により定義する。

[定義] (複素 Leech 格子)

Γ の 3 つの copies の直和 $\Gamma^3 = \{ (x^1; x^2; x^3) \mid x^i \in \Gamma \}$ の R -submodule $\mathcal{L}$ を次により定義する。

$$\mathcal{L} = \left\{ (x^1; x^2; x^3) \in \Gamma^3 \mid \begin{array}{l} x^1 + x^2, x^1 + x^3 \in \Phi \\ x^1 + x^2 + x^3 \in \Psi \end{array} \right\}$$

また, $S = \text{Aut } \mathcal{L} = \{ g : 12 \times 12 \text{ unitary 行列} \mid \mathcal{L}g = \mathcal{L} \}$ とおく。

[命題] $(\mathcal{L}, h_{12})$ の realization は Leech lattice である。特に, $(\mathcal{L}, h_{12})$ は 複素 Leech 格子 ~~と同型~~ であり, $S/Z(S)$ は 散在型鈴木単純群 Suz と同型。

[~~定義~~ 定義]

$\mathcal{L}$ の R -submodule X は, R^4 の R -submodule 2Γ ($= \{2x \mid x \in \Gamma\}$) と isometric のとき, point とよばれる。

$\mathcal{L}$ の 3つの points X_1, X_2, X_3 の どの2つも h_{12} に 関して直交するならば, 3つ組 $\{X_1, X_2, X_3\}$ と line とよぶ。

$\mathcal{L}$ の R -submodule A は, R^4 の R -submodule 2Π と isometric のとき axis とよばれる。2つの axes A, B が 同値であるとは,

$$A \ni \vec{a}, B \ni \vec{b} \quad \text{s.t.} \quad h_{12}(a, a) = h_{12}(b, b) = 24, \\ \text{かつ} \quad a - b \in 2\mathcal{L}$$

であることとする。 $\mathcal{L}$ の axes 全体を, この同値関係で類別したときの各同値類と cross とよぶ。

各 cross は 互いに直交する 6つの axes から成る事がわかる。

[幾何の定義]

Points, lines, crosses の全体をそれぞれ, $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3$ とおく。また, $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{G}_3$ 上の $\blacksquare$ 関係 I を次の如く定める。

$$x, y \in \mathcal{G}_i \text{ に対し, } x I y \Leftrightarrow x = y \quad (i=1, 2, 3).$$

$$x = X \in \mathcal{G}_1, y = \{X_1, X_2, X_3\} \in \mathcal{G}_2 \text{ に対し,}$$

$$x I y \Leftrightarrow X = X_i \quad (\exists i)$$

$$x = X \in \mathcal{G}_1, z = \{A_1, A_2, \dots, A_6\} \in \mathcal{G}_3 \text{ に対し,}$$

$$x I z \Leftrightarrow A_i, A_j \subseteq X \quad (1 \leq i \neq j \leq 6)$$

$$y = \{X_1, X_2, X_3\} \in \mathcal{G}_2, z = \{A_1, A_2, \dots, A_6\} \in \mathcal{G}_3 \text{ に対し,}$$

$$y I z \Leftrightarrow \text{適当に index をつかえて}$$

$$A_{2i-1}, A_{2i} \subseteq X_i \quad (i=1, 2 \text{ and } 3)$$

[定理] 上で定義された幾何 $(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3; I)$

は次を満たす。

任意の $x \in \mathcal{G}_1$ に対し, $(\mathcal{G}_2(x), \mathcal{G}_3(x); I)$ は $\mathbb{H}_4$ 上 4次元射影 Unitary 空間の isotropic line と point のなす幾何に同型。

任意の $z \in \mathcal{G}_3$ に対し, $(\mathcal{G}_1(z), \mathcal{G}_2(z); I)$ は $\mathbb{H}_2$ 上 4次元射影 Symplectic 空間の isotropic point と line のなす

幾何に同型。

任意の $y \in \mathcal{G}_2$ に対し, $(\mathcal{G}_1(y), \mathcal{G}_3(y); I)$ は
trivial geometry; すなわち $x I z$ ($\forall x \in \mathcal{G}_1(y), z \in \mathcal{G}_3(y)$)
 但し, 以上において $\mathcal{G}_i(x) := \{y \in \mathcal{G}_i \mid y I x\}$ 。

注意: 特にこの定理は幾何 $(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3; I)$ が
 diagram  に属し,
 従って GAB である事を示す。

[定理] 群 S は 幾何 $(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3; I)$ の
maximal flags 全体の集合

$\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathcal{G}_i, x_i I x_j (1 \leq i < j \leq 3)\}$
 の I に transitive である。

[命題] $|S| = 2^{14} \cdot 3^8 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, $Z(S) \cong Z_6$.
 また, ひとつの maximal flag $\{x_1, x_2, x_3\}$ ($x_i \in \mathcal{G}_i$)
 に対し, S における x_i の stabilizer を P_i と書くと,

$$P_1/Z(S) \cong 2^{1+6} \cdot U_4(2)$$

$$P_2/Z(S) \cong 2^{2+8} \rtimes (A_5 \times S_3)$$

$$P_3/Z(S) \cong 2^{4+6} \rtimes (Z_3 \cdot A_6)$$

更に $\bigcap_{i=1}^3 P_i$ は S の 2-Sylow Normalizer.

[命題] 先の命題の記号を用いる。

$$\mathcal{G}_i' := S/P_i = \{sP_i \mid s \in S\},$$

$$\mathcal{G}_i'' := P_i^S = \{P_i^s \mid s \in S\}, \quad (i=1,2,3)$$

$$sP_i \cap tP_j \neq \emptyset \iff sP_i \cap tP_j \neq \emptyset$$

$$P_i^s \cap P_j^t \neq \emptyset \iff P_i^s \cap P_j^t \supseteq \left(\bigcap_{k=1}^3 P_k\right)^u \quad (\exists u \in S)$$

により幾何 $(\mathcal{G}_1', \mathcal{G}_2', \mathcal{G}_3'; I')$ および

$(\mathcal{G}_1'', \mathcal{G}_2'', \mathcal{G}_3''; I'')$ を定義すれば、これらは先の幾何

$(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3; I)$ に同型。

($(\mathcal{G}_1', \mathcal{G}_2', \mathcal{G}_3'; I)$ が従来 $S_{\mathcal{G}}$ の 2-local geometry
と呼ばれるものである。)

[命題] 幾何 $(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3; I)$ は intersection
property ([1]) を満たす。すなわち、任意の $x \in \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{G}_3$
は $\mathcal{G}_1$ の subset $\mathcal{G}_1(x) = \{y \in \mathcal{G}_1 \mid y I x\}$ と同-複に、
 $x \neq y \in \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{G}_3$ に対し

$$\mathcal{G}_1(x) \cap \mathcal{G}_1(y) = \emptyset \quad \vee \quad \mathcal{G}_1(z) \quad (\exists z \in \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{G}_3).$$

注意: 幾何 $(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3; I)$ の自己同型群は
 $\text{Aut } S_{\mathcal{G}} \quad (|\text{Aut } S_{\mathcal{G}}| = 2)$ と部分群とに含む。一致する
ことが予想されるが、まだ証明していない。

文献

1. F. Buekenhout, Diagrams for geometries and groups, *J. Combin. Theory Ser. A* 27 (1979), 121-151
2. W. M. Kantor, Some geometries that are almost buildings, *Europ. J. Combinatorics* 2 (1981), 239-247.
3. J. Lepowsky and A. Meurman, An E_8 -approach to the Leech lattice and the Conway group, *J. Algebra* 77 (1982), ⁴⁸⁴~504.
4. M. A. Ronan and S. D. Smith, 2-local geometries for some sporadic groups, *Proc. Symp. Pure Math* 37 (1980), 283-289.
5. J. Tits, A local approach to buildings, in "The Geometric Vein: The Coxeter Festschrift" 519-587, Springer, New York - Heidelberg - Berlin, 1981.
6. S. Yoshikawa, A lattice theoretical construction of a GAB of the Suzuki sporadic simple group, preprint; Tokyo