

メカニズムが存在していることが数値計算からわかる。しかしながら、散逸系の場合は $r\phi_t$ の項の効果により $\log \partial S$ を減少させようとする傾向も存在するから、系がカオスになるかどうかは、ソリトンの衝突による寄与と散逸項の寄与という相反する傾向の競合の結果として考えなければならない。

前述したモード間のエネルギー交換が生じているかどうかを調べる一つの方法は、かつてフェルミ達の行なった有名な再帰現象の発見の数値実験の方法を非線型なノーマル・モードを出発点とするために拡張して、前記の摂動を加えたサイン・ゴールドン系について調べてみることである。紙数の関係で詳しい記述を省略するが興味をお持ちの方は文献 1 を見ていただきたい。

我々の結論は、摂動を加えられたソリトンが相互作用することによってカオスが生ずることがあるということである。そもそも“ソリトン”というのは非線型系におけるコヒーレントな性質を担っている典型的な実体であると考えれば、この結論は多少奇妙にきこえるかもしれない。しかし非線型性がなければカオスは生じないし、ソリトンというのは系の非線型性をもっとも具現化しているということに気づけば、この結論はむしろ大変、自然なことであることがわかる。我々が調べたのは限られた例であったが、しかし一般に無限自由度系、特に空間依存性のあるような物理量におけるカオスを問題にするとき、空間的な不均一構造、特に欠陥、渦等の役割を見落としてはならないだろうということはこの経験からすぐに気付くことである。カオスの発生における空間の不均一性や非線型励起の役割についての研究はこれからの課題であると思われる。以上、短い紙数で書き落とした点、不明な点については文献 1 を参照されたい。

参考文献

- 1) M. Imada: submitted to J. Phys. Soc. Jpn.

ソリトンを持つ非線形分散波動のカオス

名大・理 野 崎 一 洋

§ 1. はじめに

無限自由度のソリトン系が可積分だということは驚くべきことではあるが、一般にそのような系は特別な場合である。従って、その可積分性が摂動によって破れた場合、ソリトンが

どう振る舞うかを調べることににより、ソリトン概念を一般化、かつ物理的に豊かにしてゆくことが重要と思われる。すでに、ソリトンの安定性、粒子性が多種の摂動に対して成立することが調べられているが、ここでは3次の非線形シミュレーンガー方程式に外部より周期的摂動が加わった系を考える（同様の議論がサイン・ゴールドン方程式のブリーザーについても行えるがすでに公表されているのでここでは取り扱わない¹⁾）。この摂動に対して、ある条件のもとで、ソリトンがカオス的に振る舞うことが示される。ここで、「カオス的なソリトン」あるいは「ランダムなソリトン」という概念が、ソリトンを記述するパラメータのカオス化という形で明確に導入される。さらに、このカオス的なソリトンにより、ランダムな位相をもつ小振幅の平面波が励起されることがわかる。そして、この系のエネルギー・スペクトラムが、ソリトンパラメータの統計的性質を使って計算される。

§2. モデル方程式

非線形シュレーディンガー方程式に、線形成長、非線形減衰、散逸項、周期的外場を付け加えた方程式²⁾を出発点にとる。

$$q_t - i q_{xx} - 2i |q|^2 q = (\epsilon_1 - \epsilon_2 |q|^2) q + \epsilon_3 q_{xx} - \frac{\epsilon_0}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega_0 t} \quad (1)$$

但し、 $0 < \epsilon_j \ll 1$ ($j=0, 1, 2, 3$), $\omega_0 = 2\pi/T$ 。

(1)の最後の項は、他のモードとの相互作用を解析的取り扱いが容易になるように理想化したものである³⁾。この初期値問題を解く摂動法は種々提案されているが⁴⁾、摂動の1次までに限ると、今の場合、同じ結果を与える。逆散乱法を使う摂動法では、場の量 $q(x, t)$ を散乱データでパラメータ化して、そのパラメータの時間発展を摂動法で取り扱う。初期に1つのソリトンのみが存在する場合を考える。このような初期値を選ぶ積極的な理由はないが、多くのソリトンがあっても、充分時間が経つと各ソリトンは充分離れて、その間の衝突がなくなると考えられる（無限区間の場合）。そうすると、ソリトンは4つのパラメータで記述でき、その時間発展は、摂動の1次までで、次の方程式によって支配されることがわかる。なお、非ソリトン部分も励起されるがその大きさは小さく ($O(\epsilon_j)$)、ソリトン部分へのはね返りは無視でき、その小さな非ソリトン部分については後で議論する。

$$\eta_t = -\frac{\partial H}{\partial \psi} + 2\eta [\epsilon_1 - \{8\epsilon_2 \eta^2/3 + \epsilon_3(4\eta^2/3 + p^2/\eta^2)\}], \quad (2a)$$

$$\psi_t = \frac{\partial H}{\partial \eta}, \quad (2b)$$

$$p_t = -\frac{\partial H}{\partial X} + 2p \left[\varepsilon_1 - \left\{ 8\varepsilon_2 \eta^2/3 + \varepsilon_3 (4\eta^2 + p^2/\eta^2) \right\} \right], \quad (2c)$$

$$X_t = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (2d)$$

ここで,

$$H = -4\eta^3/3 + p^2/\eta^2 - \frac{\pi}{2} f(t) \operatorname{sech} \left\{ -\frac{4p}{4\eta^2} \right\} \cos \psi,$$

$$f(t) = -\frac{\varepsilon_0}{T} \sum_n e^{in\omega_0 t} = -\varepsilon_0 \sum_n \delta(t - nT).$$

パラメータ (η, ψ, p, X) に対応するソリトン解は

$$q_s(x, t) = -2i\eta \operatorname{sech} \{ 2\eta(x - X) \} \exp \left[i \left\{ (p/\eta)(x - X) - \psi \right\} \right], \quad (3)$$

で与えられる。摂動のない場合, (2a)~(2d) より,

$$\psi(t) = -\omega_s t + \psi(0), \quad \eta(t) = \eta(0),$$

$$X(t) = (2p/\eta)t + X(0), \quad p(t) = p(0),$$

$$\omega_s = 4\eta^2 + (p/\eta)^2,$$

を得る。従って, ソリトンは, 固有の摂動数 ω_s で特徴づけられる内部自由度と, 速度 $2p/\eta$ をもつ並進運動の自由度をもつ 2 自由度系として取り扱える。 $\varepsilon_j \neq 0$ ($j=1, 2$), $\varepsilon_0 = 0$ の場合, 成長と減衰項がつり合って, 次のような平衡パラメータが得られる。⁵⁾

$$\textcircled{1} \quad \varepsilon_3 \neq 0, \quad \eta^2 = 3\varepsilon_1 / \{ 4(2\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \}, \quad p = 0.$$

$$\textcircled{2} \quad \varepsilon_3 = 0, \quad \eta^2 = 3\varepsilon_1 / 8\varepsilon_2 \equiv \eta_0^2, \quad p = p(0).$$

①の場合は, 十分時間が経つと, ソリトンの速度が消えるので, ソリトンの速度が有限という意味でより一般的な②の場合を取り扱う。

§3. ソリトンのカオス化

p の代わりに速度パラメータ $\nu \equiv -p/2\eta$ を導入し, §2 で定義された②の平衡値 (η_0, ν_0) からの η, ν のずれ $\tilde{\eta}, \tilde{\nu}$ ($\ll 1$) を使い, δ -関数の列を積分すると, 次の差分方程式を得る。

$$\tilde{\eta}_{n+1} = e^{-\Gamma} (\tilde{\eta}_n + \hat{\varepsilon}_0 \sin \psi_n), \quad (4a)$$

$$\psi_{n+1} = \psi_n - \omega_{s0} T - K \sin \psi_n - 8T \left\{ \eta_0 \tilde{\eta}_n (1 - e^{-\Gamma}) / \Gamma + \nu_0 \tilde{\nu}_n \right\}, \quad (4b)$$

$$\tilde{\nu}_{n+1} = \tilde{\nu}_n - (\nu_0/\eta_0) \hat{\varepsilon}_0 \sin \psi_n, \quad (4c)$$

$$X_{n+1} = X_n - 4\nu_0 T + 4(\nu_0/\eta_0) \hat{\varepsilon}_0 T \sin \psi_n - 4\tilde{\nu}_n T, \quad (4d)$$

ここで $\Gamma = 4\varepsilon_1 T$, $\tilde{\eta} = \eta - \eta_0$, $\tilde{\nu} = \nu - \nu_0$, $\eta_0 = (3\varepsilon_1/8\varepsilon_2)^{1/2}$, $\hat{\varepsilon}_0 = \frac{\pi}{2} \varepsilon_0 \operatorname{sech}(\pi\nu_0/\eta_0)$, $\omega_{s0} = 4(\eta_0^2 + \nu_0^2)$, $K = 8\eta_0 \hat{\varepsilon}_0 T \{(1 - e^{-\Gamma})/\Gamma + (\nu_0/\eta_0)^2\}$, $\psi_n = \psi(nT)$, $X_n = X(nT)$ 。マップ(4)のヤコビアンは $\exp(-\Gamma) < 1$ ($\Gamma > 0$) であるので、このマップは、位相空間の体積を縮小する。(4a), (4b)は $\nu_0 = 0$ の場合、ストレンジ・アトラクターのモデルとしてすでに研究されているマップと同じになる。³⁾ (4b), (4c)はハミルトン系の標準マップ⁶⁾ と呼ばれ、広範に研究されているものとほとんど同じである。また、 X は ψ と似た発展をすることもわかる。以上のことからマップ(4)の次の性質が容易に推定され、数値計算によって確かめられる。

① パラメータ空間でカオスの軌道の発生する条件…… $|K| > 1$, つまり $\varepsilon_0 T > O(1)$ 。

この時、二つの隣り合う軌道間の距離は指数関数的に、速度 $h \approx (\ln |K|)/T$ で時間とともに増大する。 ψ_n の列はモード 2π で、位相相関時間 $\tau_p = h^{-1} \approx T/\ln |K|$ の後、ランダムとなる。つまり

$$\langle e^{i\tilde{\psi}(t+\tau)} e^{-i\tilde{\psi}(t)} \rangle = e^{-|\tau|/\tau_p}, \quad (5)$$

ここで $\tilde{\psi} = \psi + \omega_{s0} t$, $\langle \dots \rangle$ は時間平均または、 ψ は初期値に対するアンサンブル平均である (ψ のエルゴード性が成立)。

② この時、 $\tilde{\nu}$ の拡散。

拡散係数は(4c)より $D = (\nu_0/\eta_0)^2 \hat{\varepsilon}_0^2 / \tau_p$ で与えられ、その特徴的時間は、 $\tau_D = \nu_0^2 / D \sim T/\varepsilon_0^2$ で評価される。簡単化されたマップ(4)は $T < t \ll \tau_D$ の範囲で有効。

③ $|K| > 1$ に加えて、 $\Gamma > 1$ が成立する時、 η はその平衡値 η_0 付近のストレンジ・アトラクター上に分布する(図1)。

④ ソリトンの中心位置 X は、速度パラメータ ν の拡散に伴い、平衡軌道 $X = -4\nu_0 t$ からランダムにそれてゆく。平均的なずれは $\{\langle \Delta X \rangle^2\}^{1/2} \sim \int^t \langle (4\Delta\nu)^2 \rangle^{1/2} dt \approx \frac{8}{3} D^{1/2} t^{3/2}$ で評価できる。

このように、ソリトンを規定するパラメータが、カオス化する時、そのソリトンを「カオス的なソリトン」と呼ぶことにする。

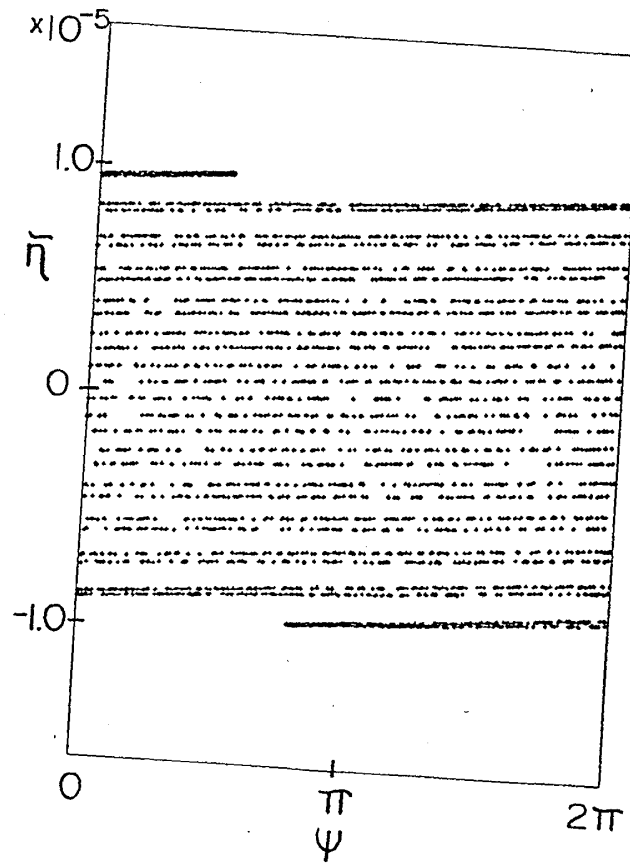


図1. $|K|=41.9$, $\Gamma=6.0$ の場合の $(\tilde{\eta}, \psi)$ 面上の軌道

§4. ランダム位相の平面波

カオス的なソリトンの発生と同時に、種々の非ソリトンの自由度の励起が起こるが、充分大きな時刻 t と、ソリトンから充分離れた空間位置でも有限な非ソリトン場を考える。そうすると、摂動の最低次の近似までとることにより、次のような、ソリトンのランダムな位相を起因とするランダム位相をもつ平面波の集合が得られる。

$$q_c(x, t) \approx -\frac{\epsilon_0}{4T} \sum_{s=\pm 1} \sum_n Q_{n,s}(\xi_{n,s}) \exp[-i\{(2\xi_{n,s})^2 t + 2\xi_{n,s} x\}] \times \exp[2i\{(\xi_{n,s} - 2\nu_0)\tilde{X} - \tilde{\psi}\}], \quad (6)$$

但し、 $Q_{n,s}(\xi) = \frac{\pi}{2} \xi \operatorname{cosech} \left\{ \pi (\xi - 2\nu_0) / 2\eta_0 \right\} / (\xi + is\eta_0)^2 / (\eta\omega_0 - 4\nu_0^2 - 8\eta_0^2)$, $\xi_{n,\pm 1} = \nu_0 \mp (n\omega_0/4 - \nu_0^2 - 2\eta_0^2)^{1/2}$ (複号同順), $\tilde{X} = X + 4\nu_0 t$. ここで $\xi_{n,\pm 1}$ は共鳴条件 $\omega_\xi = n\omega_0 - 2\omega_{s0}$, $\omega_\xi = 4\xi(\xi - 2\nu_0)$ の2根である。また、(6)の s についての和は、 $s=+1$ の時、 $\eta(x-X) \gg 1$, $s=-1$ の時 $\eta(x-X) \ll -1$ の領域でのみ考える。従って、励起された平面波は、いづれも、ソリトンから離れて行く方向に伝播していることが容易に確められる。励起された平面波の最大振幅は、その波数 $(2\xi_{n,s})$ が、ソリトンの特徴波数 $(2\nu_0)$ の倍の付近

で実現されることも容易にわかる。

§5. エネルギー・スペクトラム

カオス的なソリトンと、ランダム位相の平面波のエネルギー・スペクトラムが、 $T < t \ll \tau_D$ の領域で、 $\tilde{\psi}$, $\tilde{X}$ の統計的性質を使って計算することが出来る。結果は、

ソリトンに対しては

$$S(k, \omega) = \frac{\pi^2}{L} \operatorname{sech}^2 \left\{ \pi(k - 2\nu_0)/4\eta_0 \right\} \Delta\omega_s / \{ \hat{\omega}_s^2 + (\Delta\omega_s)^2 \},$$

平面波に対しては

$$S_c(k, \omega) = \frac{\pi}{2} (\varepsilon_0/T)^2 \sum_{s=\pm 1} \sum_n |Q_{n,s}(\xi_{n,s})|^2 \delta(k - 2\xi_{n,s}) \Delta\omega_c / \{ \hat{\omega}_c^2 + (\Delta\omega_c)^2 \},$$

ここで、 $\Delta\omega_s = 2\pi\omega_0 \{ \ln |K| + g(k) \}$, $\hat{\omega}_s = \omega + 4\nu_0 k - \omega_{s0}$, $\hat{\omega}_c = \omega + 4\xi_{n,s}^2$, $\Delta\omega_c = 2\pi\omega_0 \{ \ln |K|' + g(2\xi_{n,s} - 4\nu_0) \}$ 。但し、次の半経験的な関係式を使った。

$$\langle e^{2i\tilde{\psi}(t+\tau)} e^{-2i\tilde{\psi}(t)} \rangle = e^{-|\tau|/\tau_p'},$$

$$\langle e^{ik\tilde{X}(t+\tau)} e^{-ik'\tilde{X}(t)} \rangle = (2\pi/L) \delta(k - k') e^{-g(k)|\tau|/T},$$

$$\langle e^{ia\tilde{X}(t)} e^{ib\tilde{\psi}(t')} \rangle = 0,$$

ここで、 $\tau_p' = T/\ln |K|' \approx \tau_p$, L は $\tilde{X}$ のとりうる範囲, a, b は 0 でない定数, $g(k)$ は k があまり小さくない限り, $\ln |K|$ と同程度の大きさをもつ。ソリトンの周波数の拡がりはいさ ($\Delta\omega_s \sim \omega_0$) けれども、1 つだけのソリトンに対して起こりうることに注意したい。

§6. おわりに

もともと無限自由度の系を、1 つのソリトンに着目して、摂動法により有限自由度の系の問題に帰着して考えたので、ここでの議論は、ある有限の時間範囲でのみ有効である。ソリトンパラメータに対しては特異摂動法の考えが使われているので少なくとも $t \sim O(\varepsilon^{-1}) \sim O(T)$ (カオス化する場合) で有効であり、 $t \sim O(\varepsilon^{-2}) \sim \tau_D$ では高次項の影響を考慮しなければならない (これが、簡単化されたマップ (4) を使った理由の 1 つでもある)。非ソリトン部分については、その制限が明確ではないが、少なくとも、 $T < t \ll O(\varepsilon^{-2})$ を満足しなければならない。線形成長の効果が $O(\varepsilon)$ の場の量の変化に、どの時間スケールで効いてくるのか、現在の段階では、はっきりしないが非ソリトン部分の大部分は波束の形で励起されるので、 $t \sim O(\varepsilon^{-1})$

程度までは強い分散の効果(0次)による減衰が、 $O(\epsilon)$ の線形成長を上まわると考えられる。いずれにせよ、この問題の明確な答はソリトン系の摂動理論の今後の発展によって与えられると思われる。また、それにより、無限自由度のソリトン系においても、K-A-M面のような準可積分面の存在が、ハミルトン系になる場合には証明されると期待される。

参考文献

- 1) K. Nozaki, Phys. Rev. Lett. **49**, 1883 (1982).
- 2) K. Stewartson and J. T. Stuart, J. Fluid Mech. **48**, 529 (1971).
- 3) G. M. Zaslavsky, Phys. Lett. **69A**, 148 (1978).
- 4) D. J. Kanp and A. C. Newell, Proc. R. Soc. Lond. **A361**, 413 (1978); V. I. Karpman, Physica Scripta **20**, 462 (1979).
- 5) N. R. Pereira and L. Stenflo, Phys. Fluids **20**, 1733 (1977).
- 6) B. V. Chirikov, Phys. Reports **52**, 265 (1979).

非可積分系の孤立波とカオス

静岡大・教養 長 島 弘 幸

1. はじめに

非線形分散波動においては、従来から Korteweg-de Vries方程式や、変形された Korteweg-de Vries 方程式といった完全積分系は非常に詳しく研究されて来た。これらの完全積分系以外の非線形分散波動方程式は、どのような特徴を有しているのでしょうか？ 一つの簡単な、かつ物理的意味の有する非可積分系は次の様なものがある。

$$u_t + uu_x + (1-s) \delta^2 u_{3x} - s r^2 u_{5x} = 0 \quad (1)$$

ここで、添字はそれに関する偏微分を表わす。また δ^2 と r^2 は数値計算の便宜上それぞれ 4.84×10^{-4} , 7×10^{-7} とする。

$s = 0$ の場合、方程式 (1) は K-dV 方程式となり可積分系となる。また $s = 1$ の場合は K-dV の 3 次の方程式の代りに 5 次の分散項を有する波動方程式となる。

この場合 $s = 0$ 以外は方程式 (1) は次の三個の多項式型の保存密度を有す。