

Exponents for the number of high points of simple random walks in two dimensions

Izumi OKADA, Tokyo institute of Technology

1 研究の背景

ここでは、2次元 (整数格子) 上の単純ランダムウォーク (SRW) $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ の local time に関する極限定理を扱う。特に、2次元の favorite point (SRW の local time が他点と比べて極端に大きい点) と late point (SRW の到達時刻が極端に遅い点) という特異点に着目した。また、その拡張として favorite domain (他の領域と比べて SRW の local time が極端に大きい領域) にも着目している。この背景として、favorite point などについて、local time の様々な汎関数との対応関係が知られていることがある。もともと P.Erdős 氏ら ([8, 9, 10]) が2次元 SRW の local time の汎関数に関する多様な問題を提唱しており、この分野の第一人者である A.Dembo, Y.Peres, O.Zeitouni, J.Rosen 氏ら (以下四氏) により [1, 2, 4] など で解決されている。例えば [2, 4] では、local time の汎関数である「被覆時間 (整数トーラス上の全ての点を被覆し終える時間)」や「SRW の訪問点集合に被覆される円板の最大の半径」の長時間挙動に関する評価がされた。また一般的に、確率過程の様々な極限定理を得るために、その確率過程の高次モーメントの評価が重要であることが知られている。実際、四氏は「評価したい local time の汎関数の2次モーメント」と「favorite point や late point の2点間の相関関係」の対応を示すことで、[2, 4] では問題を解決している。従って、これらの特異点は local time の汎関数の極限定理と密接な関係を持つため、重要な研究対象と考えている。

2 先行結果

まず、local time に関する特異点を調べる動機として、Gaussian free field と local time との関係を知りたいということがある。これに関する結果として、Generalized second Ray-Knight theorem が Gaussian free field と local time を結びつけている。これは連続時間のランダムウォークに関する結果であるため、結果を述べるために、記号の準備をする。一般の有限グラフ G 上の reversible である連続時間のランダムウォーク $\{S_t\}_{t \geq 0}$ を考える。このとき、

total conductance (又は weight) $\{\lambda_x\}_{x \in G}$ ([11] の定義を参照) と、local time

$$\tilde{K}(t, x) := \lambda_x^{-1} \int_0^t 1_{\{S_l = x\}} dl$$

その逆時間

$$\tilde{\tau}_t := \inf\{s : \tilde{K}(s, 0) > t\}$$

を定める. また G の原点を適当に定める. $\{\phi(x)\}_{x \in G}$ を平均 0 で、covariance が $\text{Cov}(\phi(x), \phi(y)) = E^x[\tilde{K}(\tilde{\tau}_0, y)]$ を満たす Gaussian free field を考える. $\mathbf{P}$ を Gaussian free field に対する確率測度、 P を原点から出発するランダムウォークの確率測度とする.

Theorem 2.1 ([7] : The generalized second Ray-Knight theorem). $P \times \mathbf{P}$ の下での

$$\{\tilde{K}(\tilde{\tau}_t, x) + \frac{1}{2}\phi(x)^2\}_{x \in G}$$

の法則は、 $\mathbf{P}$ の下での

$$\{\frac{1}{2}(\phi(x) + \sqrt{2t})^2\}_{x \in G}$$

の法則と等しい.

ここから直ぐに、次の Corollary が得られる.

Corollary 2.1 ([7]).

$$\left\{ \frac{\tilde{K}(\tilde{\tau}_t, x) - t}{\sqrt{2t}} \right\}_{x \in G} \rightarrow \{\phi(x)\}_{x \in G} \quad (t \rightarrow \infty) \text{ in law.}$$

従って、これは local time $\tilde{K}(\tilde{\tau}_t, x)$ の中心極限定理が成立すること、さらには、中心極限定理の意味での $\tilde{K}(\tilde{\tau}_t, x)$ の収束先が対応する Gaussian free field になることを示している. さらに、[5, 6] では、Gaussian free field と cover time の強い関係性が示されている. ここで、一つの問題点を提案できる:

各時刻で Gaussian free field と local time の分布はどれ位近いのだろうか?

これを踏まえ、 $\mathbb{Z}^2$ 又は $\mathbb{Z}_n^2 (:= \mathbb{Z}^2 / n\mathbb{Z}^2)$ 上の離散時間の単純ランダムウォークの特異点と対応する Gaussian free field の特異点を調べることにした. ここでは、単純ランダムウォークの特異点の結果のみを紹介する. $\mathbb{Z}^2$ 上の単純ランダムウォークの性質を紹介するため、定義を与える. (ここから先は、 $\mathbb{Z}^2$ 又は $\mathbb{Z}_n^2$ の単純ランダムウォークのみを扱う.) 初めに、 $\{S_k\}_{k=0}^\infty$ を $\mathbb{Z}^2$ (又は $\mathbb{Z}_n^2$) の単純ランダムウォークとする. さらに、 $d(x, y)$ を $x, y \in \mathbb{Z}^2$ に対するユークリッド距離とする. また、 $D(x, r) := \{y \in \mathbb{Z}^d : d(x, y) \leq r\}$

とする. さらに、 $K(n, x)$ を時刻 n までの x への訪問回数 (local time) とする. すなわち、 $K(n, x) = \sum_{i=0}^n 1_{\{S_i=x\}}$ を満たす. また、 $D \subset \mathbb{Z}^d$ に対して、 $T_x := \inf\{m \geq 1 : S_m = x\}$ 、 $\tau_n := \inf\{m \geq 0 : S_m \in D(0, n)^c\}$ とする.

次に $\mathbb{Z}^2$ (又は $\mathbb{Z}_n^2$) の単純ランダムウォークの特異点に関する先行結果を紹介する. もともと四氏によって、[1] では次が示されていた: $\mathbb{Z}^2$ 上の SRW に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max_{x \in \mathbb{Z}^2} K(\tau_n, x)}{(\log n)^2} = \frac{4}{\pi} \quad a.s.$$

これに基づき、 $0 < \alpha < 1$ に対して、 α -favorite points の集合を次のように定義する:

$$\Psi_n(\alpha) := \left\{ x \in \mathbb{Z}^2 : K(\tau_n, x) \geq \frac{4\alpha}{\pi} (\log n)^2 \right\}.$$

さらに四氏によって、[3] では次が示されていた: $\mathbb{Z}_n^2$ ($:= \mathbb{Z}^2/n\mathbb{Z}^2$) 上の SRW に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max_{x \in \mathbb{Z}_n^2} T_x}{(n \log n)^2} = \frac{4}{\pi}.$$

これに基づき、 $0 < \alpha < 1$ に対して、 α -late points の集合を次のように定義する:

$$\mathcal{L}_n(\alpha) := \left\{ x \in \mathbb{Z}_n^2 : \frac{T_x}{(n \log n)^2} \geq \frac{4\alpha}{\pi} \right\}.$$

これを踏まえて、 $0 < \alpha < 1$ に対して、favorite domain の集合を次のように定義する:

$$\mathcal{R}_{j,n}(\alpha) := \left\{ (x_1, \dots, x_j) \in (\mathbb{Z}^2)^j : \sum_{i=1}^j K(\tau_n, x_i) \geq \frac{4\alpha j}{\pi} (\log n)^2 \right\}.$$

3 主定理

$\Psi_n(\alpha)$, $\mathcal{L}_n(\alpha)$, $\mathcal{R}_{j,n}(\alpha)$ に対して、以下の定理が得られた.

Theorem 3.1 (O. 2015). $0 < \alpha, \beta < 1$, $j \in \mathbb{N}$ に対して確率収束の意味で次が成立する:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\{(x_1, \dots, x_j) \in \Psi_n(\alpha)^j : d(x_i, x_l) \leq n^\beta \text{ for any } 1 \leq i, l \leq j\}|}{\log n} = \rho_j(\alpha, \beta) \\ & := \begin{cases} 2 + 2(j-1)\beta - \frac{2j\alpha}{(1-\beta)(j-1)+1} & (\beta \leq \frac{j}{j-1}(1-\sqrt{\alpha})) \\ 4j(1-\sqrt{\alpha}) - 2j(1-\sqrt{\alpha})^2/\beta & (\beta \geq \frac{j}{j-1}(1-\sqrt{\alpha})). \end{cases} \end{aligned}$$

Theorem 3.2 (O. 2015). $0 < \alpha, \beta < 1$, $j \in \mathbb{N}$ に対して次が成立する：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log E[|\{(x_1, \dots, x_j) \in \Psi_n(\alpha)^j : d(x_i, x_l) \leq n^\beta \text{ for any } 1 \leq i, l \leq j\}|]}{\log n} = \hat{\rho}_j(\alpha, \beta)$$

$$:= \begin{cases} 2 + 2(j-1)\beta - \frac{2j\alpha}{(1-\beta)(j-1)+1} & (\beta \leq 1 + \frac{1-\sqrt{j\alpha}}{j-1}) \\ 2(j+1-2\sqrt{j\alpha}) & (\beta \geq 1 + \frac{1-\sqrt{j\alpha}}{j-1}). \end{cases}$$

さらに、 $\Psi_n(\alpha)$ を $\mathcal{L}_n(\alpha)$ に変えたときも同様の評価が得られた。

Theorem 3.3 (O. 2016). $0 < \alpha, \beta < 1$, $j \in \mathbb{N}$ に対して、次が成立する：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log E[|\{(x_1, \dots, x_j) \in \mathcal{R}_{j,n}(\alpha) : d(x_i, x_l) \leq n^\beta \text{ for any } 1 \leq i, l \leq j\}|]}{\log n} = \hat{\rho}_j(\alpha, \beta).$$

この補題として、超距離行列が $\Psi_n(\alpha)$, $\mathcal{L}_n(\alpha)$, $\mathcal{R}_{j,n}(\alpha)$ に関する評価と対応していることを示された。

4 証明

次が直ちに成立にすることに着目したい：

$$\begin{aligned} & E[|\{(x_1, \dots, x_j) \in \Psi_n(\alpha)^j : d(x_i, x_l) \leq n^\beta \text{ for any } 1 \leq i, l \leq j\}|] \\ &= \sum_{\substack{d(x_i, x_l) \leq n^\beta, \\ x_i \in \mathbb{Z}_n^2, 1 \leq i, l \leq j}} P((x_1, \dots, x_j) \in \Psi_n(\alpha)^j) \\ & E[|\{(x_1, \dots, x_j) \in \mathcal{R}_{j,n}(\alpha) : d(x_i, x_l) \leq n^\beta \text{ for any } 1 \leq i, l \leq j\}|] \\ &= \sum_{\substack{d(x_i, x_l) \leq n^\beta, \\ x_i \in \mathbb{Z}_n^2, 1 \leq i, l \leq j}} P((x_1, \dots, x_j) \in \mathcal{R}_{j,n}(\alpha)). \end{aligned} \tag{1}$$

従って、大雑把に言うと、 $x_1, \dots, x_j \in D(0, n/3)$ に対して一様に次を示した：

$$\begin{aligned} P((x_1, \dots, x_j) \in \Psi_n(\alpha)^j) &\approx \exp \left(-2\alpha \log n \chi \left(\left(\frac{\pi G_n(x_i, x_l)}{2 \log n} \right)_{1 \leq i, l \leq j} \right) \right), \\ P((x_1, \dots, x_j) \in \mathcal{R}_{j,n}(\alpha)) &\approx \exp \left(-2\alpha j \log n \lambda^{-1} \left(\left(\frac{\pi G_n(x_i, x_l)}{2 \log n} \right)_{1 \leq i, l \leq j} \right) \right). \end{aligned} \tag{2}$$

ただし、 $a_n \approx b_n$ とは、 $\log a_n / \log b_n \rightarrow 1$ as $n \rightarrow \infty$ を意味し、任意の正則行列に対して、 $\chi(A)$ は A^{-1} の全ての成分の和とし、さらに $\lambda(A)$ を A の最大固有値とする。さらに、 $\Psi_n(\alpha)$ を $\mathcal{L}_n(\alpha)$ に変えたときも同様の評価が得られた。

(2) を示すため、単純ランダムウォークの二つの small circle と large circle の crossing number を条件付けた上で、 $D(0, n)$ 上の点である $x_1, \dots, x_j$ が favorite point、late point あるいは favorite domain になる確率を評価した。(Figure 1 は、 $j = 5$ のときの例である。) この評価が単純ランダムウォーク

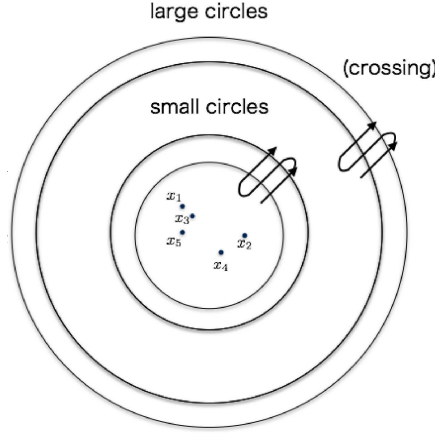


Figure 1:

の多点配置への到達確率と対応することを示した上で、さらに到達確率を評価することで (2) を得た。

次に (2) を評価した後の、(1) の右辺のさらなる評価の手法について紹介する。簡単な計算から、 $n^{o(1)}$ の誤差で超距離空間に収束する $(x_1^{(n)}, \dots, x_j^{(n)})$ に対して、(2) の右辺を足し合わせると、(1) の右辺と一致することが得られる。ここで、 $n^{o(1)}$ の誤差で超距離空間に収束する $(x_1^{(n)}, \dots, x_j^{(n)})$ とは、次を満たすものである：任意の $i \neq l, l \neq p, i \neq p$ を満たす $1 \leq i, l, p \leq j$ に対して、

$$d(x_i^{(n)}, x_l^{(n)}) \leq \max\{d(x_l^{(n)}, x_p^{(n)})n^{o(1)}, d(x_p^{(n)}, x_i^{(n)})n^{o(1)}\}. \quad (3)$$

従って、 $x_1^{(n)}, \dots, x_j^{(n)}$ の点配置はある入れ子構造を持つものに対応する (Figure 2 は、 $j = 5$ のときの例である)。例えば、 $j = 3$ に対して、(1) を評価するためには、等距離配置 (正三角形のような配置) と、ある 1 点のみが他の 2 点と十分離れた配置 (二等辺三角形のような配置) である。 $j = 3$ に対して、等

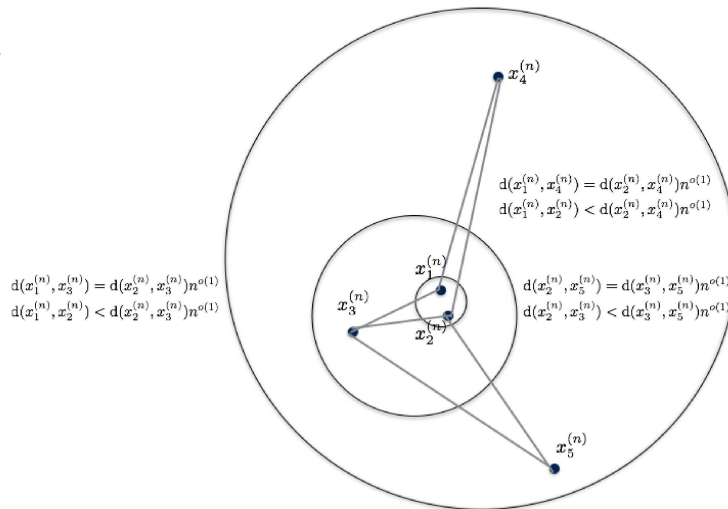


Figure 2:

距離配置 $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)})$ とは、次を満たす配置である： $n \rightarrow \infty$ のとき、

$$d(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \approx d(x_2^{(n)}, x_3^{(n)}) \approx d(x_3^{(n)}, x_1^{(n)}).$$

従ってこれに対応して、(2) の二つの式の右边を評価するため、超距離行列を考える必要があった。超距離行列は、これまで沢山の性質が知られていたが、超距離行列の逆行列の全ての成分和、あるいは最大固有値に関する新しい性質を解明することによって、主定理を得た。

References

- [1] Dembo, A. , Peres, Y. , Rosen, J. and Zeitouni, O. (2001). Thick points for planar Brownian motion and the Erdős-Taylor conjecture on random walk. Acta Math., **186**, 239–270.
- [2] Dembo, A. , Peres, Y., Rosen, J. and Zeitouni, O. (2004). Cover times for Brownian motion and random walks in two dimensions. Ann. Math., **160**, 433–464.
- [3] Dembo, A. , Peres, Y. , Rosen, J. and Zeitouni, O. (2006). Late points for random walks in two dimensions. Ann. Probab., **34**, 219–263.

- [4] Dembo, A. , Peres, Y. and Rosen, J. (2007). How large a disc is covered by a random walk in n steps? *Ann. Probab.*, **35**, 577–601.
- [5] Ding, J. (2014). Asymptotics of cover times via Gaussian free fields: Bounded-degree graphs and general trees. *Ann. Probab.*, **42**, 464–496.
- [6] Ding, J. , Lee, J. R. and Peres, Y. (2012). Cover times, blanket times, and majorizing measures. *Ann. of Math.*, **175**, 1409–1471.
- [7] Eisenbaum, N. , Kaspi, H. , Marcus, M. B. , Rosen, J. , and Shi, Z. (2000). A Ray-Knight theorem for symmetric Markov processes. *Ann. Probab.*, **28**, 1781–1796.
- [8] Erdős, P. and Taylor, S. J. (1960). Some problems concerning the structure of random walk paths. *Acta Sci. Hung.*, **11**, 137–162.
- [9] Erdős, P. and Révész, P. (1984). On the favourite points of a random walk. *Mathematical Structures Computational Mathematics Mathematical Modelling*, **2**, 152–157. Sofia.
- [10] Erdős, P. and Révész, P. (1987). Problems and results on random walks. In: *Mathematical Statistics and Probability* (P. Bauer et al., eds.), *Proceedings of the 6th Pannonian Symposium*, Volume **B**, 59–65.
- [11] Sznitman , A. S. (2012). *Topics in Occupation Times and Gaussian Free Fields*. . *Lectures in Advanced Mathematics*, EMS, Zurich.