

Orbifolds と 微分方程式

九州大学理学部 吉田正章

Masaaki YOSHIDA

先ず例の観察から始めよう。 X を複素射影直線 $\mathbb{CP}_1$ とする。 その上の一点 x で $b \in \{2, 3, \dots, \infty\}$ 位の分岐をする X の cover はあるだろうか。 あるはずがない。 なぜなら $X - \{x\}$ は単連結であるからである。 では X 上の二点 x_1, x_2 で各々 b_1, b_2 位の分岐をする X の cover はあるだろうか。 今から後、 b とか b_j とか書くといつもそれは $2, 3, \dots, \infty$ なる数を表わすとする。 さて、 x_1 の回りを廻る道はずるずるっと変型すると x_2 を廻る道になるから b_1 と b_2 が異れば、その様な cover はない。 $b_1 = b_2 = b$ ならばその様な cover はある。 もし b が有限なら cover は $\mathbb{CP}_1 \ni z \mapsto x = z^b \in \mathbb{CP}_1$ で与えられ、もし $b = \infty$ なら $\mathbb{C} \ni z \mapsto x = e^z \in \mathbb{CP}_1 - \{0, \infty\}$ で与えられる。 ここで一般性を失うことなく $x_1 = 0, x_2 = \infty$ とした。 ところで、多様体 X と分岐点と分岐指数を合

せたものを X 上の orbifold という。与えられた分岐を
 実現する cover が存在すれば、その orbifold は uniformizable
 と言い、cover を a uniformization という。A uniform-
 ization から orbifold への自然な写像を射影と言い、そ
 の多価逆写像を developing map という。上の例では、
 $b < \infty$ なら developing map は $z = x^{1/b}$ であり、 $b = \infty$
 なら $z = \log x$ である。さて次に X 上の三点 x_1 ,
 x_2, x_3 で各々 b_1, b_2, b_3 位の分岐をする cover はあるか
 を問題にしよう。この場合はいつでも存在する。しかも
 たくさん存在する。その中で一番大きな cover がありそれ
 を the universal uniformization という。これは単連結な
 uniformization として特徴付けられる。以後 uniformization
 としては universal なもののみを取扱う。さてこの三点分
 岐のとき、developing map は何であろうか。答は古典的に
 よく知られている。今一般性を失うことなく $x_1 = 0, x_2 = 1$,
 $x_3 = \infty$ として、developing map ϕ はある超幾何微分方
 程式と呼ばれる X 上の $\{0, 1, \infty\}$ を確定特異点にもつ
 線型二階の常微分方程式の線型独立な解二つの比として表わ
 される。このように orbifold X 上の線型微分方程式で
 解が developing map ϕ を与えるものを uniformizing
DE (differential equation) という。次に X 上の k ($k \geq 4$)

ヶの点 $x_1, \dots, x_k$ で各々 $b_1, \dots, b_k$ 位の分岐をする cover であるが、これもいつも存在する。しかし developing map を与える DE は知られてない。というよりも, unif. DE が一意に存在することは分っているのだが、どうしても決め方が分らない係数があるのである。この係数のことを人は 了クセサリパラメータ と呼び、それを決定する問題を Poincaré の問題 という。この問題が近日中に解ける見込みは無い。

今までの観察をふりかえると、 $k=1$ はだめ、 $k=2$ は自明、 $k=3$ は超幾何、そして $k \geq 4$ は困難ということになる。即ち orbifolds の developing maps として、超幾何函数という特殊函数が、自明な場と困難な場合の間に出て来たと考えられる。この考えを、 $X = \mathbb{CP}_2$ として適用してみよう。面白い函数や微分方程式が見つかるかもしれない。 $\mathbb{CP}_1$ 上の点に対応して、今度は X 上の曲線で分岐する cover を考えることになる。 $\mathbb{CP}$ の場合と同様に だめな場合、自明な場合 があり、最初に出合う面白い場合は、以下の様な六本の直線である。 $xy z (x-y)(y-z)(z-x) = 0$ この六本に $b_1, \dots, b_6$ なる数を与えて、cover は存在するだろうか。加藤十吉氏の三年程前の定理によれば、それはいつも存在する。ではその univ. uniformization M_1 は何であろうか。単連結リーマン面は三種類しかなく分っているが、

単連結二次元多様体について我々は何も知らない。ただ対称空間 P^2 , C^2 , B_2 (2次元超球) と $H \times H$ (上半平面二つの直積) だけは分っている, と言ってよいだろう。さて, $b_1, \dots, b_6$ を適当に取ると univ. unif. M が上に掲げた対称空間になることがある。有名なのは M が B_2 になる場合で 27 通りの b_j の取り方があり, それらは, Picard-寺田-Mostow-Deligne (PTMD)-orbifolds と言われる。これらの unif. DE はこれも古くから知られている Appell の超幾何微分方程式 (F_1) と言われるものになっている。ところで, 一変数の場合と同じように, この場合 (上記の六本の直線) 以外は, すべて accessory par. の困難に出会うのだろうか。大方の予想に反して, 実はそうではないのだ。一変数の場合の最大の難所 acc. par. は二変数以上の場合は本質的に消え去るのだ。それはリー群 $SL(2, R)$ の離散分部群のみに rigidity が成り立たない^{言う}理由による。変数をふやすと, 多くのものは複雑になってゆくが, このようにやさしくなることもあるという訳である。では, 別の面白い orbifolds を見つけて, unif. DE を計算してみよう。univ. unif. M が B_2 になる場合はここ二三年で数々見つけた。Hirzebruch と彼の学生 T. Höfer, B. Hunt による結果は, 以下の通り。

分岐図型名 : Icosahedral , Klein , Hesse , extended Hesse , Valentiner , F_4 . いずれも unitary reflection group の鏡映面から定義さる. (同名の) 数ヶ月前に見つかった F_4 をのぞいては, unif. DE が分っている. 図型に群が働いているので, 群不変な型で簡単な式で書ける. これらは, 古典的に知られた DE ではないようである. univ. unif. M が $H \times H$ になる場合も面白いのであるが, ここでは省略.

文献

T. Sasaki , M. Yoshida : 二変数階数四の微分方程式
(仮題) 準備中.

M. Yoshida : Orbifold-uniformizing DE III. Math. Ann. 印刷中. (仮題)

M. Yoshida : Fuchsian DE. [✓] Lec. Note , Vieweg Verlag 準備中.