

雑音によって誘起される相転移

静岡大 教養 北原 和夫

§ 1 序論

最近, 非線型系に外部から雑音が加えられた時に, 或る種の相転移現象が起こることが注目されている。実験的には, 化学反応系に光と乱雑に照射して非振動状態から振動状態への転移と起こさせること [1], また, 電気回路の発振に対する雑音の影響の観測 [2] などが行われて居る。一方, 自然界に存在するものとしては, 遺伝子の複製が環境の揺らぎによって影響を受けている可能性が指摘されている。 [3]

このような外部雑音の影響の下にある系の振舞が単純な一変数の微分方程式

$$\dot{x}_t = F(x_t, I_t) \quad (1.1)$$

で記述されるものとする。 I_t は外部雑音である。この方程式と更に単純化して,

$$\dot{x}_t = f(x_t) + I_t g(x_t) \quad (1.2)$$

としよう。最も単純な Gauss 型白色雑音の場合、即ち、
 $\langle I_t \rangle = 0$, $\langle I_t I_{t'} \rangle = 2D\delta(t-t')$ の場合、時刻 t
 において $x_t = x$ となる確率分布 $P(x, t)$ は、Fokker-
 Planck 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} f(x) P(x, t) + D \frac{\partial}{\partial x} g(x) \frac{\partial}{\partial x} g(x) P(x, t) \quad (1.3)$$

に従う。この定常解は

$$P_{st}(x) \propto g(x)^{-1} \exp \left[\frac{1}{D} \int^x dx' \frac{f(x')}{g(x')^2} \right] \quad (1.4)$$

である。実際、このようにして、Horsthemke ら [4] は
 人口変動の Verhulst 模型

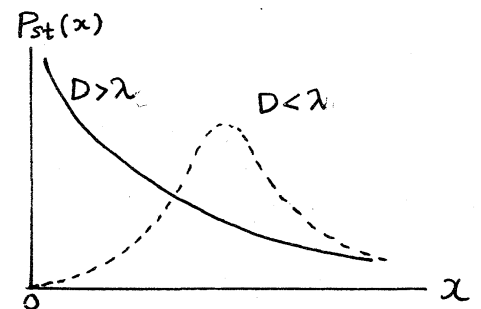
$$\dot{x}_t = (\lambda + I_t) x_t - x_t^2 \quad (1.5)$$

について、 x_t の定常分布を求めた。 λ は、平均的な増殖
 率で、 I_t は、その揺らぎである。 $D = \lambda$ の境にして $P_{st}(x)$
 の形状が定性的に変化する。(図1)

一方、式 (1.5) のような系の
 動力学については、Schenzle

ら [5] が、Fokker-Planck

方程式 (1.3) の右辺の微分
 演算子の固有値と調べた。その



(図1) Verhulst 模型における
 定常分布

結果

$$\mu_n = -Dn \left(\frac{\lambda}{D} - n \right) \quad (1.6)$$

$$[n = 0, 1, \dots, \text{但し, } D \leq \lambda/2n]$$

という離散的固有値と, $\mu \leq -\lambda^2/4D$ に存在する連続的固有値が得られた。然しながら, 離散的固有値に属する条件 $D \leq \lambda/2n$ の意味があいまいで, 実際, この条件を満たさない固有関数をつくることができる。また, 連続的固有値の状態密度も不明確で, 具体的な物理量の緩和と計算できない。§2 では, 我々は, 全く異なる方法で, 緩和と論ずるが, それは, 固有関数展開に伴う困難な問題を避けるものである。

Gauss型白色雑音は一つの理想化である。雑音がある有限の強さともち, ある有限の記憶時間を持つ, というやや現実性をもつ最も簡単な雑音の模型として, 二準位雑音を考える。これは, I_t が Δ あるいは, $-\Delta$ という値のみととり, この二つの値の間を γ^{-1} という時間で遷移しているものである。即ち, 雑音 I_t が時刻 t において $I_t = \alpha\Delta$ ($\alpha = \pm$) となる確率を $P_\alpha(t)$ とすると,

$$\dot{P}_\alpha(t) = -\frac{\gamma}{2} \{ P_\alpha(t) - P_{-\alpha}(t) \} \quad (1.7)$$

と書ける。これは,

$$\langle I_t I_{t'} \rangle = \Delta^2 e^{-\gamma|t-t'|} \quad (1.8)$$

を意味する。 x_t が方程式 (1.2) に従うものとするれば、時刻 t において、 $x_t = x$, $I_t = \pm \Delta$ となる確率分布 $P_{\pm}(x, t)$ は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P_{\pm}(x, t) = & - \frac{\partial}{\partial x} \{ f(x) \pm \Delta g(x) \} P_{\pm}(x, t) \\ & - \frac{\gamma}{2} \{ P_{\pm}(x, t) - P_{\mp}(x, t) \} \end{aligned} \quad (1.9)$$

に従う。この定常解を求めることにより、 x_t の定常分布が、

$$P_{st}(x) \propto \frac{g(x)}{\Delta^2 g(x)^2 - f(x)^2} \exp \left[\gamma \int^x dx' \frac{f(x')}{\Delta^2 g(x')^2 - f(x')^2} \right] \quad (1.10)$$

となることが判る [6]。この公式は、雑音の強さ Δ^2 、遷移の速度 γ を任意に変えることができるので、Gauss型白色雑音を含むより広い範囲の雑音を記述できる。実際、 $\Delta^2 \rightarrow \infty$, $\gamma \rightarrow \infty$ [但し、 $\Delta^2/\gamma = D$] の極限をとると、公式 (1.10) は公式 (1.4) となる。この公式の応用については、昨年の研究会で報告した [7]。

この論文では、Verhulst模型 (1.5) と一般化した模型の緩和について論じたい。その理由は、二準位雑音を用いることにより、白色雑音よりも広い範囲の雑音の影響を調べて見たいからである。もう一つの理由は、固有関数展開の方

法によらず、直接、物理量の緩和を計算することにより、固有関数展開の結果と比較してみることである。

§2 模型と方法

我々は次のような非線型微分方程式

$$\dot{\xi}_t = \xi_t (1 + I_t) - \xi_t^{m+1} \quad (2.1)$$

を扱う。 I_t は 二準位雑音である。変数と適当にスケールすると、式 (1.5) は、 $m=1$ の場合と同等であることが判る。この方程式は、更に、

$$\xi_t^m = \begin{cases} \frac{2}{1+x_t} & \Delta=1 \\ \frac{1-\Delta^2}{1-\Delta+2\Delta x_t} & \Delta \neq 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

という変数変換により、

$$\dot{x}_t = \begin{cases} (-m) \{ (1+x_t)(1+I_t) - 2 \} & \Delta=1 \\ (-m) \left\{ \left(\frac{1-\Delta}{2\Delta} + x_t \right) (1+I_t) - \frac{1-\Delta^2}{2\Delta} \right\} & \Delta \neq 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

という線型方程式になる。これを記号の簡単化のために、

$$\dot{x}_t = F(x_t, I_t) \quad (2.4)$$

と書くことにする。 $\varphi(x)$ は x の有界な関数とすると、条件付き期待値

$$u_{\pm}(x, t) = E \{ \varphi(x_t) \mid x_0 = x, I_0 = \pm \Delta \} \quad (2.5)$$

は、後向き Kolmogorov 方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u_{\pm}(x, t) = & F(x, \pm \Delta) \frac{\partial}{\partial x} u_{\pm}(x, t) \\ & + \frac{\gamma}{2} \{ u_{\mp}(x, t) - u_{\pm}(x, t) \} \end{aligned} \quad (2.6)$$

に従う [8]。ただし、 $u_{\pm}(x, 0) = \varphi(x)$ 。 $u_{\pm}(x, t)$

の Laplace 変換は

$$\hat{u}_{\pm}(x, p) = \int_0^{\infty} dt e^{-pt} u_{\pm}(x, t) \quad (2.7)$$

とすると

$$\begin{aligned} p \hat{u}_{\pm}(x, p) - F(x, \pm \Delta) \frac{\partial}{\partial x} \hat{u}_{\pm}(x, p) - \frac{\gamma}{2} \{ \hat{u}_{\mp}(x, p) - \hat{u}_{\pm}(x, p) \} \\ = \varphi(x) \end{aligned} \quad (2.8)$$

を得る。これは、形式的に

$$L_{\pm} \hat{u}_{\pm}(x, p) = v_{\pm}(x, p) \quad (2.9)$$

という形に書くことができる。ここで、

$$L_{\pm} = p^2 + \gamma p - (p + \frac{\gamma}{2}) \{ F(x, +\Delta) + F(x, -\Delta) \} \frac{\partial}{\partial x} \\ + F(x, +\Delta) \frac{\partial}{\partial x} F(x, \pm\Delta) \frac{\partial}{\partial x}, \quad (2.10)$$

$$v_{\pm}(x, p) = \{ p + \gamma - F(x, \mp\Delta) \frac{\partial}{\partial x} \} \varphi(x). \quad (2.11)$$

方程式 (2.9) の解は Green 関数を用いて

$$\hat{u}_{\pm}(x, p) = \int dy G_{\pm}(x, y; p) v_{\pm}(y, p) \quad (2.12)$$

と書くことができる。ここで

$$L_{\pm} G_{\pm}(x, y; p) = \delta(x-y). \quad (2.13)$$

式 (2.3), (2.4) で定義される $F(x, \pm\Delta)$ は x の一次関数であるから, 演算子 $L_{\pm}$ は, 超幾何関数を与えるものである。実際, $\Delta=1$ の場合と $\Delta \neq 1$ の場合とについて, 具体的に L_{+} の形を書いてみよう。

(i) $\Delta=1$ の場合,

$$L_{+} = -2m(p + \frac{\gamma}{2}) \mathcal{L}_{+}, \quad (2.14)$$

と書け, $\mathcal{L}_{+}$ は合流型超幾何関数を与えるものである,

$$\mathcal{L}_{+} = z \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (b-z) \frac{\partial}{\partial z} - a, \quad (2.15)$$

そこで

$$a = \frac{p^2 + \gamma p}{2m(p + \frac{\gamma}{2})} \quad (2.16)$$

$$b = \frac{p + \frac{\gamma}{2}}{2m} + 1, \quad (2.17)$$

また、変数 x のかわりに、

$$x = \frac{p + \frac{\gamma}{2}}{2m} \cdot \alpha \quad (2.18)$$

を導入した。

(ii) $0 \leq \Delta < 1$ の場合、

$$L_+ = m^2(\Delta^2 - 1) \mathcal{L}_+ \quad (2.19)$$

と書け、 $\mathcal{L}_+$ は超幾何関数を与える演算子、

$$\mathcal{L}_+ = x(1-x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \{c - (a+b+1)x\} \frac{\partial}{\partial x} - ab \quad (2.20)$$

である。そこで、

$$a = \frac{1}{m(\Delta^2 - 1)} \left\{ -\left(p + \frac{\gamma}{2}\right) + \Delta \sqrt{(p-p_+)(p-p_-)} \right\}, \quad (2.21)$$

$$b = \frac{1}{m(\Delta^2 - 1)} \left\{ -\left(p + \frac{\gamma}{2}\right) - \Delta \sqrt{(p-p_+)(p-p_-)} \right\}, \quad (2.22)$$

$$p_{\pm} = \frac{\gamma}{2} (-1 \pm i \sqrt{\frac{1}{\Delta^2} - 1}). \quad (2.23)$$

a , b の表式の中にある根号は多価関数と与えるので、
Laplace 変換を行う際の第 1 Riemann 面を次のように指定する (図 2),

$$\sqrt{(p-p_+)(p-p_-)} = \sqrt{|p-p_+| \cdot |p-p_-|} e^{\frac{i}{2}(\theta_+ + \theta_-)} \quad (2.24)$$

このように定義すると, この
根号は, p が正の実軸上にあ
るとき, 正数となる。また,

$$c = \frac{p + \frac{\gamma}{2}}{m(\Delta + 1)} + 1 \quad (2.25)$$

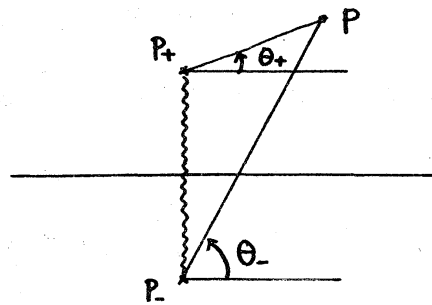


図 2. 第 1 Riemann 面

である。

(iii) $\Delta > 1$ の場合も, 式 (2.19), (2.20) の形になる。

a , b , c の関数形も同じであるが, 分岐点が異なる。

$$p_{\pm} = \frac{\gamma}{2} \left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\Delta^2}} \right) \quad (2.26)$$

従って, 第 1 Riemann 面を式 (2.24) で指定する際, $\theta_{\pm}$ は
図 3 のようにとる。

次に, Green 関数とそれ
との場合について求める。
方程式 (2.3) から判ること
は, 軌道は, ある領域に一

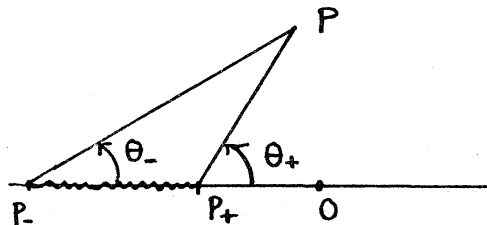


図 3. 第 1 Riemann 面

度入ると、そこから抜け出せない、という性質を持つ。その領域は、それぞれの場合で、

(i) $\Delta = 1$ の場合, $0 \leq x < \infty$;

(ii) $0 \leq \Delta < 1$ の場合, $0 \leq x \leq 1$;

(iii) $\Delta > 1$ の場合, $-\infty < x \leq 0$.

である。定常状態における時間相関関数を計算する場合は軌道 x_t の初期条件をこの領域に限定してよい訳であるから、これからの計算では、上記の領域に x を限定する。また、 $u_{\pm}(x, p)$ に対する境界条件として、 $u_{\pm}(x, p)$ は上記の領域において有界であることに注意する。なぜなら、後向き Kolmogorov 方程式は有界な関数 $\varphi(x_t)$ の期待値に対して保証されているからである。

Green 関数を具体的に求めてみよう。

(i) $\Delta = 1$ の場合,

$$G_+(x, y; p) = -\frac{\sin(\pi b) \Gamma(a) \Gamma(1-b)}{(2m)^2 \pi} \zeta^{b-1} e^{-\zeta}$$

$$\times \begin{cases} M(a, b, z) U(a, b, \zeta) \\ \quad [0 \leq z \leq \zeta < \infty] \\ U(a, b, z) M(a, b, \zeta) \\ \quad [0 \leq \zeta \leq z < \infty] \end{cases}$$

(2.27)

ここで

$$z = \frac{p + \frac{\gamma}{2}}{2m} x, \quad \zeta = \frac{p + \frac{\gamma}{2}}{2m} y$$

であり、また、 $M(a, b, z)$, $U(a, b, z)$ は $\mathcal{L}_+ u = 0$ の
2つの独立な解である[9]。このGreen関数の表式を
用いて、Laplace 変換を行えば、 $u_+(x, t)$ が得られること
になる。Green関数は、 $a = -n$ ($n=0, 1, \dots$) におい
て一次の極を持つ。 $\Gamma(1-b)$ の極は、 $\sin \pi b$ の零と打ち消
し合うので知ってこない。 $a = -n$ を与える p の値を求
めると、

$$\mu_n^{(\pm)} = -\left(mn + \frac{\gamma}{2}\right) \pm \sqrt{(mn)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \quad (2.28)$$

を得る。即ち、Green関数は、 $p = \mu_n^{(\pm)}$ ($n=0, 1, \dots$) に一
次極を持つ。従って、 $u_+(x, t)$ は、 $e^{\mu_n^{(\pm)} t}$ という形の
時間の関数として書かれることになる。

(ii) $0 \leq \Delta < 1$ の場合、

$$G_+(x, y; p) = \frac{(-1)}{m^2(\Delta^2 - 1)} y^{c-1} (1-y)^{a+b+1-c} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1-c)\Gamma(c)}$$

$$\times \begin{cases} F(a, b; c; x) F(a, b; a+b+1-c; 1-y) \\ \quad [0 \leq x \leq y \leq 1] \\ \\ F(a, b; c; y) F(a, b; a+b+1-c; 1-x) \\ \quad [0 \leq y \leq x \leq 1] \end{cases} \quad (2.29)$$

この Green 関数は

$$\mu_n^{(\pm)} = -\left(\frac{Y}{2} + mn\right) \pm \sqrt{\left(\frac{Y}{2}\right)^2 + (mn\Delta)^2} \quad (2.30)$$

$n=0, 1, \dots$

において, Riemann 第1面の極(一次)を持つ。これは,
 $a = -n$ と与えるものである。 $b = -n$ は第2面の極と
 与える。 Laplace 変換の際, $G_+(x, y; p)$ において a と
 b とが対称的に現われていることを用いると, 切断線に沿っ
 ての積分は打消しあうことがわかってこない。従って, この
 場合も, $u_{\pm}(x, t)$ は, $e^{\mu_n^{(\pm)}t}$ という関数の和となる。

(iii) $\Delta > 1$ の場合.

$$G_+(x, y; p) = \frac{1}{m^2(\Delta^2 - 1)} (-y)^{c-1} (1-y)^{a+b-c} \frac{\Gamma(c-b)\Gamma(a)}{\Gamma(a-b+1)\Gamma(c)}$$

$$\times \begin{cases} (-x)^{-a} F(a, a-c+1; a-b+1; x^{-1}) \\ \quad \times F(a, b; c; y) \\ \quad [-\infty < x \leq y \leq 0] \\ \\ (-y)^{-a} F(a, a-c+1; a-b+1; y^{-1}) \\ \quad \times F(a, b; c; x) \quad (2.31) \\ \quad [-\infty < y \leq x \leq 0] \end{cases}$$

この Green 関数は,

$$\mu_n^{(\pm)} = -\left(\frac{Y}{2} + mn\right) \pm \sqrt{\left(\frac{Y}{2}\right)^2 + (mn\Delta)^2} \quad (2.32)$$

$n=0, 1, \dots$

において一次の極をもつ。但し, $\mu_n^{(-)}$ は, 常に Riemann 第1面の極であるが, $\mu_n^{(+)}$ は,

$$\Delta^2 < \Delta_{mn}^2 \equiv \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{mn} \right)^2} \right\} \quad (2.33)$$

a 時のみ, Riemann 第1面の極である。 $\Delta^2 = \Delta_{mn}^2$ の時, 極 $\mu_n^{(+)}$ は, 切断線の上端 P_+ と一致する。(図4)

図4で n_c というのは,

不等式 (2.33) を満た

す最大の n である。

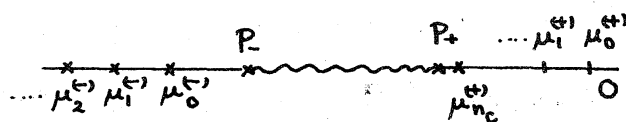


図4 極 $\mu_n^{(\pm)}$ の位置

Green関数は更に,

$$\nu_n = -\frac{\gamma}{2} - \frac{m^2(n+1)^2(\Delta^2-1) + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}{2m(n+1)} \quad (2.34)$$

$n=0, 1, \dots$

において一次の極をもつ。 c のとき $c-b=-n$ とする。

但し,

$$\Delta^2 > \delta_{mn}^2 \equiv 1 + \frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}{\{m(n+1)\}^2} \quad (2.35)$$

a 時のみ, ν_n は Riemann 第1面の極である。 また,

$\nu_n < p_-$ であることも判る。 Laplace 逆変換をするとき,

これらの極からの寄与だけでなく, 切断線に沿った積分も寄与する。 即ち, $u_+(x, t)$ は, $e^{\mu_n^{(+)}t}$, $e^{\nu_n t}$ という

関数の和と, e^{pt} という関数に p_0 から p_+ まで p について積分したもので, ところがなっている。

§3 結語

以上の考察から, 有界な物理量 $\varphi(x)$ の緩和については, いわゆる *critical slowing down* ということ, 即ち, $\mu_n^{(+)} (n \neq 0)$ がゼロになること, は起こらないと結論される。後向き

Kolmogorov 方程式 (2.6) が非有界量 $\varphi(x)$ についてもなりたつとすれば (それは保証されていない), $\mu_n^{(+)}$ について, 第1 Riemann 面と第2 Riemann 面が入れかわり, $\mu_n^{(+)} = 0 (n \neq 0)$ が起こり得る。非有界量については, 今後の課題である。

具体的な相関関数の計算等は, 別の機会に報告することにした。なお, このノートは, 研究会で発表した際に頂いた質疑応答及びコメントをもとに, 九州大学理学部数理生物学教室の石井一成氏と共に考察した成果の報告である。

文献

- [1] P. De Kepper and W. Horsthemke, in Synergetics (Ed. A. Pacault and C. Vidal, Springer, Berlin, 1979).

- [2] S. Kabashima and T. Kawakubo, *Phys. Lett.* 70A,
375 (1979).
- [3] 福島正俊・石井一成著「自然現象と確率過程」(入門
現代の数学 10, 日本評論社, 1980)
- [4] W. Horsthemke and M. Malek-Mansour, *Z. Physik*
B 24 307 (1976).
- [5] A. Schenzle and H. Brand, *Phys. Lett.* A 69
313 (1979).
- [6] K. Kitahara, W. Horsthemke and R. Lefever,
Phys. Lett. 70A 377 (1979).
- [7] 北原和夫, 稲葉豊, 数理解析研究所講究録
367 153 (1979).
- [8] G. C. Papanicolaou, *Bull. Amer. Math. Soc.*
81 330 (1975).
- [9] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of
Mathematical Functions (Dover, New York, 1968).