

エマルジョンの超音波吸収理論

東大教養 好村滋行、宮沢透、伊豆山健夫 名大工 福本康秀

§1 序論

一般に、粘性と熱伝導の機構によって、流体中を伝播する音波は減衰する。音波の吸収とは、音波の並進エネルギーが音としては利用できない内部エネルギーに変換されることである。その中でも、エマルジョンやサスペンションのような巨視的に不均一な系での音波吸収の問題は生体系や化学との関連もあって、実験的にも理論的にも盛んに調べられてきた[1,2,3,4,5,6]。この不均一な媒質においては、均一な媒質ではみられない特別な吸収の機構が存在する。例えば、成分間で密度が異なると、界面でずり粘性による散逸が生じたり[7,8]、音波の波長の -4 乗に比例する Rayleigh 散乱が起こる。しかし成分間の密度が近いときは Isakovich (1948) が指摘した熱伝導による吸収が重要な役割を演ずる[9]。各成分相で熱力学的性質（熱膨張率、比熱等）が異なるために、音波が通過する際に成分間に温度差が生じ、不可逆過程である熱伝導が起こる。この熱交換の過程が音波による圧縮と膨張の変化についていけないときに特徴的な周波数依存性をもった吸収があらわれるというのが、その主旨である。

Isakovich は音波（圧力波）の波長が、温度波の波長及びエマルジョンの核間の距離よりも十分長いという仮定のもとで、1次元周期層状媒質及び単一の球形核の場合について音速の分散と吸収係数を計算した。福本らは、エマルジョンが3次元で周期的に分散した球形核から構成されるとして、吸収係数

の低周波側で有効な表式を、接続漸近展開法 (method of matched asymptotic expansions) を用いて求めた [10]。但し、音波の波長に関しては、Isakovich と同じ仮定を採用した。

本研究では、1次元周期層状媒質に限って話を進める。我々は Isakovich の採用した音波の波長に関する制約をはずして、任意の周波数領域で計算可能な方法を示すつもりである [11]。そのために、我々は §2 で与えられる転送行列 (transfer matrix) の方法を用いる。§3 では簡単な考察を行う。なお、表題はエマルジョンとしたが、以下の理論は一般の分散系にも適用できる。

§2 1次元周期層状媒質での音速と吸収の計算方法

我々は以下の、質量、運動量、エネルギー保存則から出発する [12]。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2)$$

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + v \frac{\partial s}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (3)$$

ここで ρ は密度、 v は速度、 P は圧力、 T は温度、 s は単位質量当りのエントロピー、 κ は熱伝導率である。 δ が前についた物理量を音波の攪乱による1次の微小量とする。(1)-(3) をこれらの微小量について線形化した後に、状態方程式 $\rho = \rho(T, P)$, $s = s(T, P)$ とを組み合わせると、

$$\frac{\partial \delta T}{\partial t} - \frac{1}{\rho c_P} \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial \delta T}{\partial x} \right) - \frac{T \alpha}{\rho c_P} \frac{\partial \delta P}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

$$\alpha \frac{\partial^2 \delta T}{\partial t^2} - \beta \frac{\partial^2 \delta P}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta P}{\partial x} \right) = 0 \quad (5)$$

の2式が出る。但し、 c_P は定圧比熱、 $\alpha = -(1/\rho)(\partial\rho/\partial T)_P$ は熱膨張率、 $\beta = (1/\rho)(\partial\rho/\partial P)_T$ は等温圧縮率である。ここで図1のような1次元周期層状媒質を考える。我々の目的は、このような系で δP を $\delta P = f(x)e^{iKx}$; $f(x+D) = f(x)$ の形に求めることである。ここで K は固体物理のBloch波数に対応し、 K の複素部が音波の吸収係数を与える。

一様な媒質(媒質1及び媒質2)において δT と δP を $\delta T, \delta P \propto \exp\{i(px - \omega t)\}$ の形に置き(4),(5)に代入する。得られた δT と δP に関する2つの方程式が意味をもつための条件から、

$$p^4 - p^2 \left(\frac{\omega^2}{C_T^2} + \frac{i\omega}{\chi} \right) + \frac{i\omega^3}{\chi C_s^2} = 0 \quad (6)$$

が求まる。ここで、

$$C_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s, \quad C_T^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T = \frac{C_s^2}{\gamma} \quad (7)$$

の記号を用いた(γ は比熱比)。(6)は p に関する奇数次のない4次方程式であるが、この解として圧力波と温度波に対応するモードをそれぞれ k, q と書くことにする。 k は $\omega \ll C^2/\chi$ と $\omega \gg C^2/\chi$ の極限でそれぞれ次の表式をとる($C \sim C_s, C_T$)。

$$k = \frac{\omega}{C_s} + i \frac{\omega^2 \chi}{2C_s} \left(\frac{1}{C_T^2} - \frac{1}{C_s^2} \right) \quad (8)$$

$$k = \frac{\omega}{C_T} + i \frac{C_T}{2\chi C_s^2} (C_s^2 - C_T^2) \quad (9)$$

このような圧力波と温度波のカップルした系の状態を記述するために以下のような基底ベクトルを4つ用いる。

$$u(k) = \begin{pmatrix} 1 \\ a(\omega) \end{pmatrix} \exp(ikx) \quad u(-k) = \begin{pmatrix} 1 \\ a(\omega) \end{pmatrix} \exp(-ikx) \quad (10)$$

$$w(q) = \begin{pmatrix} b(\omega) \\ 1 \end{pmatrix} \exp(iqx) \quad w(-q) = \begin{pmatrix} b(\omega) \\ 1 \end{pmatrix} \exp(-iqx) \quad (11)$$

ここで $a(\omega)$ と $b(\omega)$ は $\delta T = a(\omega)\delta P$, $b(\omega)\delta T = \delta P$ で定義される2つのモードの振幅の比でそれぞれ

$$a(\omega) = -\frac{i\omega\alpha T/\kappa}{k^2 - (i\omega\rho c_P/\kappa)} \quad b(\omega) = -\frac{\rho\omega^2\alpha}{q^2 - (\omega^2/C_T^2)} \quad (12)$$

となる。これらを使って次式の中で係数 (c_1, c_2, c_3, c_4) を指定することで系の状態はユニークに記述される。

$$\psi = \begin{pmatrix} \delta P \\ \delta T \end{pmatrix} = c_1 u(k) + c_2 u(-k) + c_3 w(q) + c_4 w(-q) \quad (13)$$

さて話を1次元周期層状媒質に戻そう。添字 $i = 1, 2$ は媒質1及び媒質2の物理量を示すことにする。界面での境界条件は、

$$\delta P_1 = \delta P_2 \quad \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \delta P_1}{\partial x} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \delta P_2}{\partial x} \quad (14)$$

$$\delta T_1 = \delta T_2 \quad \kappa_1 \frac{\partial \delta T_1}{\partial x} = \kappa_2 \frac{\partial \delta T_2}{\partial x} \quad (15)$$

である。我々は $x = x_0$ での (c_1, c_2, c_3, c_4) が $x = x_0 + D$ でどのような (c'_1, c'_2, c'_3, c'_4) に変換されるかを知りたい。それは以下で定義される転送行列 (transfer matrix) M によって与えられる。

$$\begin{pmatrix} c'_1 \exp\{ik_1(x_0 + D + 0^+)\} \\ c'_2 \exp\{-ik_1(x_0 + D + 0^+)\} \\ c'_3 \exp\{iq_1(x_0 + D + 0^+)\} \\ c'_4 \exp\{-iq_1(x_0 + D + 0^+)\} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} c_1 \exp\{ik_1(x_0 + 0^+)\} \\ c_2 \exp\{-ik_1(x_0 + 0^+)\} \\ c_3 \exp\{iq_1(x_0 + 0^+)\} \\ c_4 \exp\{-iq_1(x_0 + 0^+)\} \end{pmatrix} \quad (16)$$

境界条件より M は、

$$M = M_1^{-1} M_2 E_2 M_2^{-1} M_1 E_1 \quad (17)$$

$$M_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 & b_i & b_i \\ \frac{ik_i}{\rho_i} & -\frac{ik_i}{\rho_i} & \frac{ib_i q_i}{\rho_i} & -\frac{ib_i q_i}{\rho_i} \\ a_i & a_i & 1 & 1 \\ i\kappa_i a_i k_i & -i\kappa_i a_i k_i & i\kappa_i q_i & -i\kappa_i q_i \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$M_i^{-1} = \frac{1}{2(1 - a_i b_i)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\rho_i}{ik_i} & -b_i & -\frac{b_i}{i\kappa_i k_i} \\ 1 & -\frac{\rho_i}{ik_i} & -b_i & \frac{b_i}{i\kappa_i k_i} \\ -a_i & -\frac{a_i \rho_i}{iq_i} & 1 & \frac{1}{i\kappa_i q_i} \\ -a_i & \frac{a_i \rho_i}{iq_i} & 1 & -\frac{1}{i\kappa_i q_i} \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$E_i = \begin{pmatrix} \exp(ik_i d_i) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-ik_i d_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(iq_i d_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(-iq_i d_i) \end{pmatrix} \quad (20)$$

となる。 M は対角化されて、

$$X^{-1}MX = \begin{pmatrix} \exp(iKD) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-iKD) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(iQD) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(-iQD) \end{pmatrix} \quad (21)$$

の形に決まる。 K の複素部が音波の吸収を与える。

§3 考察

不均一性の程度を d ($\sim d_1, d_2$) として物理量間に $1/d \ll C/\chi$ ($\chi = \kappa/\rho c_P$) の関係が成り立つ時には、図2からわかるように、次のような大小関係にある3つの特徴的周波数が表れる。

$$\frac{\chi}{d^2} \ll \frac{C}{d} \ll \frac{C^2}{\chi} \quad (22)$$

これらによって全周波数領域が4つの領域に分けられるが、それらを順に領域1、2、3、4としよう。図3、図4は周波数 ω に対して吸収係数 $\delta(=\text{Im } K)$ をプロットしたものである。図3は領域1、2を、図4は領域1、2、3、4の周波数領域を網羅している。吸収係数の周波数依存性をまとめると表1のようになる。圧力波と温度波の波長をそれぞれ λ_c と λ_t とすると、各々の領域で次のようなことがいえる。

$$\text{領域 1} \quad \omega < \chi/d^2, \quad d < \lambda_t < \lambda_c$$

熱伝導の緩和時間が音波の振動周期に比べて小さいので、各成分で熱平衡が達成される。

$$\text{領域 2} \quad \chi/d^2 < \omega < C/d, \quad \lambda_t < d < \lambda_c$$

熱伝導の緩和時間が音波の振動周期に比べて大きいので、1周期の間に温度差

の平坦化が十分に起こらない。

$$\text{領域 3} \quad C/d < \omega < C^2/\chi, \quad \lambda_t < \lambda_c < d$$

圧力波の波長が d より小さいので、音波はあたかも一様な系で吸収されるように吸収される。

$$\text{領域 4} \quad C^2/\chi < \omega, \quad \lambda_c < \lambda_t < d$$

圧力波の波長がさらに小さくなり、温度波の波長より短くなる。

Isakovich の理論は圧力波の波長に関して前述のような仮定をとっているもので領域 1、2 に対してのみ計算可能である。我々はそれを (6) の直前ように一般的に拡張したため任意の周波数領域での吸収係数が得られる。2 つの理論の差は領域 3、4 で顕著となる。なお図 4 で等間隔でピークが観察されるのは共鳴効果によるものと考えられる。

参考文献

- [1] P. S. LaPlace: Chim. Phys. Tome. (1816) 238.
- [2] C. J. T. Swell: Phil. Trans. Roy. Soc. (London) **A210** (1910) 239.
- [3] V. O. Knudsen, J. V. Wilson and N. S. Anderson: J. Acoust. Soc. Amer. **20** (1940) 849.
- [4] R. J. Urlick: J. Acoust. Soc. Amer. **20** (1948) 283.
- [5] J. W. Strutt Lord Rayleigh: "Theory of Sound" (Dover, New York 1945, reprint).

- [6] P. A. Allinson and E. G. Richardson: Proc. Phys. Soc. (London) **A72** (1958) 833.
- [7] P. S. Epstein and R. R. Carhart: J. Acoust. Soc. Amer. **25** (1953) 553.
- [8] J. R. Allegra and S. A. Hawley: J. Acoust. Soc. Amer. **51** (1972) 1545.
- [9] M. A. Isakovich: Zh. Eksperim. i Teor. Fiz. **18** (1948) 907.
- [10] 福本、好村、伊豆山: 数理研講究録 ”流体方程式の解の空間的構造”
- [11] S. Komura, T. Miyazawa, T. Izuyama and Y. Fukumoto: to be published
- [12] L. D. Landau and E. M. Lifshitz: ”Fluid Mechanics” (Pergamon, Oxford).

ω	$\frac{\chi}{d^2} \ll \frac{C}{d} \ll \frac{C^2}{\chi}$			
δ	ω^2	$\sqrt{\omega}$	ω^2	const.

Isakovich

ours

表 1

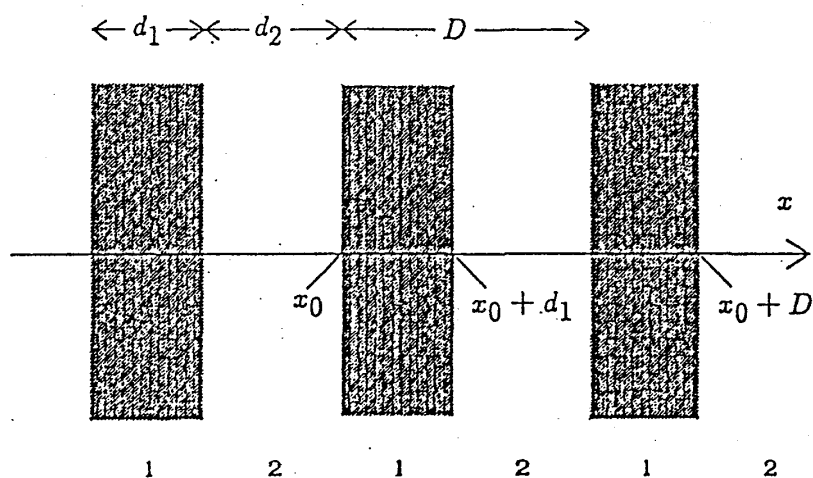


図 1 1次元周期層状媒質

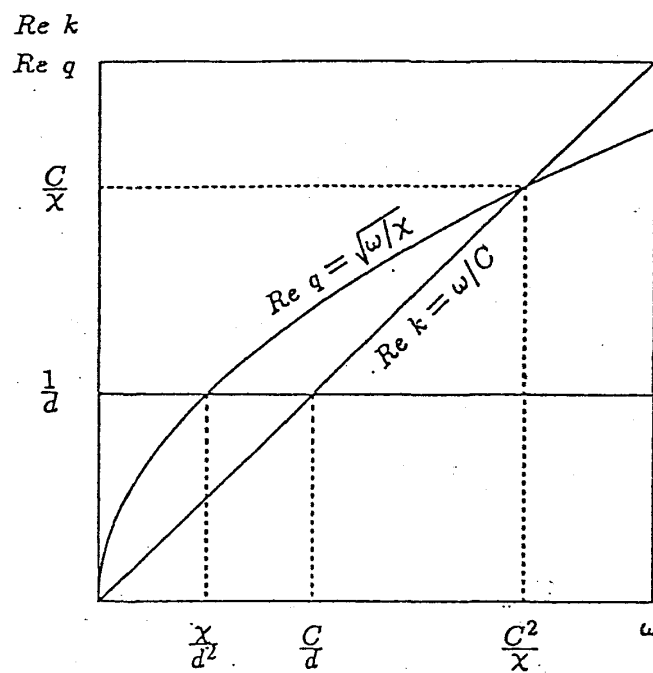


図 2 圧力波 k と温度波 q の分散関係。 d は不均一性の程度を表す。3つの特徴的周波数によって、全周波数領域は4つの領域に分けられる。

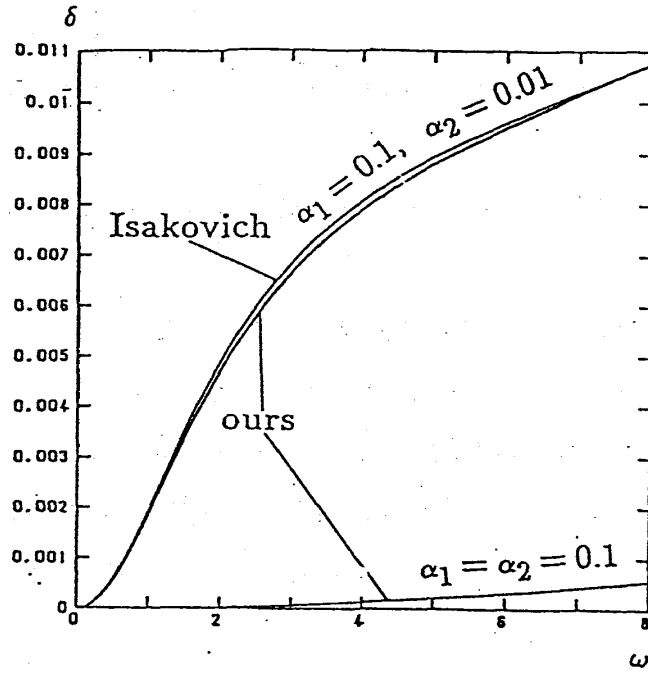


図3 不均一系における吸収係数 δ と周波数 ω の関係。パラメーターは $T = 1.0, d_1 = d_2 = 0.5, \rho_1 = \rho_2 = 1.0, c_{P1} = c_{P2} = 2.0, C_{T1} = C_{T2} = 10.0, \kappa_1 = \kappa_2 = 0.1$ とおいた。周波数は領域1、2をとってある。両軸とも任意スケール。

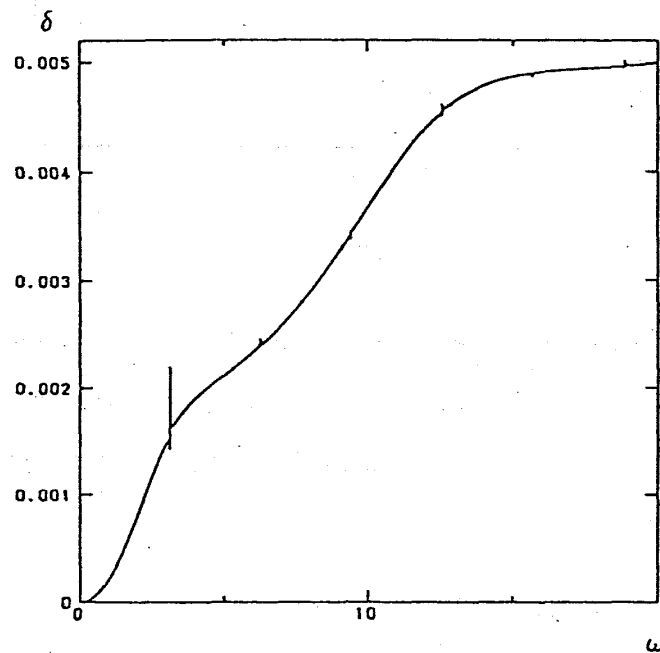


図4 不均一系における吸収係数 δ と周波数 ω の関係。パラメーターは $T = 1.0, d_1 = d_2 = 0.5, \rho_1 = \rho_2 = 2.0, c_{P1} = c_{P2} = 2.0, C_{T1} = C_{T2} = 1.0, \kappa_1 = \kappa_2 = 1.0, \alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 0.01$ とおいた。周波数は領域1、2、3、4をとってある。両軸とも任意スケール。