

Vaisman 完全可解多様体の構造定理

沼津高専・教養科 沢井 洋

Hiroshi Sawai

Liberal Arts, National Institute of Technology, Numazu College

1 序章

G を単連結な可解リー群とし, Γ を G の格子群とすると, コンパクト多様体 $\Gamma \backslash G$ を可解多様体という. べき零多様体も同様に定義される. 可解多様体がケーラー構造をもつならば, 複素トーラスとなる [7]. 可解多様体において, ケーラー構造の拡張となる構造について報告する.

(M, g, J) をコンパクトなエルミート多様体とする. また, Ω を (g, J) の基本 2 次形式とする. $d\Omega = \omega \wedge \Omega$ を満たす閉 1 次形式 ω が存在するとき, (M, g, J) を局所共形ケーラー多様体という. また, 閉 1 次形式 ω を Lee 形式という. $\omega = df$ のとき, $(M, e^{-f}g, J)$ はケーラー多様体である.

M を多様体とし, α を M 上の閉 1 次形式とする. p 次形式から $p+1$ 次形式への微分作要素 d_α を, $d_\alpha \beta := \alpha \wedge \beta + d\beta$ と定義する. α は閉 1 次形式より, $d_\alpha^2 = 0$ を満たす. また, $d_\alpha \beta = 0$ のとき β を α -閉形式, $\beta = d_\alpha \gamma$ のとき β を α -完全形式とそれぞれいう. リー環上でも, 同様に定義できる. 局所共形ケーラー構造の基本 2 次形式 Ω は, $-\omega \wedge \Omega + d\Omega = 0$ を満たすことから, $-\omega$ -閉形式である.

ケーラー多様体でない局所共形ケーラー多様体の例として, Hopf 曲面 [21], 井上曲面 [20], Kodaira-Thurston 多様体 [3], Oeljeklaus-Toma 多様体 [13] が知られている (cf. [6]). また, 井上曲面, Kodaira-Thurston 多様体, Oeljeklaus-Toma 多様体は, 可解多様体の構造をもつ.

局所共形ケーラー多様体 (M, g, J) について, その Lee 形式 ω が計量 g に関して平行となると, Vaisman 多様体という. Hopf 曲面と Kodaira-Thurston 多様体は, Vaisman 多様体である. 井上曲面と Oeljeklaus-Toma 多様体はこれと異なり, その Lee 形式は平行でない.

単連結な可解リー群 G のリー環を $\mathfrak{g}$ とする. 任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して, その随伴表現の固有値がすべて実数のとき, G を完全可解リー群という. 完全可解多様体 $\Gamma \backslash G$ 上の Vaisman 構造について次が成り立つ:

主定理 1.1. [18] $(\Gamma \backslash G, J)$ を左不変な複素構造をもつ完全可解多様体とする. $(\Gamma \backslash G, J)$ が Vaisman 構造をもつならば, $\Gamma \backslash G$ は $S^1 \times \Gamma \backslash H$, 但し, H は Heisenberg リー群, となる.

なお、左不変な複素構造も決定できる。

主定理より、局所共形ケーラー構造をもつべき零多様体が決定できる：

系 1.2. (cf. [15]) $(\Gamma \backslash G, J)$ を左不変な複素構造をもつべき零多様体とする。 $(\Gamma \backslash G, J)$ が局所共形ケーラー構造をもつならば、 $\Gamma \backslash G$ は $S^1 \times \Gamma \backslash H$, 但し、 H は Heisenberg リー群、となる。

Vaisman 多様体であるための必要な条件 [22] や Vaisman 構造をもたない可解多様体の判定方法 [10] が知られている。これらをもちいて、Vaisman 構造をもたない局所共形ケーラー可解多様体を紹介する。また、井上曲面はこれらの判定条件を用いることはできないが、Vaisman 構造をもたないことを示す。

2 準備

本章では、主定理を証明するための準備を述べる。

$(M = \Gamma \backslash G, J)$ を左不変な複素構造をもつ完全可解多様体とする。 (M, J) が局所共形ケーラー計量 g をもつと仮定する。このとき、Lee 形式 ω に対して、 $\omega - \omega_0 = df$ を満たす左不変な閉 1 次形式 ω_0 と M 上の C^∞ 級関数 f が存在する [9]。これらを用いて、左不変な 2 次形式 Ω_0 を、左不変なベクトル場 X, Y に対して、

$$\Omega_0(X, Y) := \int_{x \in M} (e^{-f} \Omega)_x(X_x, Y_x) d\mu,$$

但し、 $d\mu$ は G 上の両側不変な体積要素から誘導される M 上の体積要素、と定義する。

命題 2.1. [2] 左不変なベクトル場 X, Y に対して、次が成り立つ：

1. $\Omega_0(JX, JY) = \Omega_0(X, Y)$.
2. $\Omega_0(JX, X) \geq 0$, 但し、等号成立は $X = 0$ のときのみ.
3. $d\Omega_0 = \omega_0 \wedge \Omega_0$.

命題 2.1 より、 (M, J) 上に、 Ω_0 を基本 2 次形式とする左不変なエルミート構造 $(\langle, \rangle, J)$ が決まる。即ち、 G に対応する完全可解リー環 $\mathfrak{g}$ 上に局所共形ケーラー構造 $(\langle, \rangle, J)$ が誘導される。

(M, g) をコンパクトリーマン多様体とし、 α を M 上の平行な 1 次形式とする。 α は閉 1 次形式であるが、次が知られている：

定理 2.2. [11] コンパクトなリーマン多様体 (M, g) において、 α を計量 g に関して平行な 1 次形式とする。このとき、任意の α -閉形式は、 α -完全形式である。

したがって、Vaisman 多様体の Lee 形式は平行であることから、この基本 2 次形式 Ω は $-\omega$ -完全形式となる。さらに、Vaisman 可解多様体の場合、上記の左不変な基本 2 次形式 Ω_0 も $-\omega_0$ -完全形式となる [16]。

3 $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle, J)$ の構造

$(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle, J)$ を前章で得られた局所共形ケーラー完全可解リー環とする. 本章では, この基本 2 次形式 Ω_0 から得られる $\mathfrak{g}$ の構造について考える.

$\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ によって誘導される $\mathfrak{g}^*$ から $\mathfrak{g}$ への線形写像を γ_0 とし, $A := \gamma_0(\omega_0)$ とおく. また, $\langle A, A \rangle = 1$ と仮定してよい.

局所共形ケーラー構造をもつ可解リー環 $\mathfrak{g}$ について, 次が成り立つ:

定理 3.1. [17] 基本 2 次形式 Ω_0 が $-\omega_0$ -完全形式ならば, Lee 形式 ω_0 は平行である.

定理 3.2. [17] $\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ から誘導される $\wedge \mathfrak{g}^*$ 上の内積を $(\cdot, \cdot)$ とする. このとき, Schwarz の不等式

$$(\Omega_0, d_{-\omega_0}(\omega_0 \circ J))^2 \leq (\Omega_0, \Omega_0)(d_{-\omega_0}(\omega_0 \circ J), d_{-\omega_0}(\omega_0 \circ J))$$

は, 次と同値である:

$$0 \leq \langle [A, JA], JA \rangle.$$

Vaisman 構造の場合, 定理 2.2 より, $\Omega_0 = d_{-\omega_0}\eta_0$ となる. よって, 定理 3.1 から, ω_0 は平行である. これより,

$$\langle [A, JA], JA \rangle = \langle A, \nabla_{JA}JA \rangle = \omega_0(\nabla_{JA}JA) = -\nabla_{JA}\omega_0(JA) = 0$$

となる. 即ち, 定理 3.2 より,

$$\Omega_0 = kd_{-\omega_0}(\omega_0 \circ J) = k(-\omega_0 \wedge \omega_0 \circ J + d(\omega_0 \circ J))$$

を満たす $k \in \mathbb{R}$ が存在する. 特に, $\langle A, A \rangle = 1$ と $\langle [A, JA], JA \rangle = 0$ より, $k = -1$ となる. $\Omega_0 = d_{-\omega_0}(-\omega_0 \circ J)$ から, $JA \in Z(\mathfrak{g})$ となる [16].

4 主定理の証明

本章では, 主定理の証明を述べる.

$\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g} = \text{span}\{A, JA\} \oplus \mathfrak{h}$ と直交分解し, $\mathfrak{h} = \text{span}\{JA\} \oplus \mathfrak{b}$ とおく. また, π を $\mathfrak{h}$ から $\mathfrak{h}/\text{span}\{JA\}$ への射影とする. $JA \in Z(\mathfrak{g})$ より, π は準同型となることに注意する.

Φ を, $\Phi(JA) = 0$, $\Phi(X) = JX$ ($X \in \mathfrak{b}$) によって定義される $\mathfrak{h}$ から $\mathfrak{h}$ への線形写像とする. これによって, $\mathfrak{h}/\text{span}\{JA\}$ から $\mathfrak{h}/\text{span}\{JA\}$ への線形写像 $\tilde{\Phi}$ を

$$\tilde{\Phi}(\pi(X)) = \pi(\Phi(X))$$

と定義する.

補題 4.1. $\tilde{\Phi}$ は, $\mathfrak{h}/\text{span}\{JA\}$ 上の複素構造となる.

Proof. $X \in \mathfrak{h}$ に対して, $X = Z + X'$, 但し, $Z \in \text{span}\{JA\}$, $X' \in \mathfrak{b}$, と分解する.
このとき,

$$\tilde{\Phi}^2(\pi(X)) = \pi(\Phi^2(X)) = \pi(\Phi^2(X')) = \pi(J^2 X') = -\pi(X') = -\pi(X)$$

となる. よって, $\tilde{\Phi}^2 = -id$ を満たす.

また, $N_{\tilde{\Phi}}$ を $\tilde{\Phi}$ の Nijenhuis テンソル場とすると,

$$\begin{aligned} N_{\tilde{\Phi}}(\pi(X), \pi(Y)) &= [\pi(X), \pi(Y)] + \tilde{\Phi}[\tilde{\Phi}(\pi(X)), \pi(Y)] + \tilde{\Phi}[\pi(X), \tilde{\Phi}(\pi(Y))] - [\tilde{\Phi}(\pi(X)), \tilde{\Phi}(\pi(Y))] \\ &= \pi[X, Y] + \tilde{\Phi}[\pi(\Phi(X)), \pi(Y)] + \tilde{\Phi}[\pi(X), \pi(\Phi(Y))] - [\pi(\Phi(X)), \pi(\Phi(Y))] \\ &= \pi[X, Y] + \tilde{\Phi} \circ \pi[\Phi(X), Y] + \tilde{\Phi} \circ \pi[X, \Phi(Y)] - \pi[\Phi(X), \Phi(Y)] \\ &= \pi[X, Y] + \pi \circ \tilde{\Phi}[\Phi(X), Y] + \pi \circ \tilde{\Phi}[X, \Phi(Y)] - \pi[\Phi(X), \Phi(Y)] \\ &= \pi\{[X, Y] + \tilde{\Phi}[\Phi(X), Y] + \tilde{\Phi}[X, \Phi(Y)] - [\Phi(X), \Phi(Y)]\} \\ &= \pi\{[X', Y'] + \tilde{\Phi}[JX', Y'] + \tilde{\Phi}[X', JY'] - [JX', JY']\} \end{aligned}$$

となる. ここで, J が可積分であることから,

$$\begin{aligned} [X', Y'] + J[JX', Y'] + J[X', JY'] - [JX', JY'] &= 0 \\ [X', Y'] - [JX', JY'] &= -J[JX', Y'] - J[X', JY'] \end{aligned}$$

を満たす. これより,

$$\begin{aligned} N_{\tilde{\Phi}}(\pi(X), \pi(Y)) &= \pi\{[X', Y'] + \tilde{\Phi}[JX', Y'] + \tilde{\Phi}[X', JY'] - [JX', JY']\} \\ &= \pi\{-J[JX', Y'] - J[X', JY'] + \tilde{\Phi}[JX', Y'] + \tilde{\Phi}[X', JY']\} \\ &= \pi\{-J([JX', Y'] + [X', JY']) + \tilde{\Phi}([JX', Y'] + [X', JY'])\} \end{aligned}$$

となる. さらに, $[JX', Y'] + [X', JY'] = Z + B$, 但し, $Z \in \text{span}\{JA\}$, $B \in \mathfrak{b}$ とおく.
 $J([JX', Y'] + [X', JY']) = -[X', Y'] + [JX', JY'] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$ より, $JZ = 0$, 即ち, $Z = 0$ となる. よって, Φ の定義から, $N_{\tilde{\Phi}}(\pi(X), \pi(Y)) = 0$ を得る. $\square$

$\mathfrak{h}/\text{span}\{JA\}$ 上の 2 次形式を,

$$\tilde{\Omega}_0(\pi(X), \pi(Y)) = d(-\omega_0 \circ J)(X, Y)$$

と定義する. $JA \in Z(\mathfrak{g})$ より, これは well-defined である.

命題 4.2. $\pi(X_i) \in \mathfrak{h}/\text{span}\{JA\}$ に対して, 次が成り立つ:

1. $\tilde{\Omega}_0(\tilde{\Phi} \circ \pi(X_1), \tilde{\Phi} \circ \pi(X_2)) = \tilde{\Omega}_0(\pi(X_1), \pi(X_2)).$
2. $\tilde{\Omega}_0(\tilde{\Phi} \circ \pi(X_1), \pi(X_1)) \geq 0$, 但し, 等号成立は $\pi(X_1) = 0$ のときのみ.
3. $d\tilde{\Omega}_0 = 0.$

Proof. $X_i \in \mathfrak{h}$ に対して, $X_i = Z_i + X'_i$, 但し, $Z_i \in \text{span}\{JA\}$, $X'_i \in \mathfrak{b}$, と分解する.
定義より,

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_0(\tilde{\Phi} \circ \pi(X_1), \tilde{\Phi} \circ \pi(X_2)) &= \tilde{\Omega}_0(\pi(\Phi(X_1)), \pi(\Phi(X_2))) \\ &= \tilde{\Omega}_0(\pi(JX'_1), \pi(JX'_2)) \\ &= d(-\omega_0 \circ J)(JX'_1, JX'_2)\end{aligned}$$

となる. ω_0 は閉形式より, $d(-\omega_0 \circ J)$ は J -不変である. よって, $X'_i \in \mathfrak{b}$ より,

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_0(\tilde{\Phi} \circ \pi(X_1), \tilde{\Phi} \circ \pi(X_2)) &= d(-\omega_0 \circ J)(JX'_1, JX'_2) \\ &= d(-\omega_0 \circ J)(X'_1, X'_2) = \tilde{\Omega}_0(\pi(X_1), \pi(X_2))\end{aligned}$$

が成り立つ.

同様に, $X'_1 \in \mathfrak{b}$ であるから,

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_0(\tilde{\Phi} \circ \pi(X_1), \pi(X_1)) &= \tilde{\Omega}_0(\pi(\Phi(X_1)), \pi(X_1)) \\ &= d(-\omega_0 \circ J)(JX'_1, X'_1) \\ &= \Omega_0(JX'_1, X'_1) = \langle X'_1, X'_1 \rangle \geq 0\end{aligned}$$

となる. 等号成立は, $X'_1 = 0$, 即ち, $\pi(X_1) = 0$ のときのみとなる.

直接計算より,

$$\begin{aligned}(d\tilde{\Omega}_0)(\pi(X_1), \pi(X_2), \pi(X_3)) &= -\tilde{\Omega}_0([\pi(X_1), \pi(X_2)], \pi(X_3)) + \tilde{\Omega}_0([\pi(X_1), \pi(X_3)], \pi(X_2)) \\ &\quad - \tilde{\Omega}_0([\pi(X_2), \pi(X_3)], \pi(X_1)) \\ &= -\tilde{\Omega}_0(\pi[X_1, X_2], \pi(X_3)) + \tilde{\Omega}_0(\pi[X_1, X_3], \pi(X_2)) - \tilde{\Omega}_0(\pi[X_2, X_3], \pi(X_1)) \\ &= d(\omega_0 \circ J)([X'_1, X'_2], X'_3) - d(\omega_0 \circ J)([X'_1, X'_3], X'_2) + d(\omega_0 \circ J)([X'_2, X'_3], X'_1) \\ &= 0\end{aligned}$$

を得る. □

補題 4.1, 命題 4.2 より, $(\tilde{\Omega}_0, \tilde{\Phi})$ は $\mathfrak{h}/\text{span}\{JA\}$ 上にエルミート構造を誘導し, さらに, その基本 2 次形式 $\tilde{\Omega}_0$ は閉形式である. 即ち, $(\tilde{\Omega}_0, \tilde{\Phi})$ はケーラー構造となる.

さらに, 次が成り立つ:

補題 4.3. $\mathfrak{h}/\text{span}\{JA\}$ はユニモジュラーで完全可解リー環である.

Proof. $\pi(X), \pi(Y) \in \mathfrak{h}/\text{span}\{JA\}$ に対して, $\Phi(Y) \in \mathfrak{b}$ より,

$$\begin{aligned}\langle [\pi(X), \pi(Y)], \pi(Y) \rangle &= \langle \pi[X, Y], \pi(Y) \rangle \\ &= \tilde{\Omega}_0(\tilde{\Phi} \circ \pi(Y), \pi[X, Y]) = \tilde{\Omega}_0(\pi(\Phi(Y)), \pi[X, Y]) \\ &= d(-\omega_0 \circ J)(\Phi(Y), [X, Y]) \\ &= \Omega_0(\Phi(Y), [X, Y])\end{aligned}$$

となる. $X, Y \in \mathfrak{h}$ を $X = Z_X + X', Y = Z_Y + Y'$, 但し, $Z_X, Z_Y \in \text{span}\{JA\}, X', Y' \in \mathfrak{b}$ と分解すると,

$$\langle [\pi(X), \pi(Y)], \pi(Y) \rangle = \Omega_0(\Phi(Y), [X, Y]) = \Omega_0(JY', [X', Y']) = \langle [X', Y'], Y' \rangle$$

を得る. よって, ω_0 が閉形式で, $JA \in Z(\mathfrak{g})$ より,

$$\text{tr ad}(\pi(X)) = \text{tr ad}(X') - \langle [X', A], A \rangle - \langle [X', JA], JA \rangle = \text{tr ad}(X')$$

となる. 可解リー群 G は格子群 Γ をもつことから, ユニモジュラーである. よって, $\text{tr ad}(\pi(X)) = \text{tr ad}(X') = 0$ が成り立つ.

複素数 $\alpha \neq 0$ を随伴表現の固有値にもつ $\pi(X) \in \mathfrak{h}/\text{span}\{JA\}$ が, 存在すると仮定する. その固有ベクトルを $\pi(Y)$ とおくと,

$$\alpha\pi(Y) = [\pi(X), \pi(Y)] = \pi[X, Y]$$

から, $\alpha Y = [X, Y] + Z$ を満たす $Z \in \text{span}\{JA\} \subset Z(\mathfrak{g})$ が存在する. これより,

$$[X, Y - \frac{1}{\alpha}Z] = [X, Y] = \alpha Y - Z = \alpha(Y - \frac{1}{\alpha}Z)$$

となり, $\text{ad}(X)$ は複素数 α を固有値にもつ. これは, $\mathfrak{g}$ の完全性に矛盾する. $\square$

ケーラー構造をもつリー環について, 次が知られている:

定理 4.4. [4] $\mathfrak{g}$ をユニモジュラーな完全可解リー環とする. $\mathfrak{g}$ がケーラー構造をもつならば, $\mathfrak{g}$ は可換となる.

主定理の証明

補題 4.3 より, $\mathfrak{h}/\text{span}\{JA\}$ は定理 4.4 の仮定を満たす. ゆえに, $\mathfrak{h}/\text{span}\{JA\}$ は可換となる. 実際に, $\mathfrak{h}/\text{span}\{JA\}$ 上のエルミート内積に関して, 正規直交基底 $\{\pi(X_i), \tilde{\Phi} \circ \pi(X_i)\}_{i=1}^{n-1} = \{\pi(X'_i), \pi(JX'_i)\}_{i=1}^{n-1}$, 但し, $X'_i, JX'_i \in \mathfrak{b}$, をとると,

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \langle \pi(X'_i), \pi(X'_j) \rangle = \tilde{\Omega}_0(\tilde{\Phi} \circ \pi(X'_i), \pi(X'_j)) = \tilde{\Omega}_0(\pi(JX'_i), \pi(X'_j)) \\ &= d(-\omega_0 \circ J)(JX'_i, X'_j) = \omega_0 \circ J([JX'_i, X'_j]) = -\langle JA, [JX'_i, X'_j] \rangle, \\ 0 &= \langle \pi(X'_i), \tilde{\Phi} \circ \pi(X'_j) \rangle = \tilde{\Omega}_0(\pi(X'_i), \pi(X'_j)) \\ &= d(-\omega_0 \circ J)(X'_i, X'_j) = \omega_0 \circ J([X'_i, X'_j]) = -\langle JA, [X'_i, X'_j] \rangle \end{aligned}$$

を満たす. また, $d(-\omega_0 \circ J)$ が J -不変より, $0 = \langle JA, [JX'_i, JX'_j] \rangle$ も満たす. 以上より,

$$\mathfrak{h} = \text{span}\{JA, X'_i, JX'_i : [X'_i, JX'_j] = \delta_{ij}JA\}$$

となり, これは $(2n-1)$ 次元 Heisenberg リー環である. よって, $\mathfrak{g} = \text{span}\{A\} \ltimes \mathfrak{h}$ となる.

Lee 形式 ω_0 が平行より, 任意の $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して,

$$\begin{aligned} 0 = \nabla_X \omega_0(Y) &= -\omega_0(\nabla_X Y) = -\langle A, \nabla_X Y \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \{ \langle [A, X], Y \rangle + \langle X, [A, Y] \rangle \} \\ \langle [A, X], Y \rangle &= -\langle X, [A, Y] \rangle \end{aligned}$$

が成り立つ. ゆえに, $\mathfrak{h}$ から $\mathfrak{h}$ への線形写像 $\text{ad}(A)$ の表現行列は歪対称である. 一方, $\mathfrak{g}$ は完全可解リー環より, 線形写像 $\text{ad}(A)$ の固有値は実数のみである. よって, $\mathfrak{h}$ から $\mathfrak{h}$ への線形写像 $\text{ad}(A)$ は自明となる.

主定理より, 次が得られる:

系 4.5. (cf. [15]) $(\Gamma \backslash G, J)$ を左不変な複素構造をもつべき零多様体とする. $(\Gamma \backslash G, J)$ が局所共形ケーラー構造をもつならば, $\Gamma \backslash G$ は $S^1 \times \Gamma \backslash H$, 但し, H は Heisenberg リー群, となる.

Proof. べき零多様体 $\Gamma \backslash G$ の局所共形ケーラー構造 (Ω, J) は, そのリー環 $\mathfrak{g}$ 上に局所共形ケーラー構造 (Ω_0, J) を誘導する (cf. [12]). 基本 2 次形式 Ω_0 は $-\omega_0$ -閉形式であるが, これは $-\omega_0$ -完全形式である [5]. したがって, (Ω_0, J) は Vaisman 構造となる [17]. よって, べき零多様体は完全可解多様体であるから, 主定理より, $\Gamma \backslash G$ は $S^1 \times \Gamma \backslash H$, 但し, H は Heisenberg リー群, となる. $\square$

5 局所共形ケーラー可解多様体の例

本章では, Vaisman 構造をもたない局所共形ケーラー可解多様体の例を紹介する.

Vaisman 多様体について, 次が知られている:

定理 5.1. [22] Vaisman 多様体の第 1 ベッチ数は奇数である.

定理 5.2. [10] 可解リー群 G を $G = \mathbb{R}^n \ltimes \mathbb{R}^m$ とする. 以下を仮定する:

1. 可解リー群 G が格子群 Γ をもつ.
2. 可解多様体 $\Gamma \backslash G$ は左不変な複素構造 J をもつ.
3. $H_{\text{DR}}^1(\Gamma \backslash G) \cong H^1(\mathfrak{g})$, 但し, $\mathfrak{g}$ は G のリー環.

このとき, $\dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] > \frac{1}{2} \dim \mathfrak{g}$ ならば, $(\Gamma \backslash G, J)$ は Vaisman 構造をもたない.

上記を用いて, Vaisman 構造をもたない局所共形ケーラー可解多様体を紹介する.

例 5.3. (井上曲面 S^0 [20]) $\alpha, \beta, \bar{\beta} (\alpha > 0, \beta \neq \bar{\beta})$ を $B \in \text{SL}(3, \mathbb{Z})$ の固有値とする. これを用いて, $\mathbb{H} \times \mathbb{C} = \{(x + \sqrt{-1}\alpha^t, z) : x, t \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}\}$ 上の群構造を

$$(x + \sqrt{-1}\alpha^t, z) \cdot (x' + \sqrt{-1}\alpha^{t'}, z') = (\alpha^t x' + x + \sqrt{-1}\alpha^{t+t'}, \beta^t z' + z)$$

と定義する. $(\mathbb{H} \times \mathbb{C}, \cdot)$ を行列表示すると,

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha^t & 0 & 0 & x \\ 0 & \beta^t & 0 & z \\ 0 & 0 & \bar{\beta}^t & \bar{z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : t, x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C} \right\}$$

となる. 可解リー群 G_1 は格子群 Γ をもつ [16].

可解リー群 G_1 のリー環を $\mathfrak{g}_1$ とすると,

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_1 &= \text{span} \{A, X, Z_1, Z_2\} \\ [A, X] &= 2X, [A, Z_1] = -Z_1 + cZ_2, [A, Z_2] = -Z_2 - cZ_1 \end{aligned}$$

となる. 可解多様体 $\Gamma \backslash G_1$ 上の左不変な複素構造は, $JA = X, JZ_1 = Z_2$ によって定義できる. また, 左不変な 1 次形式の基底として, 次の $\{\omega, x, z_1, z_2\}$ をとる:

$$\begin{aligned} d\omega &= 0, dx = -2\omega \wedge x, \\ dz_1 &= \omega \wedge z_1 + c\omega \wedge z_2, dz_2 = \omega \wedge z_2 - c\omega \wedge z_1. \end{aligned}$$

基本 2 次形式 Ω を

$$\Omega = -\omega \wedge x - z_1 \wedge z_2$$

とすると, (Ω, J) は, Lee 形式を ω とする局所共形ケーラー構造となる. また, $\nabla\omega \neq 0$ であることにも注意する.

一方, $\dim H_{DR}^1(\Gamma \backslash G_1) = 1$ であるが, 可解多様体 $\Gamma \backslash G_1$ は 定理 5.2 の仮定を満たす. したがって, $\dim[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] = 3$ より, $(\Gamma \backslash G, J)$ は Vaisman 構造をもたない [10].

例 5.4. $((2, 1)$ -型 Oeljeklaus-Toma 多様体 [13]) $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \bar{\beta} (\beta \neq \bar{\beta})$ を $f_1(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1$ の零点とし, $\alpha'_1, \alpha'_2, \beta', \bar{\beta}'$ を $f_2(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 3x + 1$ の零点とする.

このとき, $\begin{vmatrix} \log \alpha_1 & \log \alpha_2 \\ \log \alpha'_1 & \log \alpha'_2 \end{vmatrix} \neq 0$ から,

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &= \{(t_1, t_2) : t_i \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ (t_1, t_2) \begin{pmatrix} \log \alpha_1 & \log \alpha_2 \\ \log \alpha'_1 & \log \alpha'_2 \end{pmatrix} : t_i \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{(t_1 \log \alpha_1 + t_2 \log \alpha'_1, t_1 \log \alpha_2 + t_2 \log \alpha'_2) : t_i \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

となる. よって,

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^2 \times \mathbb{C} &= \{(x_1 + \sqrt{-1}e^{t_1}, x_2 + \sqrt{-1}e^{t_2}, z) : x_i, t_i \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}\} \\ &= \{(x_1 + \sqrt{-1}e^{t_1 \log \alpha_1 + t_2 \log \alpha'_1}, x_2 + \sqrt{-1}e^{t_1 \log \alpha_2 + t_2 \log \alpha'_2}, z) : x_i, t_i \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}\} \\ &= \{(x_1 + \sqrt{-1}\alpha_1^{t_1} \alpha_1'^{t_2}, x_2 + \sqrt{-1}\alpha_2^{t_1} \alpha_2'^{t_2}, z) : x_i, t_i \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}\} \end{aligned}$$

が成り立つ. これを用いて, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{C}$ 上の群構造を

$$\begin{aligned} &(x_1 + \sqrt{-1}\alpha_1^{t_1} \alpha_1'^{t_2}, x_2 + \sqrt{-1}\alpha_2^{t_1} \alpha_2'^{t_2}, z) \cdot (x'_1 + \sqrt{-1}\alpha_1^{t'_1} \alpha_1'^{t'_2}, x'_2 + \sqrt{-1}\alpha_2^{t'_1} \alpha_2'^{t'_2}, z') \\ &= (\alpha_1^{t_1} \alpha_1'^{t_2} x'_1 + x_1 + \sqrt{-1}\alpha_1^{t_1+t'_1} \alpha_1'^{t_2+t'_2}, \alpha_2^{t_1} \alpha_2'^{t_2} x'_2 + x_2 + \sqrt{-1}\alpha_2^{t_1+t'_1} \alpha_2'^{t_2+t'_2}, \beta^{t_1} \beta'^{t_2} z' + z) \end{aligned}$$

と定義する. $(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{C}, \cdot)$ を行列表示すると,

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1^{t_1} \alpha_1^{t_2} & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & \alpha_2^{t_1} \alpha_2^{t_2} & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & \beta^{t_1} \beta^{t_2} & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\beta}^{t_1} \bar{\beta}^{t_2} & \bar{z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : t_i, x_i \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C} \right\}$$

となる. $\{\alpha_1, \alpha_2, \beta, \bar{\beta}\}$ と $\{\alpha'_1, \alpha'_2, \beta', \bar{\beta}'\}$ は, それぞれ

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値となっており, $B_1 B_2 = B_2 B_1$ を満たす. これより, G_2 上に格子群 Γ を構成することができる [19].

可解リー群 G_2 のリー環を $\mathfrak{g}_2$ とすると,

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_2 &= \text{span}\{A_1, A_2, X_1, X_2, Z_1, Z_2\} \\ [A_1, X_1] &= 2X_1, \quad [A_1, Z_1] = -Z_1 + c_1 Z_2, \quad [A_1, Z_2] = -Z_2 - c_1 Z_1 \\ [A_2, X_2] &= 2X_2, \quad [A_2, Z_1] = -Z_1 + c_2 Z_2, \quad [A_2, Z_2] = -Z_2 - c_2 Z_1 \end{aligned}$$

となる. 可解多様体 $\Gamma \backslash G_2$ 上の左不変な複素構造は, $JA_i = X_i (i = 1, 2)$, $JZ_1 = Z_2$ によって定義できる. また, 左不変な 1 次形式の基底として, 次の $\{\omega_1, \omega_2, x_1, x_2, z_1, z_2\}$ をとる:

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= 0, d\omega_2 = 0, \\ dx_1 &= -2\omega_1 \wedge x_1, \quad dx_2 = -2\omega_2 \wedge x_2, \\ dz_1 &= (\omega_1 + \omega_2) \wedge z_1 + (c_1 \omega_1 + c_2 \omega_2) \wedge z_2, \\ dz_2 &= (\omega_1 + \omega_2) \wedge z_2 - (c_1 \omega_1 + c_2 \omega_2) \wedge z_1. \end{aligned}$$

基本 2 次形式 Ω を

$$\Omega = -2(\omega_1 \wedge x_1 + \omega_2 \wedge x_2) - (\omega_1 \wedge x_2 + \omega_2 \wedge x_1) - z_1 \wedge z_2$$

とすると, (Ω, J) は, Lee 形式を $\omega_1 + \omega_2$ とする局所共形ケーラー構造となる. また, $\nabla(\omega_1 + \omega_2) \neq 0$ であることにも注意する.

可解多様体 $\Gamma \backslash G_2$ は 定理 5.2 の仮定を満たす. したがって, $\dim[\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2] = 4$ より, $(\Gamma \backslash G, J)$ は Vaisman 構造をもたない [10]. また, $\dim H_{DR}^1(\Gamma \backslash G_1) = 2$ であることから, $(\Gamma \backslash G, J)$ は Vaisman 構造をもたないことがわかる [22].

例 5.5. (井上曲面 S^+ ([20], [1])) 完全可解リー群 G_3 を

$$G_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -e^t y & e^{-t} x & z \\ 0 & e^t & 0 & x \\ 0 & 0 & e^{-t} & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : t, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

とする. 完全可解リー群 G_3 は格子群 Γ をもつ [14].

完全可解リー群 G_3 のリー環を $\mathfrak{g}_3$ とすると,

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_3 &= \text{span}\{A, X, Y, Z\} \\ [A, X] &= X, [A, Y] = -Y, [X, Y] = Z\end{aligned}$$

となる. 可解多様体 $\Gamma \backslash G_3$ 上の左不変な複素構造は, $JA = X, JZ = Y$ によって定義できる. また, 左不変な 1 次形式の基底として, 次の $\{\omega, x, y, z\}$ をとる:

$$\begin{aligned}d\omega &= 0, \\ dx &= -\omega \wedge x, \quad dy = \omega \wedge y, \\ dz &= -x \wedge y.\end{aligned}$$

基本 2 次形式 Ω を

$$\Omega = -\omega \wedge x - z \wedge y$$

とすると, (Ω, J) は, Lee 形式を ω とする局所共形ケーラー構造となる. また, $\nabla\omega \neq 0$ であることにも注意する.

命題 5.6. (cf. [2]) 可解多様体 $\Gamma \backslash G_3$ は Vaisman 構造をもたない.

Proof. 4 次元可解多様体の複素構造は, すべて左不変である [8]. また, 可解多様体 $\Gamma \backslash G_3$ は完全であるから, $H_{DR}^1(\Gamma \backslash G_3) \cong H^1(\mathfrak{g})$ が成り立つ [9]. したがって, 可解多様体 $\Gamma \backslash G_3$ 上の局所共形ケーラー構造は, 左不変なものを誘導する [2].

完全可解多様体 $\Gamma \backslash G_3$ が Vaisman 構造をもつと仮定する. そのリー環 $\mathfrak{g}_3$ は, $\text{span}\{A\} \ltimes \mathfrak{h}(1)$, 但し, $\mathfrak{h}(1)$ は 3 次元 Heisenberg リー環, であるが, 随伴表現 $\text{ad}(A)$ は自明でない. これは, 主定理に矛盾する. したがって, 完全可解多様体 $\Gamma \backslash G_3$ は Vaisman 構造をもたない. $\square$

なお, $\dim H_{DR}^1(\Gamma \backslash G_3) = 1$ であることに注意する.

参考文献

- [1] L. C. de Andrés, L. A. Cordero, M. Fernández and J. J. Mencía: Examples of four dimensional locally conformal Kähler manifolds, *Geom. Dedicata* **29** (1989), 227-233.
- [2] F. A. Belgun: On the metric structure of non-Kähler complex surfaces, *Math. Ann.* **317** (2000), 1-40.
- [3] L. A. Cordero, M. Fernández and M. de León: Compact locally conformal Kähler nilmanifolds, *Geom. Dedicata* **21** (1986), 187-192.
- [4] J. M. Dardie and A. Medina: Kähler Lie algebras and double extension, *J. Algebra* **185** (1996), no. 3, 774-795.

- [5] J. Dixmier: Cohomologie des algebres de Lie nilpotentes, Acta Sci. Math. Szeged **16** (1955), 246-250.
- [6] S. Dragomir and L. Ornea: *Locally conformal Kähler geometry*, Birkhäuser (1998).
- [7] K. Hasegawa: A note on compact solvmanifolds with Kähler structures, Osaka J. Math **43** (2006), 131-135.
- [8] —————: Complex and Kähler structures on compact solvmanifolds, J. Symplectic Geom. **3** (2005), 749-767.
- [9] A. Hattori : Spectral sequence in the de Rham cohomology of fibre bundles, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I . **8** (1960), 289-331.
- [10] H. Kasuya : Vaisman metrics on solvmanifolds and Oeljeklaus-Toma manifolds, Bull. Lond. Math. Soc. **45** (2013), no. 1, 15-26.
- [11] M. de León, B. López, J. C. Marrero and E. Padrón: On the computation of the Lichnerowicz-Jacobi cohomology, J. Geom. Phys. **44** (2003), no. 4, 507-522.
- [12] K. Nomizu: On the cohomology of homogeneous of nilpotent Lie groups, Ann. Math. **59** (1954), 531-538.
- [13] K. Oeljeklaus and M. Toma : Non-Kähler compact complex manifolds associated to number fields, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **55** (2005), no. 1, 161-171.
- [14] H. Sawai: A construction of lattices on certain solvable Lie groups, Topology Appl. **154** (2007), no. 18, 3125-3134.
- [15] —————: Locally conformal Kähler structures on compact nilmanifolds with left-invariant complex structures, Geom. Dedicata **125** (2007), 93-101.
- [16] —————: Locally conformal Kähler structures on compact solvmanifolds Osaka J. Math. **49** (2012), no. 4, 1087-1102.
- [17] —————: Vaisman structure on compact solvmanifolds, Geom. Dedicata **178** (2015), 389-404.
- [18] —————: Structure Theorem for Vaisman completely solvmanifolds, preprint.
- [19] —————: Example of the six-dimensional LCK solvmanifold, preprint.
- [20] F. Tricerri: Some examples of locally conformal Kähler manifolds, Rend. Sem. Math. Univ. Politec. Torino **40** (1982), no.1, 81-92.
- [21] I. Vaisman: Locally conformal Kähler manifolds with parallel Lee form, Rend. Mat. **12** (1979), 263-284.
- [22] —————: Generalized Hopf manifolds, Geom. Dedicata **13** (1982), no. 3, 231-255.