

土石流の構成則に関する研究

江頭 進治・芦田 和男・矢島 啓・高濱淳一郎

CONSTITUTIVE EQUATIONS OF DEBRIS FLOW

By *Shinji EGASHIRA, Kazuo ASHIDA,*
Hiroshi YAJIMA and Junichiro TAKAHAMA

Synopsis

Critical reviews on the studies for grain flows or debris flows are made from a viewpoint of continuum mechanics, which are expected to be an indicator for future researches on debris flows.

The dissipation function for the flow of solid particle and fluid mixture is deduced by formulating the energy consumptions due to the three mechanisms; the particle to particle displacements, the inelastic collisions of the particle to particle and the turbulence generation within the pore fluid. The shear stress, which is called dissipative stress, is directly obtained from the dissipation function. The isotropic pressure, which depends on the pressure of pore water, static concentration of solid particle and repulsive dynamic stress, is formulated. Formulas of velocity and particle concentration distributions are obtained from applying these stress relations to the conservation equation of linear momentum. The theoretical predictions are compared with flume tests performed by employing mixtures of sand particles and water as well as of glass beads and water.

1. 緒 言

土石流は水と石礫との混合物の流れであって、その応力構造はニュートン流体とは本質的に異なっている。そのため、土石流の流動則あるいは構成関係式を合理的に導くのは困難を極めている。

土石流の応力構造に関する理解を深めるためには、一般の固体粒子群の流れ（粒子流）に関する知見が不可欠であって、土石流研究もそれを足掛りとして進められている。ここで、粒子流に関する研究を概括しておこう。

Bagnold¹⁾ は、ニュートン流体と中立固体粒子との混合物を用いた実験によって応力とひずみ速度の関係を調べ、応力には粘性領域と慣性領域とが存在することを明らかにした。彼は、さらに独自の理論解析を行い、各領域における構成則を導いている。これらのうち慣性領域におこるものを示せば、

$$p = f_n(c, \sigma, d) (du/dz)^2$$

$$\tau = p \tan \alpha$$

のようである。ここに、 p は圧力、 τ はせん断応力、 c は粒子体積濃度、 σ は粒子密度、 d は粒子径、 α は粒子の衝突角である。Bagnold は、上式の誘導に当たって、粒子間には摩擦のない完全弾性衝突を想定しており、彼のモデルにおいてせん断力が発生するのは極めて不自然である。これは、応力に関する検査面あるいは control volume の考え方に基本的な誤りがあるためである。

Bagnold の研究、とくに彼の実験は、その後の粒子流研究に大きな影響を及ぼしている。これらの研究を分類すれば、おおよそ三つのグループに分けられる。すなわち、

- (A) 連続体の原理をあまり意識せず、粒子間の衝突面あるいは接触面に作用する力を詳細に調べる方法。
- (B) 実験あるいは経験的に知られた事実に一致するように応力モデルのパラメータを決定していく方法。
- (C) 連続体力学の原理に則して構成式を決定する方法。

(A) には、椿・橋本・末次²⁾、Ackermann・Shen^{3),4)} など多数の研究がある。これらの研究には、導かれた応力テンソルに不合理な点が含まれていたり、あるいは、粒子間摩擦がなく完全弾性衝突であってもせん断力が発生するなどの欠陥がある。この種の研究には、少なからずこういった不合理な点がみられるが、これは、Bagnold が起こしている誤りに通ずるものである。

(B) の方法は、予め応力モデルを想定しておき、それに含まれるパラメータを種々変えることによって現象を説明しようとするものである。例えば、Chen⁵⁾、Shibata・Mei⁶⁾ の研究など、多数の研究があるが、現象の本質にせまるような成果は得られていない。

(C) の方法は、粒状体に対して連続体力学の原理を適用して構成関係式を導こうとする立場であって、粒子流研究の中心をなしている。この方法には、エネルギー方程式の導入過程の違いによって二つの流れがある。一つは、上述の (B) の方法に類似したものであって、Goodman・Cowin の研究⁷⁾ がその端緒である。この研究では、基礎式として質量および運動量保存則を用いるが、運動量保存則を支配する応力テンソルのうちの保存カテンソル（非圧縮性の場合には等方応力）を説明するため、粒子濃度分布を規定する平衡応力の概念を導入している。ところが、散逸力テンソルについては、ニュートン流体モデルに帰着している。そのため、この段階においては、粒子流の本質が見のがされている。この方法は、その後 Savage らのグループによって受け継がれる。Savage⁸⁾ は、Goodman・Cowin の保存力テンソルと散逸力テンソルについて考察を行い、前者は濃度勾配に依存するものとし、後者については Bagnold の実験に一致するようにこれを定めた。しかし、粒状体が流動を始めると、保存力テンソルはなくなるものと考えている。その後、Savage は Jeffrey⁹⁾、Jenkins¹⁰⁾、Sayed¹¹⁾ らとともに研究を進めているが、これらの研究ではいずれも衝突に伴う粒子変動速度と応力との関係を把握することに努力が払われている。しかしながら、Savage・Jeffrey⁹⁾ の研究に見られるように、粒子衝突がエネルギー散逸の起こらないような場 (smooth, hard, elastic shears) で議論されているため、これらによって粒子流の応力構造の理解が深められているとは言い難い。

(C) におけるもう一つの研究の流れは、応力テンソルを保存力テンソルと散逸力テンソルに分けて、これらをエネルギー方程式に基づいて議論しようとするものである。これは、control volume の内部におけるエネルギー収支によって応力が決定されると考えている点において連続体の原理に忠実であって、大きな可能性を秘めている。その代表的なものとして、金谷¹²⁾ や宮本¹³⁾ の研究が挙げられる。

金谷¹²⁾ は、固気混相流を対象として、これを非圧縮性の領域と圧縮性の領域に分けて取り扱った。ここで、保存力テンソル（圧力）は、非圧縮性領域において粒子接点反力からなり、圧縮性領域においては粒子変動速度の運動エネルギーと関係づけて、これらを定式化した。さらに、粒子の接触や衝突時における粒子間摩擦を考え、仮想仕事の原理を適用してエネルギー散逸関数を導き、これに基づいて散逸応力テンソルを導いている。これによれば、simple shear flow におけるせん断応力は、非圧縮性の領域においてひずみ速度に依存せず、圧縮性の領域でひずみ速度の二乗に比例する。

宮本¹³⁾ は、固液混相流を対象として次のように議論してある。粒子衝突の前後において保存される運動エネルギーが保存力（圧力）を構成するものとし、一方、衝突時に失われる運動エネルギーが散逸力になるものとしてエネルギー散逸関数を導き、散逸応力（せん断応力）を定式化した。ただし、この研究において粒子と流体との相互作用によるエネルギー散逸は反発係数の中に含まれている。

上述の二つの研究は、連続体におけるせん断応力の発生機構を合理的に扱ったものであり、今後の土石流研究に対する重要な示唆を与えるものと思われる。

粒状体の流れ、あるいは土石流に関する基礎研究は上述のようであるが、著者らも崩壊土砂の運動と土石流を統一的に説明するため、砂礫と水の混合物の流れについて研究を進めている。その中で、保存力は粒子濃度分布に依存し、散逸応力は粒子間摩擦と間隙水の乱れに依存するものとして流動則を導いている。これは、実用的にはほぼ問題のない段階にある。しかしながら、このモデルにおいては粒子衝突によるエネルギー散逸を間隙水の乱れの中を含めて評価している。そのため、この考え方では粒子濃度の垂直分布が重要な意味をもつ場合や、掃流砂と土石流との遷移現象を扱うことが難しい。

本研究は、上述のような反省のもとに行うものであって、とくに、土石流のエネルギー散逸に関して本質的と思われる三つの現象を考慮して次のように進めている。まず、粒子間の摩擦、粒子の非弾性衝突および粒子間の間隙水の乱れに伴うエネルギー散逸を評価し、それに基づいて応力の構造を明らかにする。ついで、流速分布則および濃度の垂直分布則を導く。さらに、これらの分布則と粒径の様な砂およびビーズを用いた土石流実験の結果と比較検討する。

2. エネルギー散逸と応力の構造

2.1 エネルギー散逸関数と散逸応力

非圧縮性連続体の質量および運動量保存則は、

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = F_i - \frac{1}{\rho_m} \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{1}{\rho_m} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad \dots\dots\dots (2)$$

のようである。ここに、 ρ_m は混合物の密度、 F_i は body force、 p は等方圧力、 τ_{ij} は応力テンソルである。エネルギー方程式には、種々の表現方法があるが、ここでは力学的（機械的）なエネルギーを対象にすれば十分であると考えている。したがって、エネルギー方程式は、control volume に対して面力と外力のなす仕事からエネルギー散逸を差し引いたものに運動エネルギーの変化が等しいとして与えられる。

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \rho F_i u_i - \frac{\partial p u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij} u_j}{\partial x_j} - \Phi \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $k = 1/2 \cdot \rho_m u_i u_i$ 、 Φ は単位時間・単位体積当たりのエネルギー散逸量であり、ここでは散逸関数と呼ぶ。ちなみに、弾性体では Φ はひずみエネルギーに相当する。ここで式（3）を展開して、式（2）を適用すれば次式を得る。

$$\Phi = -p \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \dots\dots\dots (4)$$

上式もエネルギー方程式の表現の一つである。式（4）の右辺第一項は Dilatancy によるエネルギー散逸を意味するが、ここでは、非圧縮性（式（1））を仮定しているから、この項は 0 となり、 Φ は次のようになる。

$$\Phi = \tau_{ij} \partial u_i / \partial x_j \quad \dots\dots\dots (5)$$

これより、 Φ が求められると散逸応力テンソル τ_{ij} が評価できる。

2.2 混合物の流れにおけるエネルギー散逸と応力

(1) エネルギー散逸

粒径一様の固体粒子と水との混合物を対象として、Fig. 1に示すような等流を考える。なぜならば、土石流のエネルギー散逸は、殆どが τ_{xz} に支配されていると考えても大きな間違いはないからである。さて、緒論で述べたように散逸関数 Φ は三つのプロセスに支配されているものと考えられる。すなわち、

$$\Phi = \Phi_s + \Phi_g + \Phi_f \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 Φ_s は粒子間摩擦による散逸であり、粒子が下方の粒子を乗り越えるときに損失するエネルギーであり、 Φ_g は粒子の非弾性衝突によって失われる運動エネルギーである。 Φ_f は間隙を占める水の乱れに伴う散逸である。なお、衝突時の摩擦損失は、一般に小さく、無視し得るオーダーであるが、これによる散逸機構は Φ_g と同じ形になる。したがって、これは Φ_g の中で評価されると見なしてもよい。

まず、 Φ_s について考察するが、そのためには圧力の構造が必要である。圧力は、間隙水圧 p_w 、静的な骨格応力 p_s および粒子衝突による圧力の p_d からなっている。すると、 Φ_s は圧力場 p_s の中で粒子の相対運動によって下方の粒子を乗り越えるときの散逸であるから、次のように表わされる。

$$\Phi_s = p_s \tan \phi_s N \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 ϕ_s は粒子間の摩擦角であり、 N は単位時間、単位体積当たり各粒子が下方の粒子を乗り越える回数である。Fig. 2に示すような粒子配列を考えれば、 $N = \Delta u / bd = \partial u / \partial z \cdot bd / bd = \partial u / \partial z$ (d は粒子径、 bd は粒子間距離)と表される。したがって、上式は次のようになる。

$$\Phi_s = p_s \tan \phi_s \partial u / \partial z \dots\dots\dots (8)$$

Φ_g については、宮本の研究¹³⁾を適用すれば、

$$\Phi_g = \frac{\pi}{12} (\sin^2 \alpha_i) (1 - e^2) \sigma \frac{d^2}{b} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^3 \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 α_i は粒子の衝突角、 e は反発係数、 σ は粒子の密度である。 b を粒子の体積濃度 c に変換して、これを上式に代入すれば、

$$\Phi_g = k_g (1 - e^2) \sigma d^2 c^{1/3} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^3 \dots\dots\dots (10)$$

ここに、

$$k_g = \frac{\pi}{12} \left(\frac{\pi}{6} \right)^{-1/3} \sin^2 \alpha_i \dots\dots\dots (11)$$

である。

Φ_f については次のように展開する。単位体積の水に関する運動エネルギーは $\rho (u_x'^2 + u_z'^2) / 2$ 、これが時間 T の間に散逸するものとし、局所等方位性を仮定すれば、 $u_x'^2 = u_z'^2$ であるから、

$$\Phi_f = \rho u_x'^2 / T \dots\dots\dots (12)$$

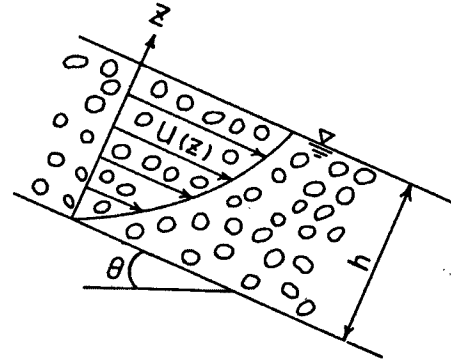


Fig. 1. Uniform debris flow and coordinate system.

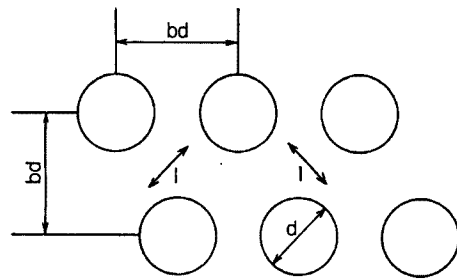


Fig. 2. Model of the granular-water mixture.

Fig. 2 に示すように間隙のスケールを l とすれば, $T=l/u'_x$ と書けるから, $\Phi_f=\rho u'_x{}^3/l$ となる。間隙 1 個の体積を $k_v l^3$ のように表わし, 混合物の単位体積当たり存在する水の体積 $(1-c)$ を考慮すれば, $\Phi_f=(1-c)/k_v l^3 \cdot (k_v l^3 \Phi_f)$ となる。したがって,

$$\Phi_f=\rho(1-c)l^2(\partial u/\partial z)^3 \dots\dots\dots (13)$$

上式の l は, 粒径 d , 濃度 c を用いれば, 次式で与えられる¹⁴⁾。

$$l=\sqrt{k_f}\left(\frac{1-c}{c}\right)^{\frac{1}{3}}d \dots\dots\dots (14)$$

ここに, $\sqrt{k_f}$ は係数であって, 粒子および間隙の形状係数比を用いれば $\sqrt{k_f}=(k_p/k_v)^{\frac{1}{3}}$ である。式 (13), (14) より

$$\Phi_f=\rho k_f d^2 \frac{(1-c)^{5/3}}{c^{2/3}} \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^3 \dots\dots\dots (15)$$

以上, 散逸関数 Φ_s , Φ_g および Φ_f が導かれた。

(2) 応 力

前述のように, 圧力 p は間隙水圧 p_w , 粒子骨格応力 p_s および衝突に伴う動的な圧力 p_d からなっている。

$$p=p_w+p_s+p_d \dots\dots\dots (16)$$

p_w は静水圧分布に従うものとすれば,

$$\partial p_w/\partial z=-\rho g \cos \theta \dots\dots\dots (17)$$

p_d は, 宮本の成果を用いてこれを少し変形して示せば, 次式のように与えられる。

$$p_d=k_g e^2 \alpha d^2 c^{\frac{1}{3}} (du/dz)^2 \dots\dots\dots (18)$$

p_s については, 厳密な議論は難しいが, 表現は少し異なるものの先の江頭・芦田らの研究¹⁴⁾において, 非速度依存型の応力を $(p_s+p_d) \tan \phi_k$ (ϕ_k は巨視的な動摩擦角) の形で表現したとき, ϕ_k がほぼ一定値をとることが知られており, このことを適用することにすれば, 近似的に次のような表現が可能である。

$$p_d/p_s=\alpha \dots\dots\dots (19)$$

ここに, α は z (垂直座標) に関して一定値をとるものとする。

ついで, せん断応力 $\tau (= \tau_{xz} = \tau_{zx})$ について調べる。前述の議論によって, エネルギー散逸 Φ_s , Φ_g , Φ_f が導かれた。式(8), (10), (15) より $\Phi=\Phi_s+\Phi_g+\Phi_f$ として, これらを示せば次のようである。

$$\begin{aligned} \Phi &= p_s \tan \phi_s \frac{\partial u}{\partial z} + k_g \sigma (1-e^2) d^2 c^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \\ &\quad + \rho k_f d^2 \frac{(1-c)^{5/3}}{c^{2/3}} \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^3 \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

式(5) より, Φ とせん断応力との関係は, $\tau=1/n \cdot \partial \Phi / \partial (\partial u / \partial z)$ (Φ が $\partial u / \partial z$ の n 次同次式のとき) のように表わされる。したがって, せん断応力は次のようになる。

$$\begin{aligned} \tau &= p_s \tan \phi_s + k_g \sigma (1-e^2) d^2 c^{\frac{1}{3}} (\partial u / \partial z)^2 \\ &\quad + \rho k_f d^2 \frac{(1-c)^{5/3}}{c^{2/3}} \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

上式の右辺第 1 項は, いわゆるクーロン力に対応し, 第 2 項は粒子衝突に, 第 3 項は間隙水の乱れに対応している。江頭・芦田¹⁴⁾らが用いてきた従来の表現に直せば, 上式の各項は,

$$\left. \begin{aligned} \tau_y &= p_s \tan \phi_s \\ \tau_g &= k_g \sigma (1-e^2) d^2 c^{\frac{1}{3}} (\partial u / \partial z)^2 \\ \tau_f &= \rho k_f d^2 \frac{(1-c)^{5/3}}{c^{2/3}} \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

のようである。 τ_y は yield stress であって, 粒状体の流れにおいては, τ_y に対する外力の過剰分が τ_f および τ_g によって消費されていることを意味している。

3. 流速分布則と濃度分布則

3.1 応力の釣り合い

式(2)は、 $i=1$ を x 軸、 $i=3$ を z 軸とすれば2次元等流状態において次式のようなになる。

$$g \sin \theta - \frac{1}{\rho_m} \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$g \cos \theta + \frac{1}{\rho_m} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここに、

$$\rho_m = \rho \{ (\sigma/\rho - 1)c + 1 \} \quad \dots\dots\dots (25)$$

式(25)を考慮して、前述の式(17)、(18)、(19)を式(24)に代入すれば、 z 方向の力の釣り合い条件式が次のように導かれる。

$$\frac{\partial p_s}{\partial z} = -\rho \frac{1}{1+\alpha} \left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) c g \cos \theta \quad \dots\dots\dots (26)$$

あるいは

$$\frac{\partial p_d}{\partial z} = -\rho \frac{\alpha}{1+\alpha} \left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) c g \cos \theta \quad \dots\dots\dots (27)$$

式(27)の p_d に式(18)を適用すれば、

$$k_g e^2 \alpha d^2 \frac{\partial}{\partial z} \left\{ c^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} = -\rho \frac{\alpha}{1+\alpha} \left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) c g \cos \theta \quad \dots\dots\dots (28)$$

一方、式(23)を任意の点から表面($z=h$)まで積分し、式(21)を適用すれば、

$$\begin{aligned} & \left\{ \sigma k_g (1-e^2) d^2 c^{\frac{1}{3}} + \rho k_d d^2 \frac{(1-c)^{5/3}}{c^{2/3}} \right\} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \\ &= \int_z^h \rho \left\{ \left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) c + 1 \right\} g \sin \theta \, dz - p_s \tan \phi_s \end{aligned}$$

となる。上式の p_s に式(26)を適用すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} & \left\{ k_g \frac{\sigma}{\rho} (1-e^2) d^2 c^{\frac{1}{3}} + k_d d^2 \frac{(1-c)^{5/3}}{c^{2/3}} \right\} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \\ &= \int_z^h \left[\left\{ \left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) c + 1 \right\} g \sin \theta - \left\{ \frac{1}{1+\alpha} \left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) c g \cos \theta \tan \phi_s \right\} \right] dz \quad \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

以上、式(28)は垂直方向(z 方向)の力の釣り合い条件であり、式(29)は x 方向のそれを示すものであって、これらより濃度および流速分布が定まる。

3.2 流速と濃度の分布則

(1) 流速分布に関する第1近似解

$u' = u/\sqrt{gh}$, $z' = z/h$ なる無次元量を用いて、式(29)を展開すれば次式を得る。

$$\frac{\partial u'}{\partial z'} = \frac{h}{d} \left\{ \frac{1}{f_f + f_g} \int_{z'}^1 (G - Y) dz' \right\}^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (30)$$

ここに

$$f_f = k_f \frac{(1-c)^{5/3}}{c^{2/3}} \quad f_g = k_g \frac{\sigma}{\rho} (1-e^2) c^{1/3}$$

$$G = \{(\sigma/\rho - 1)c + 1\} \sin \theta$$

$$Y = \frac{1}{1+\alpha} \left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) c \cos \theta \tan \phi$$

濃度が一定の場合には、上式は容易に解けて、流速分布は次のように求められる。

$$u' = 2/3 \cdot K \{1 - (1-z')^{3/2}\} \dots\dots\dots (31)$$

ここに、

$$K = \frac{h}{d} \left\{ \frac{G - Y}{f_f + f_g} \right\}^{1/2}$$

また、無次元平均流速 U' は次式で与えられる。

$$U' = 2/5 \cdot K \dots\dots\dots (32)$$

ここに、 $U' = U/\sqrt{gh}$ である。

(2) 濃度分布に関する第1近似解

式(28)の左辺の微分項を次のように展開する。

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ c^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial c^{1/3}}{\partial z} + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} c^{\frac{1}{3}}$$

式(29)を z で微分した結果を用いて上式の右辺第2項を消去し、若干の変形を行う。すると、濃度に関する微分方程式が次式のように導かれる。

$$\left(\frac{\partial u'}{\partial z'} \right)^2 \frac{\partial c}{\partial z'} = \frac{f_{n2}(c, \sigma/\rho, e, \theta)}{a_1 f_{n1}(c)} \dots\dots\dots (33)$$

ここに、

$$f_{n1}(c) = \{(1-c)/c\}^{5/3} + 5/3 \cdot \{(1-c)/c\}^{2/3}$$

$$f_{n2}(c) = G - Y - a_2(1-c)^{5/3} - a_3 c$$

$$a_1 = k_f \left(\frac{h}{d} \right)^{-2}$$

$$a_2 = \frac{k_f}{k_g} \frac{\alpha}{1+\alpha} \frac{\sigma/\rho - 1}{\sigma/\rho} \frac{1}{e^2} \cos \theta$$

$$a_3 = \frac{\alpha}{1+\alpha} \left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) \frac{1-e^2}{e^2} \cos \theta$$

式(37)および式(33)から明らかになるように、流速分布と濃度分布は相互に影響を及ぼしている。しかし、ある限られた条件においては、流速は第1近似解、すなわち式(31)によってかなりよく近似できることが分かっている。¹⁴⁾¹⁵⁾ これは、式(33)からも明らかのように、速度勾配に対する濃度勾配の影響は軽微であるが、逆に濃度分布は速度場の影響を顕著に受けることを意味している。このような条件にお

いては、濃度分布則が容易に求められる。すなわち、式(31)、(32)を用いれば、

$$\frac{\partial u'}{\partial z'} = K(1-z')^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2} \frac{U}{\sqrt{gh}} (1-z')^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (34)$$

であり、これを式(33)に代入して積分すれば、濃度分布式は次のように求められる。

$$z' = 1 - \exp \left[-\frac{25}{4} \frac{U^2}{gh} a_1 \int_{c_0}^{c(z')} \frac{f_{n1}(c)}{f_{n2}(c, \sigma/\rho, e, \theta)} dz' \right] \dots\dots\dots (35)$$

ここに、 c_0 は $z' = 0$ における粒子濃度である。

3.3 第1近似解の特性

(1) パラメータの同定

本モデルを適用するためには、粒子の摩擦角 ϕ 、反発係数 e 、動的圧力と静的圧力との比 α を決定することが必要である。また、このモデルが一般性をもつためには、 k_g および k_f が普遍的に定められることが条件となる。これらのうち、摩擦角 ϕ については、簡単な実験より求められる。後述するように、

$$\phi = \begin{cases} 38.5^\circ & \dots\dots\text{砂} \\ 26.5^\circ & \dots\dots\text{ビーズ} \end{cases}$$

程度の値が得られている。 e については、

$$e = \begin{cases} 0.7 \sim 0.85 \dots\dots\text{砂} \\ 0.85 \sim 0.95 \dots\dots\text{ビーズ} \end{cases}$$

程度の値が予想される。

α は次のように推定できる。いま、粒子濃度を静的な成分と動的な成分に分けると、

$$c = c_s(1 + c_d/c_s) = c_s(1 + \alpha)$$

のように書ける。さらに、巨視的な動摩擦角 ϕ_k は、 ϕ を使って次のように一意的に定まることが経験的に知られている。¹⁶⁾

$$\tan \phi_k \approx 0.8 \tan \phi$$

これは、近似的に $c_s(1 + \alpha) \tan \phi_k = c_s \tan \phi$ が成り立つことを意味する。これより、 α は次のように推定できる。

$$\alpha = \frac{\tan \phi}{\tan \phi_k} - 1 \approx 0.25$$

k_g は式(11)で定義されており、宮本¹³⁾によれば、粒子の衝突角は約 30° 程度である。したがって、 k_g はほぼ一定の値をとる。

$$k_g = 0.0828 \quad (\sqrt{k_g} = 0.288)$$

$\sqrt{k_f}$ は、粒子間隙における乱れのスケールを定めるパラメータである。これはオーダ1程度の値をとることが予想される。しかし、これを定める一般的な方法はなく、実験結果から逆算して決定する必要がある。これが一般的に定まるかどうかは本モデルの一般性を左右する重要な問題である。

Fig. 3の結果は、これまでに行ってきた土石流に関する実験データ^{14), 15)}および後述の今回行った実験データを用いて、式(32)より $\sqrt{k_f}$ を逆算したものである。ただし、水路勾配が 20° 以上で濃度がほぼ一様と見なせるデータが採用されている。計算に当たり、砂の摩擦角は実験から得られた値を採用し、反発係数は、砂の場合0.85、ビーズの場合には0.9とし、 α には0.25を用いている。図示の結果によれば、濃度の増加に伴い、 $\sqrt{k_f}$ は若干増加しているようであるが、次のようにほぼ一定値になっている。

$$\sqrt{k_f} = 0.5 \sim 1.0$$

ただし、式(14) から明らかなように、濃度の小さい所で $\sqrt{k_f}$ が一定値であるとすれば、 l が水深オーダーになり、不合理な面もでてくる。

(2) 第1近似解

流速分布に関する第1近似解は3/2乗則になる。これは、Bagnoldの実験以来多くの研究者が認めるところであり、ここではこれについての議論は省略し、粒子濃度の垂直分布について調べることにする。計算に用いる各パラメータの値は、 $\alpha = 0.25$, $\sqrt{k_f} = 0.5$, $\sqrt{k_g} = 0.288$ であり、混合物の単位幅流量は $q = 150 \text{ cm}^2/\text{s}$ である。

Fig. 4 (a) ~ (d) は、それぞれ粒子比重 σ/ρ 、路床勾配 θ 、粒子摩擦角 ϕ および粒子反発係数 e の濃度分布に対する影響をみたものである。これらの結果によれば、粒子比重や摩擦角が小さくなるとともに、また、勾配や反発係数が大きくなるに伴い、濃度は一様分布に近づくことがわかる。これは、次のような理由によるものである。所定の条件のもとにおける土石流の平衡状態は、供給エネルギー（重力）－変位エネルギー（yield stress）＝流動によるエネルギー散逸という図式のもとで達成されている。したがって、上述のパラメータが、流動によるエネルギー散逸を増加させるように変化するとき、速度勾配が大きくなって、濃度が一様化するのである。

(b) 図の $\theta = 20^\circ$ や (c) 図の $\tan \phi = 0.5$ の例にみられるように、 θ がさらに大きく、 ϕ が小さくなれば、濃度は表面に向かって増加する傾向も現われている。これは、供給エネルギーが相対的に増加すると、一様濃度分布ではこれを散逸できなくなり、速度勾配の大きい底面付近の粒子間隔を広げることによって、

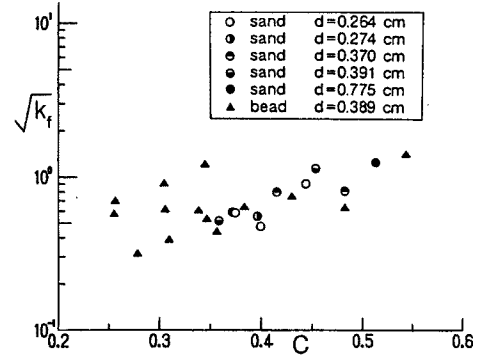


Fig. 3. k_f vs. particle concentration. Generality or uniqueness of the present model can be reserved so long as the coefficient, k_f , takes a constant.

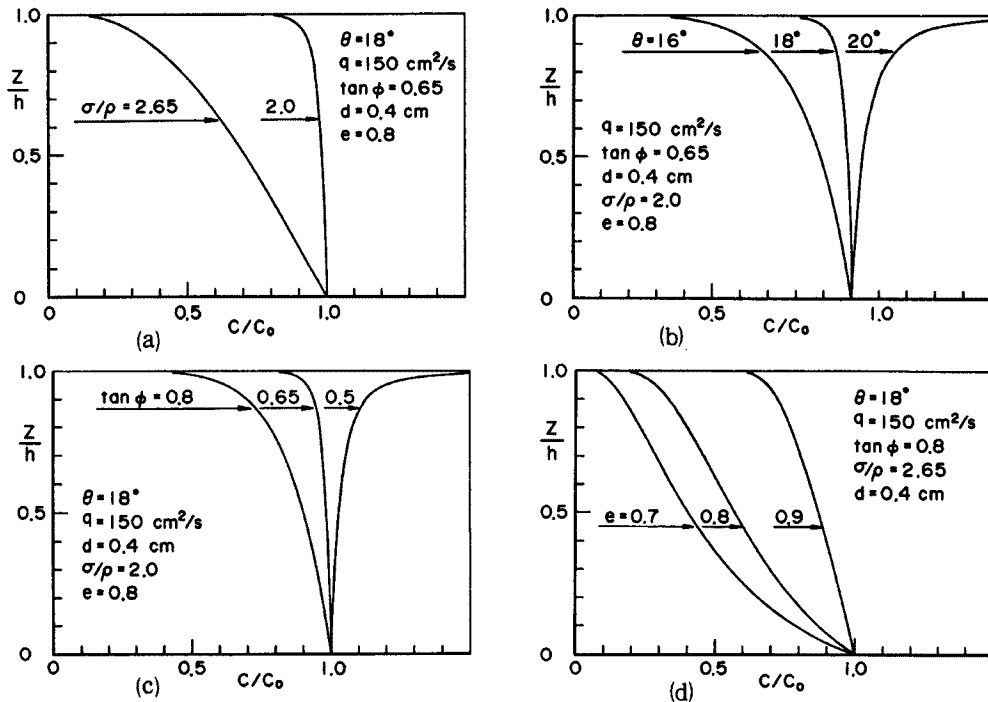


Fig. 4. Changes of the profile for particle concentration calculated with the first approximation of the present theory in terms of σ/ρ , θ , ϕ , and e .

間隙水の乱れによるエネルギー散逸を増加させるような方向に現象が向うからであると推察される。表面に向って濃度が増加する濃度の逆転現象については検討を要するが、後述のように、事実、ビーズを用いた実験によって、濃度の逆転現象がみられている。

4. 流速および濃度分布則の適用例

4.1 水路実験

実験には、幅 10.5 cm、長さ 4 m の片面ガラス張りの水路を用いた。水路床には、粒径 $d = 0.264$ cm の砂粒子が密にはりつけてあり、上流端にはホッパー型の給砂装置がある。下流端には、粒子濃度の垂直分布を測定するための装置を取りつけてある。これは、流れに対して層状のみ口をもったものであって、流動層を垂直方向に分割して採取できるようなものである。

上流端より水および粒子を定常的に供給して土石流を発生させ、高速ビデオカメラを用いて、側面より流動深や流速分布を測定し、下流端において濃度の垂直分布を測定した。ただし、濃度の垂直分布については、のみ口の厚さと粒子径との相対的な大きさに制約条件があり、多層にわたる測定は難しく、殆どが 2 層程度の測定に限定されている。

実験条件を Table 1 に示す。ここに、 θ は水路床勾配、 d は粒子の中央粒径で、ほぼ一様な粒子を用いている。 q_s は単位幅給砂量、 q_w は水の単位幅流量、 q_m は混合物の単位幅流量、 c は粒子体積濃度である。

砂の比重は 2.65、ガラスビーズの比重は 2.48 である。摩擦角 ϕ は、板に同一材料をはりつけ、その上に材料を一層程度ばらまき、これを傾斜させながら粒子が動き始めるときの角度をもって定義した。これによれば、多少のばらつきはあるものの、砂の場合には $\phi = 38.5^\circ$ であり、ガラスビーズは $\phi = 26.5^\circ$ 程度であった。反発係数については、測定していないが、以下の解析では、砂の場合 0.85、ガラスビーズは 0.9 としておく。

Table 2 は、参考のため、上述の土石流実験によって得られた断面平均粒子濃度、断面平均流速、流動深を示している。

Table 1. Conditions of flume tests

Run No.	θ (deg)	material	d (cm)	q_s (cm ² /s)	q_w (cm ² /s)	q_m (cm ² /s)	c
1-1-1	16.0	sand	0.411	45.1	91.2	136.3	0.331
1-2-1			0.358	38.8	121.6	160.4	0.242
1-2-2				49.2	108.9	158.1	0.311
1-3-1			0.264	47.1	110.4	157.5	0.299
1-4-1			0.193	47.5	97.0	144.5	0.329
1-4-2				69.6	100.6	170.2	0.409
1-4-3				61.2	83.5	144.7	0.423
1-5-1			0.090	34.6	79.7	114.3	0.303
1-5-2				41.9	73.9	115.8	0.362
1-6-1			0.389	39.9	103.8	143.7	0.278
1-6-2				58.0	109.7	167.7	0.346
1-6-3				55.2	88.9	144.1	0.383
2-2-1	18.0	sand	0.358	48.3	116.6	164.9	0.293
2-3-1			0.264	37.4	108.6	146.0	0.256
2-3-2				45.3	115.9	161.2	0.281
2-6-1		bead	0.389	36.9	82.6	119.5	0.309
2-6-2				40.2	72.8	113.0	0.356
2-6-3				49.0	65.0	114.0	0.430
3-3-1	22.0	sand	0.264	55.6	83.8	139.4	0.39

4.2 適用例

上述の実験結果と、式(30) および (33) を直接数値積分することによって得られる厳密解とを比較するとともに、式(31) および (35) による第1近似解とを比較しよう。計算に用いるパラメータの値は、 $\sqrt{k_f}=0.5$, $\sqrt{k_g}=0.288$, $\alpha=0.25$, $e=0.85$ (砂), 0.9 (ガラスビーズ), $\phi=38.5^\circ$ (砂), 26.5° (ガラスビーズ) としている。

Fig. 5 (a)～(d) には、砂粒子と水との混合物の流れに関する結果を比較している。(a), (b), (c) は粒径が 0.264 cm のもので、(d) は粒径 0.358 cm に関するものである。

(a) 図は、 $\theta=22^\circ$ に関するものの比較である。濃度に関する実験値はほぼ一様であって、流速および濃度に関する第1次近似解および厳密解ともに、流動深、流速分布および濃度分布に関する実験値によく一致している。(b), (c), (d) は、濃度分布が顕著に現われる場合のものである。これによれば、厳密解と実験値とは流動深、流速分布ともによく一致している。第1次近似解は、流動深が少し厚く、速度勾配が少し緩く、濃度勾配が大きくなるような傾向を示している。このように第1次近似解には、厳密性の意味では若干の問題がある。

Fig. 6 (a), (b), (c), (d) はビーズに関する例を示している。(a) と (b) は $\theta=18^\circ$ で粒子濃度の影響をみたもので、(c) と (d) は $\theta=16^\circ$ において粒子濃度の影響をみたものである。流動深および流速分布に関する実験値と第1次近似および厳密解との対応はよいが、濃度分布については、 $\theta=18^\circ$ のケースにおいて、いずれの計算値も濃度の逆転現象が強く現れている。

濃度の逆転現象は、前述したように理論的には現れても不合理ではないものと推察される。計算ではこれが少し強く現われている。濃度分布そのものが非線形性の強い機構で決定されるため、これについては計算法の問題も含めて、今後検討すべきである。

Table 2. Flume data for the flow depth, mean velocity and particle concentration by volume

Run No.	θ (deg)	material	d (cm)	c	v (cm/s)	h (cm)
1-1-1	16.0	sand	0.411	0.329	59.0	2.31
1-2-1			0.358	0.238	99.0	1.62
1-2-2				0.313	85.0	1.86
1-3-1			0.264	0.300	90.0	1.75
1-4-1			0.193	0.324	84.0	1.72
1-4-2				0.391	74.0	2.30
1-4-3				0.410	53.0	2.73
1-5-1		bead	0.090	0.297	90.0	1.27
1-5-2				0.361	81.0	1.43
1-6-1			0.389	0.262	85.0	1.69
1-6-2				0.307	81.0	2.07
1-6-3				0.396	71.0	2.03
2-2-1	18.0	sand	0.358	0.315	90.1	1.83
2-3-1			0.264	0.256	100.0	1.46
2-3-2				0.289	92.1	1.75
2-6-1		bead	0.389	0.291	75.0	1.59
2-6-2				0.326	72.0	1.57
2-6-3				0.400	63.0	1.81
3-3-1	22.0	sand	0.264	0.410	91.1	1.53

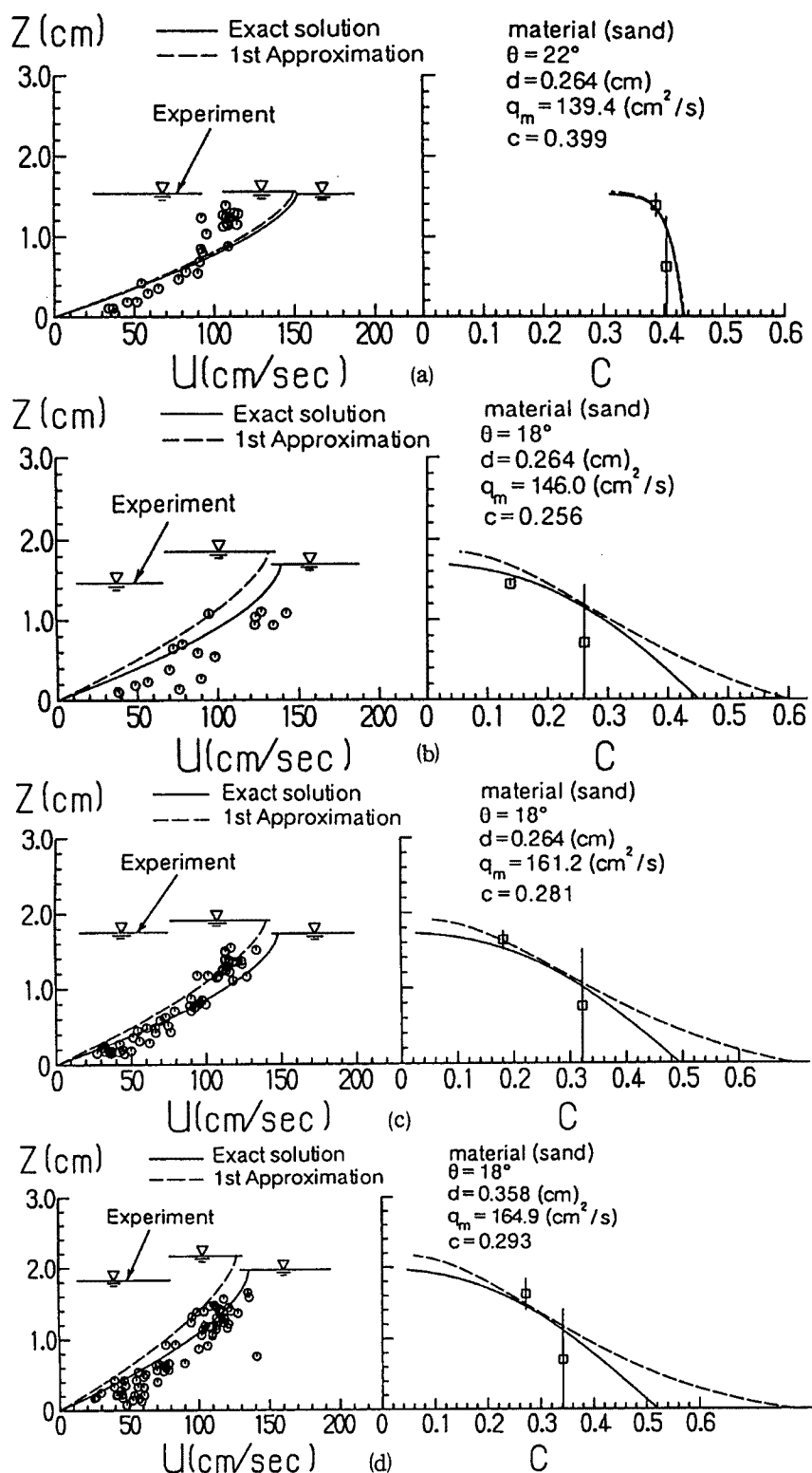


Fig. 5. Distributions for the velocity and particle concentration predicted with the present theory vs. data from flume tests for debris flow produced by sand particle-water mixtures.

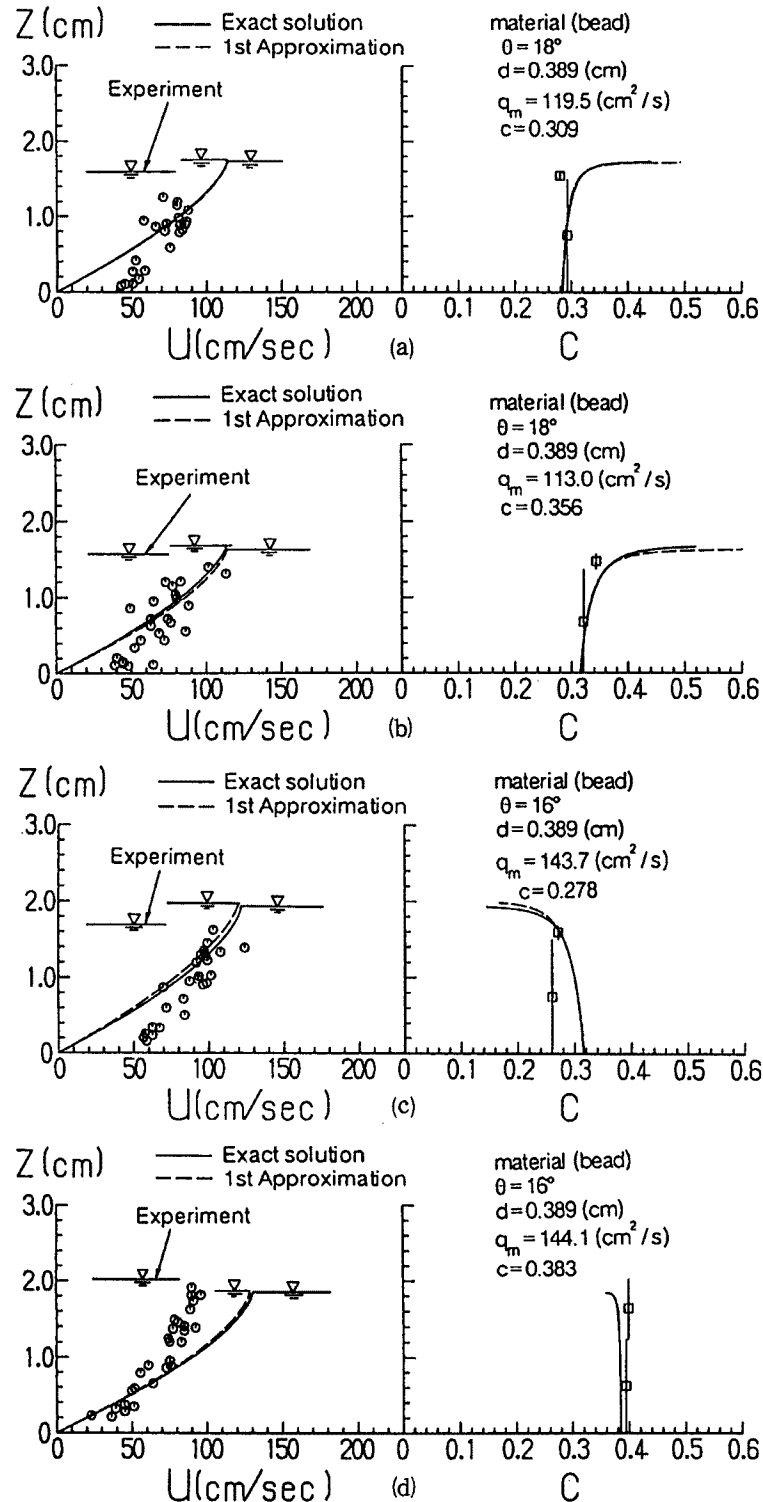


Fig. 6. Distributions for the velocity and particle concentration predicted with the present theory vs. data from flume tests for debris flow produced by glass beads-water mixtures.

5. 結 語

以上、本研究においては土石流研究の基礎となっている粒子流に関する基礎研究について批評を行うとともに、一様粒径からなる固体粒子と水との混合物の流れに関する構成則を導いた。さらに、構成則から流速および濃度分布則を導き、これらと実験結果とを比較検討した。本研究によって得られた主要な成果を要約すれば次のようである。

- (1) 連続体の原理に則して従来の研究を批評し、次のことを指摘した。Bagnold の研究をはじめ多くの研究において、応力の検査面、あるいはコントロールボリュームの扱いが剛体面の扱いになっており、理論的に不合理が生じていることを指摘するとともに、応力は内部の問題として扱う必要があることを力説した。これは、理解されているようで、そうでない場合の多い重要な問題でもある。
- (2) 混合物の流れ（土石流）におけるエネルギー散逸機構として、粒子の相対的な変位（上方の粒子が下方の粒子を乗り越えること）によるもの、粒子の非弾性衝突および間隙水（間隙流体）の乱れによるものを考えて、等流状態の散逸関数を導いた。
- (3) 散逸関数に基づいてせん断応力の構造を明らかにした。すなわち、せん断応力は粒子相対変位による降伏応力と非弾性衝突および間隙水の乱れによって生ずる流動応力（速度勾配の2乗）とからなることを示した。さらに、等方圧力は、濃度分布に依存する静的なものと粒子衝突に伴う動的なものからなることを示した。
- (4) 上述の応力が外力（body force）とつり合っているという条件に基づいて流速分布則ならびに濃度分布則を導いた。一般に、速度場と濃度（スカラー）場とは相互作用があり、陽の形では分布形は得られない。そこで、相互作用が小さい領域でこれらの分布則に関する第一次近似解を導いた。流速に関する第1次近似解は従来の3/2乗則に一致する。
- (5) 砂粒子およびガラスビーズと水との混合物による土石流実験の結果と流速・濃度分布則とを比較検討した。これより、厳密解および第1次近似解とも実験結果をよく説明することが分かった。ただし、ガラスビーズの場合には、勾配の大きいケースにおいて濃度の逆転現象が実際よりも強く現われている。

以上、本研究によって土石流に関する理解がかなり深められたものと思われるが、今後に究明すべき課題も残されている。濃度の逆転現象など、実際にあり得るのかどうかは、今後、実験と理論の両面にわたって十分に検討していかなければならない。また、実際の土石流は、大小さまざまな粒子からなっており、粒子の分級現象の問題も含めて、混合粒径を対象とした構成則の構築も今後の課題である。

本研究は、一部文部省科学研究費、重点領域研究自然災害（代表者 道上正規 鳥取大教授）の補助を受けて行っている。また、土石流の流動に関する力学的側面は砂防地すべりセンターの宮本邦明氏との長い間の議論によって理解を深めている。さらに、実験においては京都大学防災研究所吉田義則技官に御協力いただいている。以上、ここに記して感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) Bagnold, R. A.: Experiment on a Gravity-free Dispersion of Large Solid Spheres in Newtonian Fluid under Shear, Proc. Royal Society of London, A, vol. 225, 1954, pp. 49-63.
- 2) 椿東一郎・橋本晴行・末次忠司: 土石流における粒子間応力と流動特性, 土木学会論文集, No. 317, 1982, pp. 79-91.
- 3) Ackermann, N. L. and H. Shen: Stress in Rapidly Sheared Fluid-Solid Mixtures, Proc. ASCE, vol. 108, No. EM 1, 1982, pp. 95-113.

- 4) Shen, H. and N. L. Ackermann: Constitutive Relationships for Fluid-solid Mixtures, Proc. ASCE, vol. 108, No. EM 5, 1982, pp. 748 - 763.
- 5) Chen, C. L.: Generalized Viscoplastic Modeling of Debris Flow, Jour. Hydraulic Eng., vol. 114, No. 3, 1988, pp. 237 - 257.
- 6) Shibata, M. and C. C. Mei: Slow Paralell Flows of a Water-granule Mixture under Gravity, Acta Mechanica, vol. 63, 1986, pp. 179 - 193.
- 7) Goodman, M. A. and S. C. Cowin: Two Problem in the Gravity Flow of Granular Materials, J. Fluid Mech, vol. 45, part 2, 1971, pp. 321 - 339.
- 8) Savage, S. B.: Gravity Flow of Cohesionless Granular Materials in Chutes and Channels, J. Fluid Mech., vol. 92, part 1, 1979, pp. 53 - 96.
- 9) Savage, S. B. and D. J. Jefferey: The Stress Tensor in a Granular Flow at High Shear Rates, J. Fluid Mech., vol. 110, 1981, pp. 255 - 272.
- 10) Jenkins, J. T. and S. B. Savage: A Theory for the Rapid Flow of Identical Smooth, Nearly Elastic, Spherical Particles, J. Fluid Mech., vol. 130, 1983, pp. 187 - 202.
- 11) Savage, S. B. and M. Sayed: Stresses Developed by Dry Cohesionless Granular Materials Sheared in an Annular Shear Cell, J. Fluid Mech., vol. 142, 1984, pp. 391 - 430.
- 12) 金谷健一：粒状体の流動，流体力学，vol. 14, No. 12, 1978, pp. 641 - 648.
- 13) 宮本邦明：Newton 流体を含む粒子流の流動機構に関する研究，立命館大学学位論文，昭和 60 年 9 月，pp. 39 - 72.
- 14) 江頭進治・芦田和男・佐々木浩：土石流の流動機構，32 回水理講演会論文集，1988，pp. 485 - 490.
- 15) 芦田和男・江頭進治・矢島啓：土石流の流動・堆積機構，京都大学防災研究所年報，31 号 B-2，1988，pp. 411 - 422.