

多角形ビリヤード系の量子準位統計と半古典論

首藤 啓 (分子研)

(Shudo, Akira)

1. はじめに

対象とする力学系が古典的にカオスであるか否かは、対応する量子系の性質に著しく反映する。可積分な力学系では、自由度の個数に相当する断熱不変量を量子化することにより、量子化されたエネルギー固有値には自由度個の量子数が曖昧さなく割り振られる。一方、古典力学系がカオスを示しエルゴード的になると、トーラスをもとにした古典量子化則は有効性を失い、固有値・固有関数は量子数の振れないランダムなものになる [1]。

古典軌道を有限の時間観測している限りでは、カオスであるか否かを判定することができないのと同様、量子系のエネルギー固有値の有限列からだけでは、いくら不規則に並んでいるように見えても、それが実は規則性を内在しているのか、それとも原理的に予測不可能なランダムネスをもつものか判別することはできない。そこで、無限個の固有値列の振舞いから量子系を峻別しクラス分けしようという考え方が生まれる [2]。固有値列の統計的な性質のエネルギー無限大の漸近的振舞いに、古典カオスの反映を見ようといういわゆる“レベル統計”の問題を、そのような観点から考えることにする。既にさまざまなモデルで数値的に調べられているように、対応する古典系が完全にエルゴード的なカオスを示すようなとき、量子系のエネルギー固有値の分布（最近接分布、長距離分布）は、Wigner、Dyson、Mehta らによって始まったランダム行列理論の Gaussian Orthogonal Ensemble から得られる統計則に従う [3]。

我々はカオス系のエネルギー固有値列が普遍的に GOE 型の分布に従うことを、古典論のカオスを根拠に理解したい。そのためには、古典論と量子論をつなぐ橋わたしの理論が必要となる。半古典論は量子古典の対応関係を記述するいまのところ最も有効な手段であり、事実一次元を始めとする可積分な量子系に関しては、多くの有効な見方を提供している [4]。しかし、古典論がカオスを示すような非可積分な系に半古典論を適用しようとすると、まさに系がカオスであることを理由に多くの原理的な困難に直面する。例えば、Gutzwiller の跡公式は、対応する古典力学の周期軌道を用いて、系がエルゴード性を示す一般系のエネルギー固有値を半古典近似の範囲内で与える量子化則である（定負曲率面上での測地流の問題の Selberg の跡公式に相当するもの）が、系がカオスを示すため、寄与する周期軌道の数が増えるにつれて指数関数的に増大し、その増大率が古典周期軌道の安定性の指数からきまる振幅因子の減少率を上回るため級数が絶対収束しない [5]。また、一般には双曲型力学系の周期軌道すべて (Length spectrum) を枚挙すること實際上容易ではなく、今のところ跡公式は数値的に有効性がチェックされているにとどまってい [6]。これらの理由で、量子系に普遍的に見いだされる固有値の統計則などを、半古典論を用いて説明しようとする試みは今のところ成功していない。

2. 多角形ビリヤード系

ここでは、多角形の境界をもつビリヤード問題から、非可積分系の量子論へのアプローチを試みる [7]。多角系ビリヤードの古典論は、特殊な場合（長方形、正三角形 etc）を除き、測度論的な意味でのエントロピー（あるいはリアプノフ数）はゼロになるものの、保存量の解析性が測度ゼロの頂点で破れるため可積分にはならない。我々の扱うモデルは、ひし形の境界をもつ多角形ビリヤードで、頂角 α をパラメータとして考える（図1）。古典論のエルゴード性という観点からいうと、多角形のビリヤードの問題は大きく二つに分かれる。ひとつは、すべての頂角が 2π の有理数倍（以後、有理多角形と呼ぶ）、もうひとつは少なくともひとつの頂角が 2π の無理数倍（無理多角形と呼ぶ）である。有理多角形では、ある初期点から始めた古典軌道は有限個の方向しかとりえず、相空間はその数に応じて決まる genus をもつ multi-handed sphere になる。一方、無理多角形は、古典軌道があらゆる方向を向く可能性があり、エルゴード性が予想されている（厳密な証明はまだないようである）。

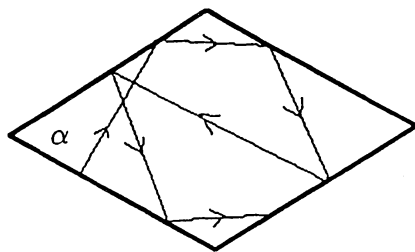


図1 菱形の境界をもつ多角形ビリヤード系。頂角 α が有理数 $\times\pi$ であるか無理数 $\times\pi$ であるかに応じてエルゴード論的性質が変わる。

有理多角形の量子論は Richens and Berry によって解析されたのがはじめてで、彼らはエントロピーがゼロになるにもかかわらず、完全可積分にならないような有理多角形ビリヤード系を擬可積分系と呼んでいる [8]。境界要素法を用いた数値計算によると多角形の境界をもつビリヤード系の量子準位は、レベル間に反発をもち、完全には GOE 型の分布に完全には一致はしないものの、準位統計は GOE 型の分布に近い（図2）。対応する古典論の測度論的なエントロピーが正になるという意味ではカオスを示さないにもかかわらず、準位統計は GOE 型にきわめて近い。カオスの存在は GOE 型の分布の十分条件であることは、これまでの多くの数値計算から確からしいが、それが果して必要条件でもあるか否かは、この結果から判断するとかなり微妙なものになってくる。多角形ビリヤード系の量子論と古典論の対応関係を探るためにも、半古典論による解析が必要である。

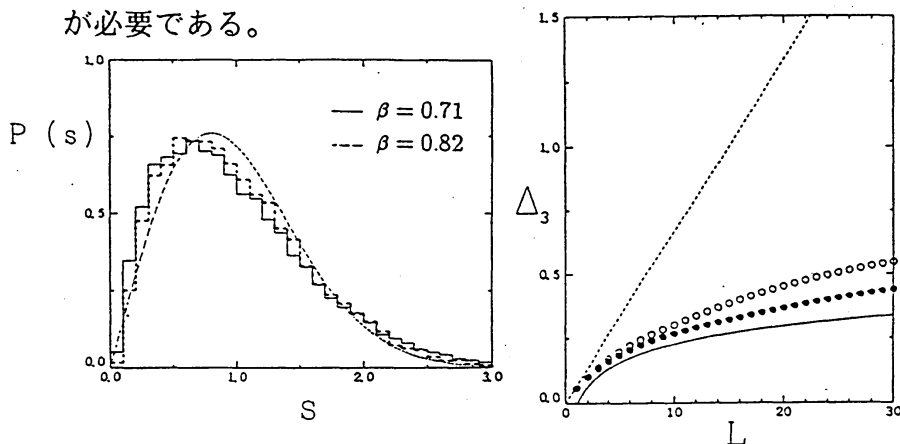


図2 菱形ビリヤードの量子準位統計。左が最近接準位統計（実線が有理多角形、点線が無理多角形）で、右がスペクトル剛性 Δ_3 （白丸が有理多角形、黒丸が無理多角形）。曲線は GOE 分布。

双曲型ビリヤードの場合と異なり、多角形ビリヤード系では、周期軌道が長さに対して指数関数的に増大することがないため、跡公式の収束性の問題が発生しない。しかし、一般の多角形ビリヤードの場合に、半古典論に必要とされるすべての周期軌道を求める方法は知られておらず、実際に量子論の性質を、古典論を根拠をして説明することは決して容易ではない。我々の菱形ビリヤード系ではある特殊な場合に限って、周期軌道を解析的に求めることができ、半古典的な議論を展開することが可能になる。

3. 多角形ビリヤード系の周期軌道と

エネルギーの状態密度は、グリーン関数のトレースによって、

$$d(k^2) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \int dr G(\mathbf{r}, \mathbf{r}; k^2). \quad (1)$$

と表される。自由空間でのグリーン関数は、

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k^2) = -\frac{1}{4} i H_0^{(1)}(k | \mathbf{r} - \mathbf{r}' |). \quad (2)$$

である。位置 $\mathbf{r}$ を発し直接 $\mathbf{r}'$ に至る軌道他、反射を繰り返した後に $\mathbf{r}'$ に向かう軌道からの寄与をすべてふくめることによって、状態密度の半古典表示は、

$$\begin{aligned} d(k^2) &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \int dr \sum_j \frac{1}{4} i H_0^{(1)}(k | \mathbf{r} - \mathbf{r} |) \exp(i\alpha_j \pi) \\ &= \frac{1}{4\pi} \text{Re} \sum_j \int dr H_0^{(1)}(k L_j(\mathbf{r}, \mathbf{r})) \exp(i\alpha_j \pi) \\ &\cong \frac{1}{4\pi} \sum_j \int dr \sqrt{\frac{2}{\pi k L_j(\mathbf{r}, \mathbf{r})}} \cos(k L_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}) + (\alpha_j - \frac{1}{4})\pi) \\ &\cong \frac{A}{4\pi} + \frac{A}{4\pi} \sqrt{\frac{1}{8\pi^3 k}} \sum_j \frac{a_j}{\sqrt{L_j}} \cos(k L_j + (\alpha_j - \frac{1}{4})\pi), \end{aligned} \quad (3)$$

と表される。ここで A はビリヤード台の面積、 a_j 、 L_j は、それぞれ周期軌道族 j の掃くバンドの面積、及び周期軌道の長さである。また、 α_j は各周期軌道が境界で反射する回数である。従って、我々がいま周期軌道とインプットとして必要なのは、周期軌道の族 j の掃くバンドの面積 a_j と長さ L_j である。

4. 菱形ビリヤード ($\alpha = \frac{\pi}{3}$ の周期軌道)

ビリヤード台のなかでの古典軌道は、境界で反射の法則を満足しつつ向きを変える折れ線で表現されるが、ここではその代わりに、軌道が衝突した辺を軸にビリヤード台自身を折れ返すことによって、逆に軌道自身は直線のまま表すような表現を考える。一般の形状をしたビリヤード系では、軌道の向きによって貼り合わせられてできるビリヤード台の列がそれぞれ異なったものになってしまうが、我々のいま考えている頂角 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ の菱形の場合には、貼り合わせ (Tessellation) がうまくいく (図3)。

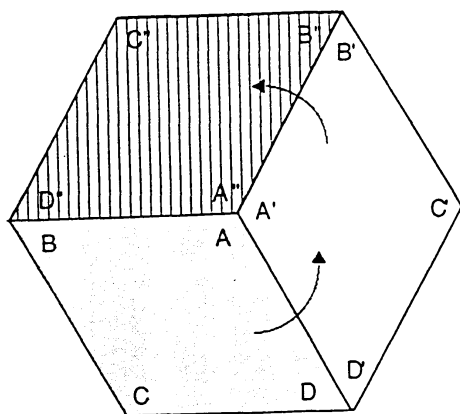


図3 $\frac{\pi}{3}$ -菱形を貼り合わせてつくる六角形の単位格子。ABCD を二回右周りに折り返したものと、左周りに一回折り返したものとでは、向きの違う菱形が得られる。

しかし、図に見るように、この場合にも貼り合わせる順番（右周りに貼り合わせるか、左周りに貼り合わせるか）が重要で、六角形で格子で貼り合わされた一枚の平面上での直線では表現することができない。しかし、図4に示すように、太線で表した部分で連結する上下二枚の平面を用意し、軌道を表す直線が、太線を通る毎にそれぞれの平面を移りわたるということにすると、直線の始点と終点を指定し、それらが上下二枚のうち同じ平面上にのっていれば、その直線は、もとのビリヤード台の軌道を一義的に定めることになる。

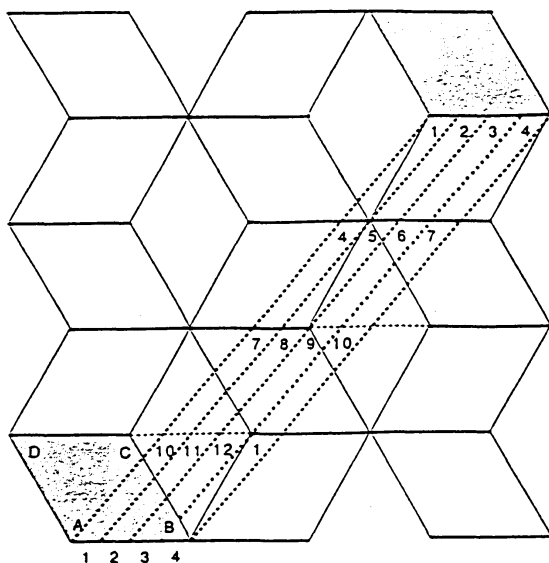


図4 六角形の単位格子を貼り合わせて平面を埋めたもの。図中の水平に入っている太い線分が二枚の平面をつなぐ箇所。数字は、各周期軌道の族が、水平線上のどの一を通るかを示す。

この表現を用いると、周期軌道は、始点と終点がそれぞれ同じ向きを向いているビリヤード台にのっていて、かつ二点がそれぞれのビリヤード台で相対的に同じ位置にあるような線分に対応していることになる（図4参照）。但し、その線分が太線を偶数回通過している場合には、もともとのビリヤード台の周期軌道の長さ、と、貼り合わされた平面上での線分の長さは等しいが、線分が太線を奇数回しか通過していなければ、始点と終点は、それぞれ異なる平面の上に居ることになるから、もとの平面に戻すために、さらに線分を2倍しなければならない。すなわち、

$$\begin{aligned} L_j^{\text{original}} &= L_j^{\text{unfolded}} && \text{for even time crossings} \\ L_j^{\text{original}} &= 2L_j^{\text{unfolded}} && \text{for odd time crossings} \end{aligned} \quad (4)$$

さて、いま我々が欲しいのは、各周期軌道の長さに加えてそれぞれの周期軌道の族が掃く面積であるが、それを得るには、以下の symbolic dynamics を解析すれば十分である。すなわち、いま起点となるビリヤード台 $ABCD$ の辺 AB を線分の出発点とし、 A を $(0,0)$ 、 B を $(2,0)$ とした座標を導入し、左端右端の座標がそれぞれ、

$$\begin{aligned} (0,0) &\rightarrow (6m, 2n) && \text{for left edges,} \\ (0,2) &\rightarrow (6m+2, 2n) && \text{for right edges,} \end{aligned} \quad (5)$$

で結ばれる線分に対しては、

$$\sigma_{i+2} = \sigma_i + \omega, \quad (6)$$

但し、

$$\begin{aligned} \omega &= 6m, \\ \sigma_0 &= 1, 2, \dots, 2n \\ \sigma_1 &= 1 + 3(m+n), 2 + 3(m+n), \dots, 2n + 3(m+n). \end{aligned} \quad (7)$$

また、左端、右端の座標がそれぞれ、

$$\begin{aligned} (0,0) &\rightarrow (6m+3, 2n-1) && \text{for left edges} \\ (0,2) &\rightarrow (6m+5, 2n-1) && \text{for right edges,} \end{aligned} \quad (8)$$

のルールで結ばれる線分の場合、

$$\sigma_{i+2} = \sigma_i + \omega, \quad (9)$$

但し、

$$\begin{aligned} \omega &= 6m+3, \\ \sigma_0 &= 1, 2, \dots, 2n-1 \\ \sigma_1 &= 1 + 3(m+n), 2 + 3(m+n), \dots, 2n-1 + 3(m+n). \end{aligned} \quad (10)$$

で与えられる写像がこの場合の周期軌道の性質をすべて記述する。

以上の写像を解析することにより、頂角 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ の場合の菱形の周期軌道スペクトル $n(L)$ は以下のように得られる。

$$\begin{aligned} n(L) &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_p A_p \delta(L - rL_p) \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \left[\sum_{m,n}^{(1)} \{ \delta(L - rL_1(m,n)) + 2\delta(L - 2rL_1(m,n)) \} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m,n}^{(2)} \{ \delta(L - rL_2(m,n)) + 2\delta(L - 2rL_2(m,n)) \} \\
& + \sum_{m,n}^{(3)} 3\delta(L - rL_1(m,n)) + \sum_{m,n}^{(4)} \{ 3\delta(L - rL_2(m,n)) \\
& + \sum_{m,n}^{(5)} 2\delta(L - rL_1(m,n)) \} \Big], \tag{11}
\end{aligned}$$

但し、

$$\begin{aligned}
L_1(m,n) &= \sqrt{(6m)^2 + 3(2n)^2}, \\
L_2(m,n) &= \sqrt{(6m+3)^2 + 3(2n-1)^2}, \tag{12}
\end{aligned}$$

各項の和は以下のルールで与えられる。

$$\begin{aligned}
\sum_{m,n}^{(1)} &: (m,n) \text{ is a coprime vector, } (m,n) = (\text{even}, \text{odd}) \text{ or } (\text{odd}, \text{even}) \\
&\quad \text{and } \text{mod}(n, 3) = 0 \text{ or } 1. \\
\sum_{m,n}^{(2)} &: (2m+1, 2n-1) \text{ is a coprime vector, and } \text{mod}(n, 3) = 1 \text{ or } 2. \\
\sum_{m,n}^{(3)} &: (m,n) \text{ is a coprime vector, } (m,n) = (\text{even}, \text{odd}) \text{ or } (\text{odd}, \text{even}) \\
&\quad \text{and } \text{mod}(n, 3) = 2. \\
\sum_{m,n}^{(4)} &: (2m+1, 2n-1) \text{ is a coprime vector and } \text{mod}(n, 3) = 0. \\
\sum_{m,n}^{(5)} &: n = 1 \text{ and } m = \text{even}. \tag{13}
\end{aligned}$$

5. 量子準位の長距離相関とスペクトルの形状因子

上記で得られた周期軌道スペクトルと半古典論の周期軌道公式 (3) から、量子準位の統計的性質を考察する。冒頭で示したように、多角形ビリヤード系の最近接準位の統計は、GOE 型に非常に近い分布を示す。最近接準位の統計は、各レベルの位置が特定されてはじめて決まる統計量であるから、エネルギースケールの最も短い揺らぎを問題にしていることになる。ここでは、エネルギースケールのもう少し長い領域にわたる揺らぎを測るスペクトル剛性 (Spectral Rigidity, Δ_3) を考える (図 1 b)。

スペクトル剛性は、エネルギー準位の累積密度関数のその平均増大率からのずれの最小二乗偏差を測る量で、以下で定義される：

$$\Delta_3(L) \equiv < \frac{1}{L} \min_{A,B} \int_{-L/2}^{L/2} d\epsilon [N(E+\epsilon) - A - B\epsilon]^2 >. \tag{14}$$

さて、状態密度の半古典近似を

$$d(E) = \bar{d}(E) + \frac{1}{\hbar^{\mu+1}} \sum_{\gamma} A_{\gamma}(E) \exp[i \frac{S_{\gamma}(E)}{\hbar} + i\nu] \quad (15)$$

と表すことにすると（但し、 A_{γ} 、 S_{γ} はそれぞれ周期軌道中の振幅因子、古典作用を表し、 ν は周期軌道族のとき $1/2$ 、孤立した周期軌道のとき 0 である）、 $\Delta_3(L)$ は、

$$\Delta_3(L) = \frac{2}{\hbar^{2\mu}} \int_0^{\infty} \frac{dT}{T} \phi(T) G(\frac{LT}{2} \hbar) \quad (16)$$

となる。ここで、

$$G(y) = 1 - F(y)^2 - 3(F'(y))^2, \quad F(y) = \frac{\sin y}{y}$$

は系の特性に依らない orbit selection function で、

$$\phi(T) \equiv \langle \sum_i \sum_j A_i A_j \cos[\frac{S_i - S_j}{\hbar}] \delta(T - \frac{1}{2}(T_i + T_j)) \rangle \quad (17)$$

は、スペクトル形状因子と呼ばれ、対象としている古典力学の周期軌道の情報をすべて担っている。ちなみに、スペクトル形状因子は、量子準位の 2 体相関のフーリエ変換でもある。 $\phi(T)$ は、古典周期軌道の作用の 2 体相関を表しているものであるが、いま仮りにそれぞれの古典作用間に全く相関がないとして、非対角項が random phase で相殺すると仮定すると、

$$\phi_D(T) = \langle \sum_j A_j^2 \delta(T - T_j) \rangle \quad (18)$$

となる。完全可積分ビリヤードのときは、周期軌道の増大率と振幅因子の減少率とのバランスから

$$\phi_D(T) \sim \text{const.} \quad (T \rightarrow \infty) \quad (19)$$

で与えられ、完全にカオス的な双曲型ビリヤードのときは大ざっぱに、

$$\phi_D(T) \sim T \quad (T \rightarrow \infty) \quad (20)$$

と評価され、このスペクトル形状因子の漸近的振舞いから、量子準位の長距離相関を測るスペクトル剛性の普遍則のクラスが決定される。問題は、いま我々が周期軌道スペクトルを求めることに成功した、多角形ビリヤードの場合である。いま、周期軌道スペクトルが完全にわかっているので、それを状態密度の表式に入れ、スペクトル形状因子を求めると、

$$\begin{aligned} \phi^{(odd, even)}(T) \propto & \left[\left(\frac{1}{3} \sum_{m,n}^{(1)} + (-1)^s \frac{2}{3} \sum_{m,n}^{(1)} \right) + \left(\frac{1}{3} \sum_{m,n}^{(2)} + (-1)^s \frac{2}{3} \sum_{m,n}^{(2)} \right) \right. \\ & \left. + \sum_{m,n}^{(3)} + \sum_{m,n}^{(4)} + (-1)^s \sum_{m,n}^{(5)} \right]^2, \end{aligned} \quad (21)$$

となる。但し、(odd)、(even)は、それぞれ菱形の短い方の対角線に対してodd parityの状態か even parityの状態かを表し、前者は古典的には完全可積分の場合に対応し（正三角形のビリヤード問題を考えていることに等価だから）、後者が genus 2 の擬可積分系に対応する。容易にわかるように、両者の間には、 T の大きい漸近的領域での振舞いに定性的な差異はなく、

$$\frac{1}{9}\phi^{odd}(T) \leq \phi^{even}(T) \leq \phi^{odd}(T). \quad (22)$$

と評価される。すなわち、我々が用いた周期軌道の族からの寄与のみを考慮した周期軌道とからでは、可積分系と擬可積分系の量子準位の長距離相関は同じ普遍則のクラスに族するということになる。しかし、それにもかかわらず、実際に数値計算を実行すると、図5に示すように頂角が $\pi/3$ の場合、レベル統計は可積分系のそれ（可積分系では最近接分布はポアソン分布になり、長距離相関は L に比例する）とは大きく異なったものが得られる。

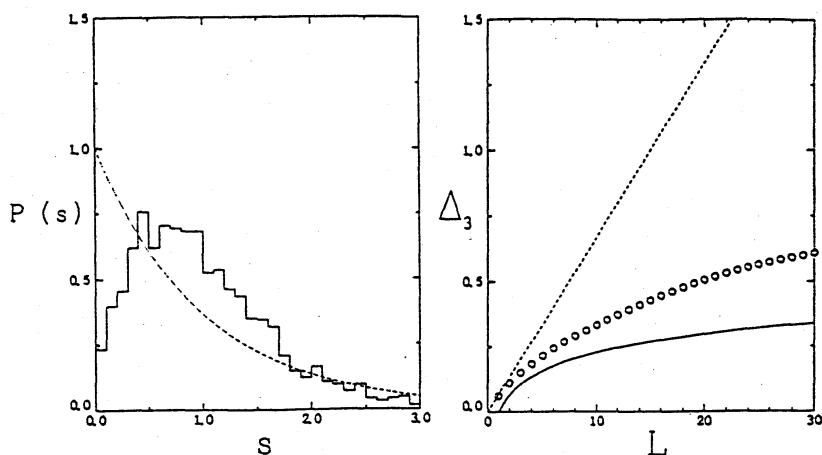


図5 $\pi/3$ -菱形ビリヤードの場合の量子準位統計。右が最近接分布、左がスペクトル剛性。

周期軌道スペクトルが具体的に求まっているので、直接半古典論から計算される状態密度と量子論から計算される状態密度を比較することもできる。図6に示すように、半古典論は量子論のおおよその様子は再現するが、細かいところまでの一致それほど良くない。この結果からも、多角形ビリヤード系の半古典論は、ここで行ったような周期軌道の族だけからの寄与では十分ではないということが示唆される。

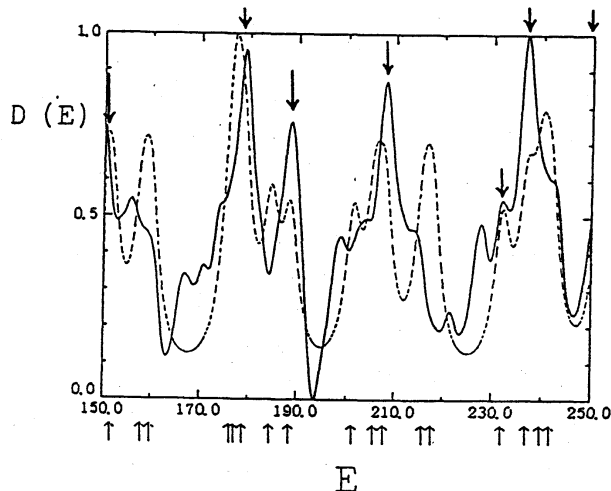


図6 $\pi/3$ -菱形ビリヤードの状態密度。点線が境界要素法を用いて計算した量子論の状態密度。実線が半古典論によって得られた状態密度。上に示した矢印は、可積分系に対応するレベルを示す。

これらの不一致の原因は、まだ明らかではないが、ひとつの強い可能性としては、ここで行った計算は多角形の頂角での回折を考慮していないことが挙げられる。多角形ビリヤードでは、保存量の解析性が測度ゼロの頂角が破れており、非可積分性の起源はそこに集中している。回折現象はまさに頂角を中心にしておこり、その効果を無視していることは、量子論の近似には致命的である可能性がある。実際、最近 P. Gaspard がスタジアムビリヤードの場合の直線部分の周期軌道族からの寄与に加えて、直線部分と円の部分とをつなげている edge term を跡公式に考慮することにより、半古典論が大幅に改善されることを示している [9]。スタジアムビリヤードでは周期軌道の族が一種類しか存在しないが、多角形ビリヤードでは、すべての周期軌道が族をなし、かつ頂角での回折を生じることから、その回折の効果を考慮することが今後の課題として考えれる。

1. I.C. Percival, Adv. Chem. Phys. **36**(1977)1.
2. M.V. Berry, *Some quantum-to-classical asymptotics*, Les Houches Summer School "chaos and quantum physics", Edts. M.-J. Giannoni, A.Voros and Zinn-Justin, (North-Holland, 1991, Amsterdam).
3. O. Bohigas, *Random matrix theories and chaotic dynamics*, Les Houches Summer School "chaos and quantum physics", Edts. M.-J. Giannoni, A.Voros and Zinn-Justin, (North-Holland, 1991, Amsterdam).
4. M.V. Berry and K.E. Mount, Rep. Prog. Phys. **35**(1972)315.
5. A. Voros, J. Phys. **A21**(1988)685; B. Eckhardt and E. Aurell, Europhys. Lett. **9**(1989)509; M. Sieber and F. Steiner, Phys. Lett. **A144**(1990)159.
6. M. Sieber and F. Steiner, Physica **44D**(1990)248; H. Harayama and A. Shudo, J. Phys. **A25**(1992)4595.
7. A. Shudo, Phys. Rev. A, **46**(1992)809.
8. R.J. Richens and M.V. Berry, Physica **2D**(1981)495.
9. D. Alonso and P. Gaspard, *Role of the edges orbits in the semiclassical quantization of the stadium billiard*, preprint.