

同様の q_α , q_β -相転移は, バンド・クライシスにおいても発生し, q_α -相転移は, 非双曲的なアトラクターでは常に出現し, 他の種類の q -相転移もアトラクターの構造に応じて現れることがわかる。(詳論は, 準備中の論文を参照ください。) なお 1.次元写像においてもこの q -相転移は存在する。

講演では, この他このポテンシャル $\phi(q)$ と $f(\alpha)$ の関連についても述べた。これより $A_n(q)$ の相転移は $f(\alpha)$ にも現れることが予想される。また, $\phi(q)$ はアトラクターに含まれる周期点によって記述されることにも触れた。これらについては T. Morita et al., Prog. Theor. Phys. 79. No.2 (1988) を参照下さい。

34. ノイズのある強制振動 duffing 方程式 の示すリットサイクルーカオス転移

東工大・理 小 野 雅 也, 椎 野 正 壽

§ 1 はじめに

カオスを起こす系に対する熱浴の影響を、熱擾乱としてあらわに取り入れたとき、それによって系の振舞いは如何に変化するか。この問題を明らかにすることは、実験室系などのたえずノイズにさらされている系と、ノイズが無い純粋な系との対応をつけ、カオスに対する知見を新たな視点から得るという意義がある。

すでにこの問題に関していくつかの研究が行われてきた。たとえば、J. P. Crutchfield と B. A. Huberman は、period doubling bifurcation type のリットサイクルーカオス転移における bifurcation gap の存在を発見している (1)。また、津田、松本は、B-Z モデルの一次元マップにノイズを加えることによりカオスが消失した事例を報告している (2)。

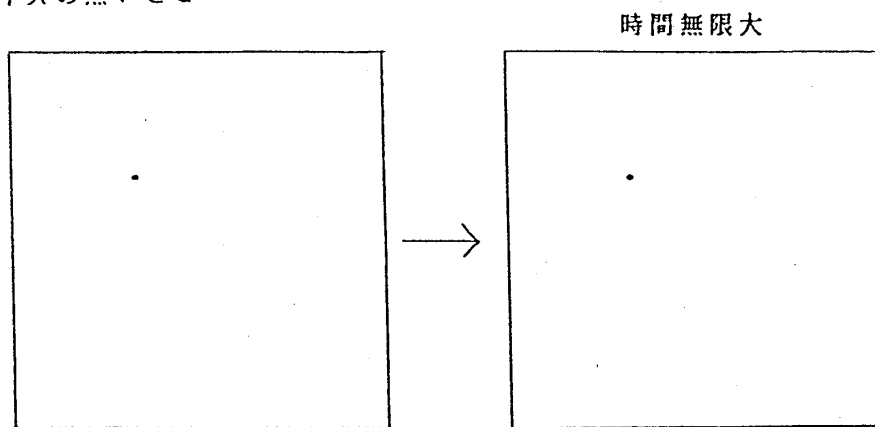
ところがその一方で、ノイズの加わることによる系の変数の分布関数を考慮し

た場合、その系は時間無限大の極限において、軌道上に広がった唯一の定常分布を持つことが知られている(3)。この定常分布はただか周期的に振舞うので、その平均値もまた周期的である。すなわち、時間無限大まで時間平均を取ると、たとえノイズの無いときの軌道がカオスであっても、ノイズの加わった下ではカオスは存在しない。

これをPoincaré map上で見てみよう。まず軌道がリミットサイクルの場合、ノイズが無いときのPoincaré mapは点であり、これは時間を無限大にしても変わらない(図1-1(a))。しかしこれにノイズを加えると、軌道が幅を持ちPoincaré mapも少しぼやける。そして時間を無限大にすると分布関数が軌道上に広がるため、Poincaré mapもまた広がる(図1-1(b))。これと同様の軌道上の拡散はカオス軌道に対しても起こるの

図1-1 Poincaré map (リミットサイクル)

(a) ノイズの無いとき



(b) ノイズのあるとき

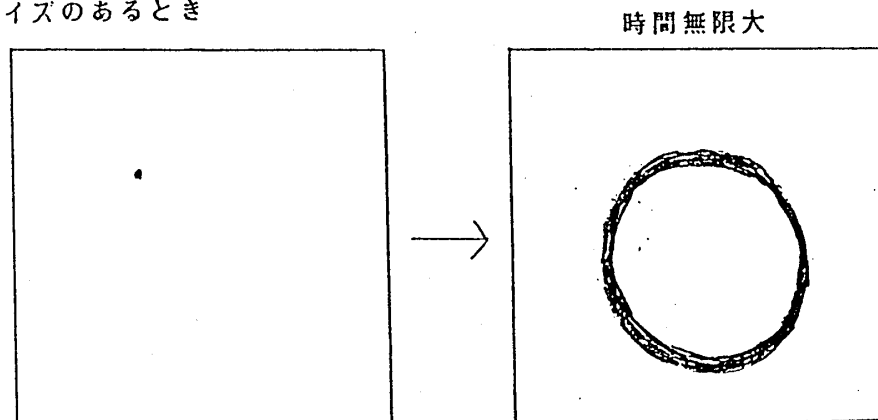
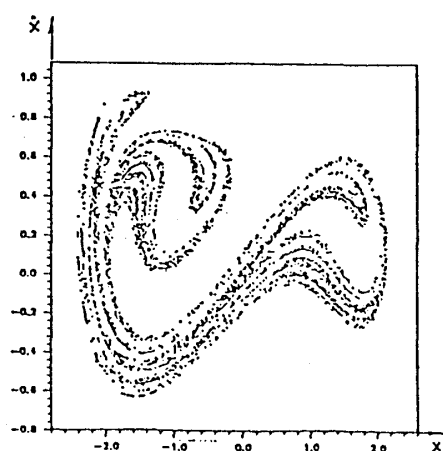
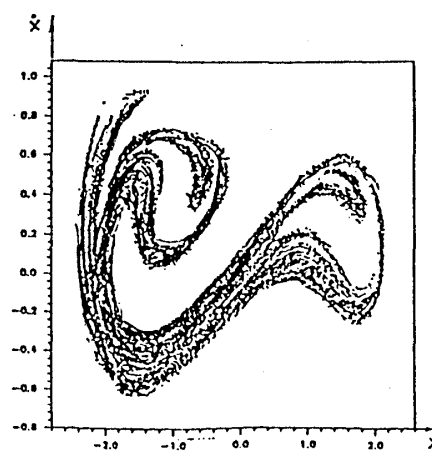


図 1-2 Poincaré map (カオス)

(a) ノイズの無いとき



(b) ノイズのあるとき (時間無限大)



で、Poincaré map もぼやけてしまいカオスは観測されなくなる (図 1-2)。

しかし、ノイズが小さく、有限時間内の観測における分布の広がり軌道全体の広がり比べて小さいときは、分布の広がりよりも大きな空間スケールにおいて系を眺めると系は決定論的に振舞うように見える。

以上の考察より、先に挙げた、ノイズによるリミットサイクルーカオス転移の例は、「定常分布に漸近する途中における大きなスケール上での分岐」としてとらえられる事がわかる。ここで言う「分岐」は、定常分布を考慮したときには起こらない現象なので、通常厳密に定義されている分岐とは異なる見かけ上のものである。すなわち、有限の観測時間内において、ノイズのわずかな増加が、単に軌道をぼやけさせるのみならず、大きなスケールで見たときにその軌道の安定性をも変化させてしまう現象を指している (図 1-3)。この、「大きなスケール上での分岐」の機構を、ノイズが無い場合の分岐の仕組みと対応させて明らかにするのが本研究の目的である。

議論の対象としては、強制振動 Duffing 方程式にノイズを加えた系

$$\ddot{x} + a \dot{x} + b x + c x^3 = V \cos(\omega t) + \eta(t) \quad (1)$$

$$\langle \eta(t) \eta(t') \rangle = 2D \delta(t - t')$$

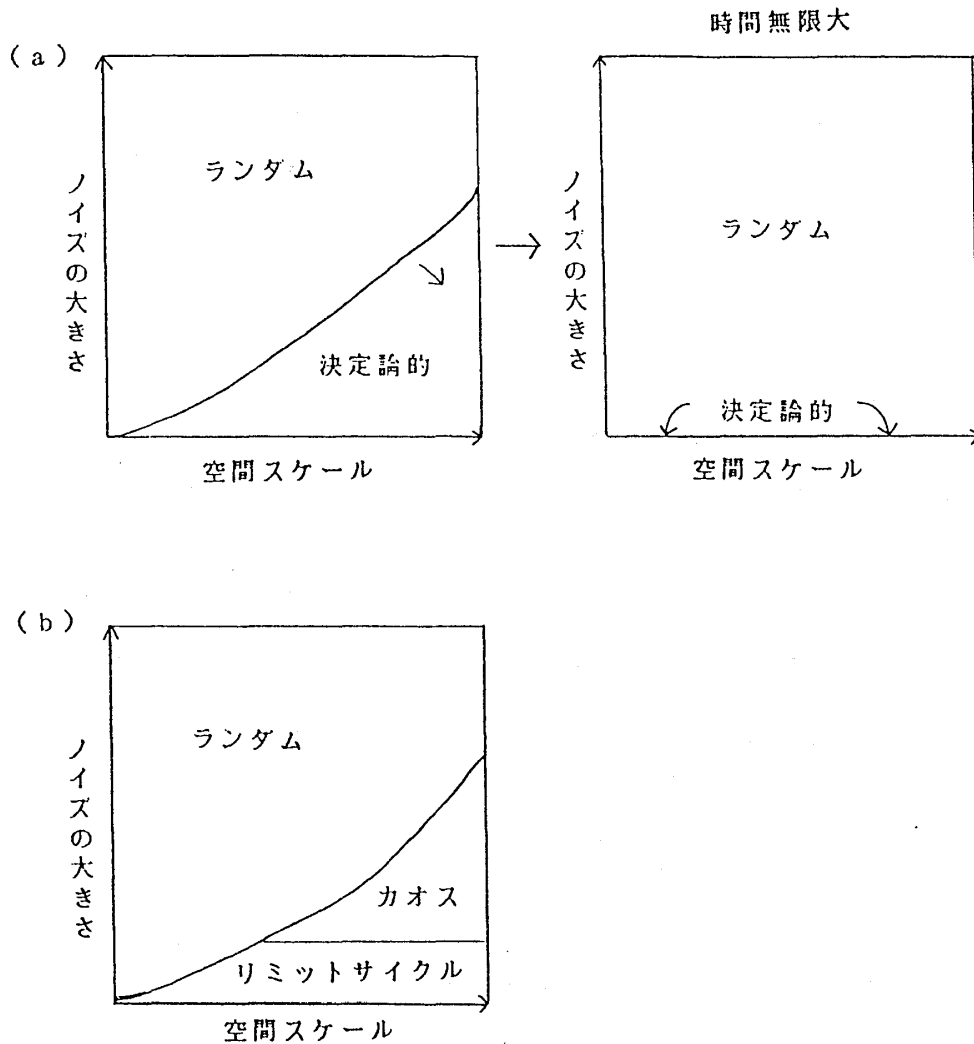


図 1-3 大きなスケール上での分岐

(a) ノイズの加わった場合も、有限の観測時間内では、ノイズの大きさよりも大きな空間スケール上で系は決定論的に見える。(この領域は時間無限大の極限で消失する。)

(b) 決定論的な領域内における、ノイズレベルの増減に伴う系の分岐を、大きなスケール上での分岐 と名付ける。

を取り扱う。この方程式はノイズが無い場合にカオスを起こすパラメーター領域やカオスへのルートについて多くの研究がなされていて、ノイズの影響を考えるのに適している系の一つである(4, 5, 6, 7)。本研究では、ノイズの無い場合の軌道がリミットサイクルのものとカオスのものについて(1)式をそのままシミュレートして得た軌道を相関次元解析等によって調べた。また、系の分布関数をそのまま取り扱う一つの方法として、Gauss近似により分布の平均値(すなわち最も確からしいパス)の振舞いを求めた。さらに、このリミットサ

イクルーカオス転移が現実の系においても存在するのか否かを調べるために、アナログ回路によるシミュレーションも行った。以下ではその結果について報告する。

§ 2 大きなスケール上での分岐

2. 1 数値シミュレーション

(1) 式の代わりに、

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -a y - b x - c x^3 + V \cos(\omega t) + \eta(t) \\ \langle \eta(t) \eta(t') \rangle &= 2D \delta(t - t')\end{aligned}\quad (2)$$

をRunge-Kutta-Gill法により計算する。但し、

$$a = 1, \quad b = -10, \quad c = 100, \quad \omega = 3.5$$

$$V = 1.45 \quad (D=0 \text{ でリミットサイクル}), \quad 1.55 \quad (D=0 \text{ でカオス})$$

とし、ノイズ η は、平均 0、分散 $2D$ のGaussian white noise を仮定している。実際の計算では、各積分ステップごとに D に相当する大きさの乱数(平均 0、分散 $[2D \times (\text{積分の刻み幅})]$ の正規乱数)を x の値に加えている。この計算によって得られた軌道について $T = 2\pi/\omega$ ごとにPoincaré sectionを取り(今回は10000点)、そのmapの相関次元を求めた(8)。それらを図2-1~2-7に示す。

(a) 図に示した各点に対してcorrelation integral

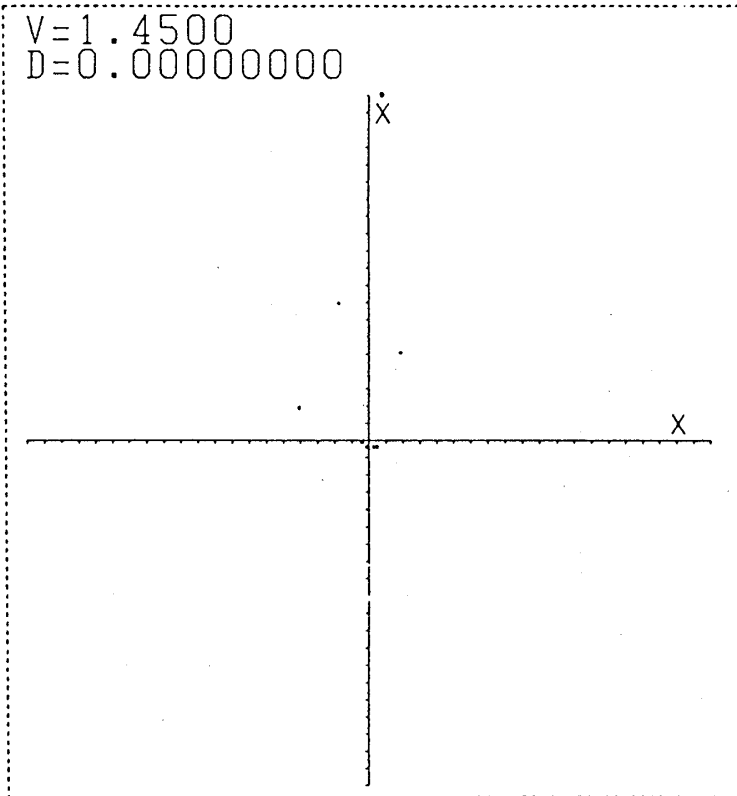
$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} H(r - \|x_i - x_j\|)$$

(H はヘビサイド関数; $z \geq 0$ なら $H(z) = 1$ 、 $z < 0$ なら $H(z) = 0$) を計算し、その距離依存性が、

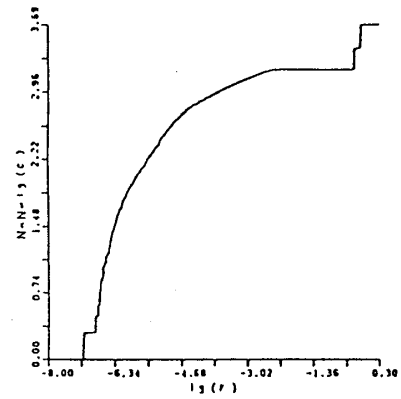
$$C(r) \sim r^d$$

の時、指数 d がmapの相関次元になる。この d の値がPoincaré sectionを取る位相によらないとき、もとの軌道の相関次元は

図 2 - 1 (a) Poincare map



(b) correlation integral



(c) dimension

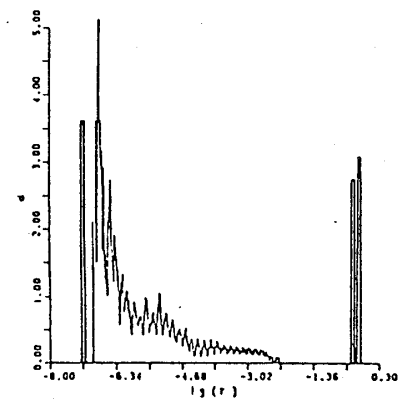
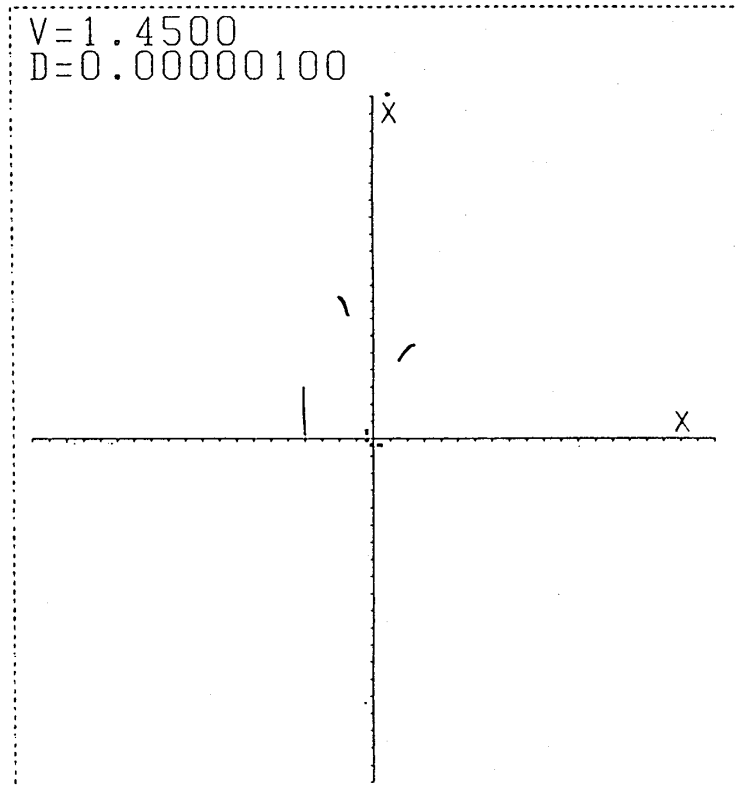
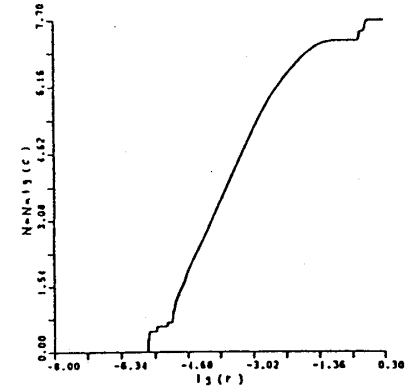


図 2 - 2 (a) Poincare map



(b) correlation integral



(c) dimension

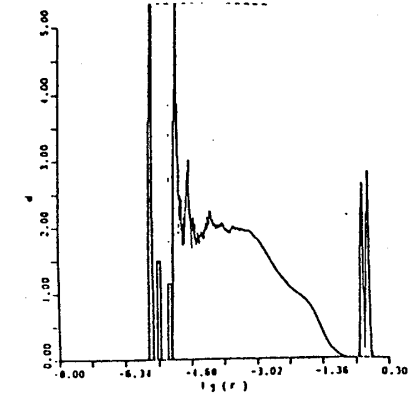
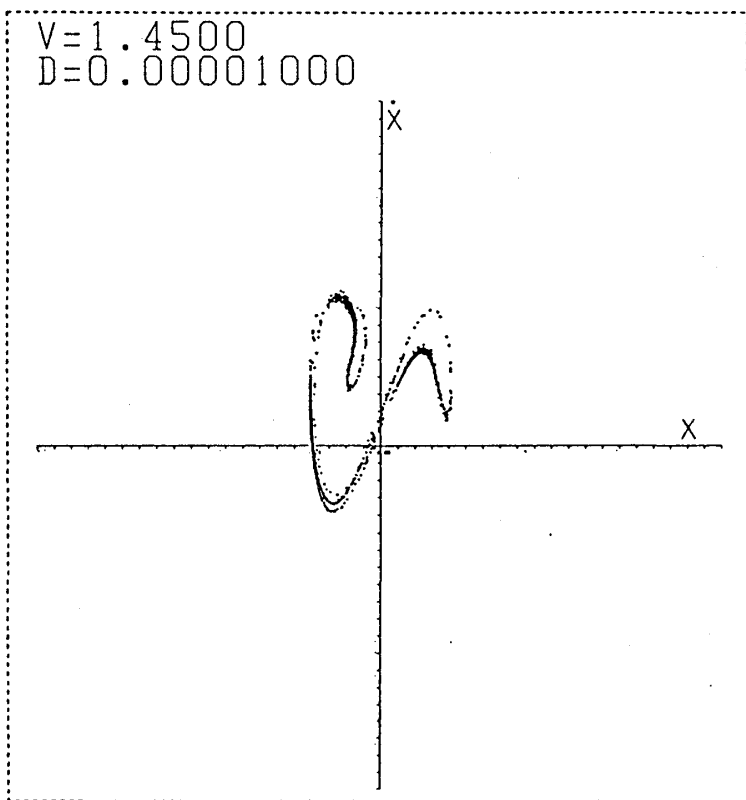
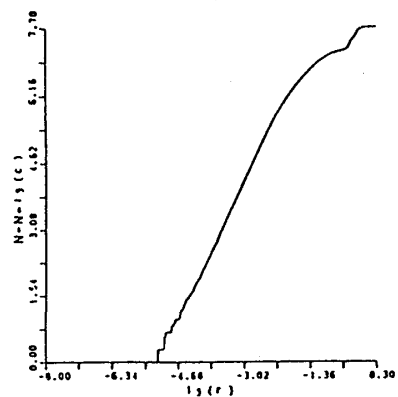


図 2 - 3 (a) Poincare map



(b) correlation integral



(c) dimension

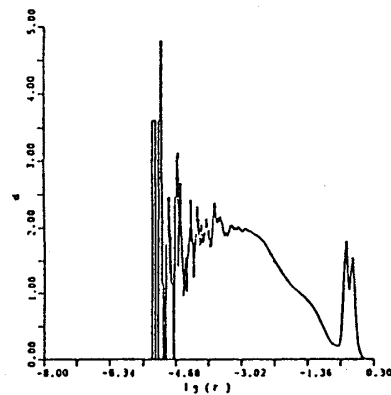
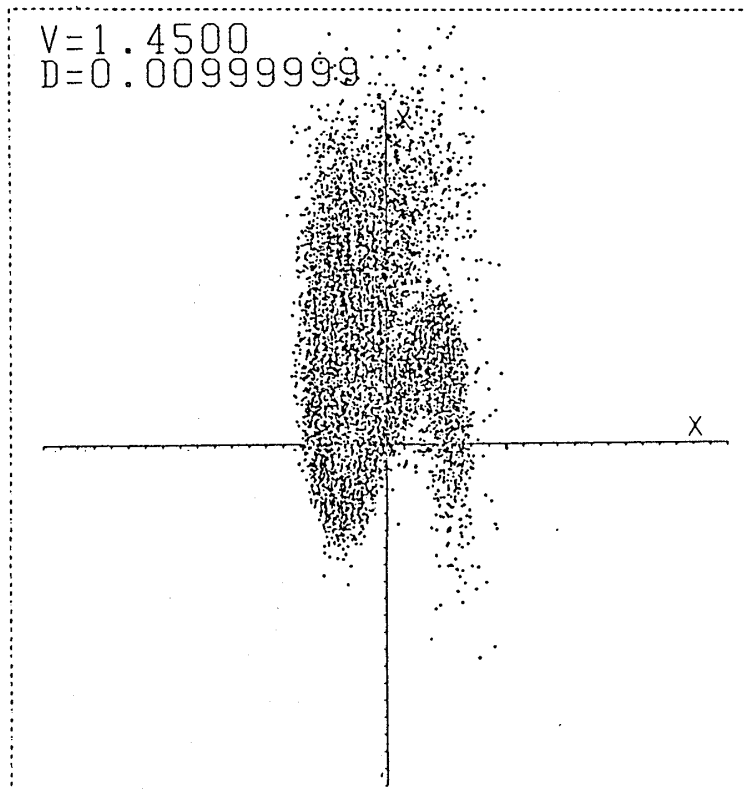
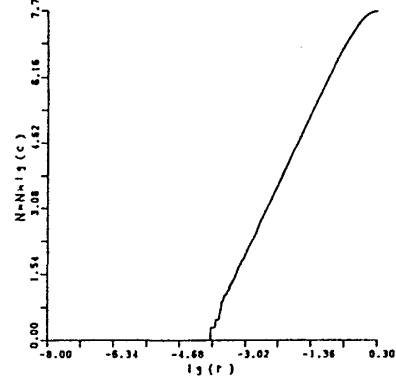


図 2 - 4 (a) Poincare map



(b) correlation integral



(c) dimension

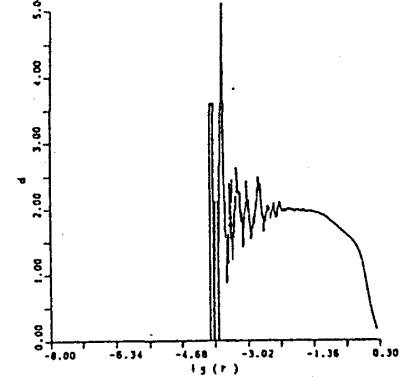
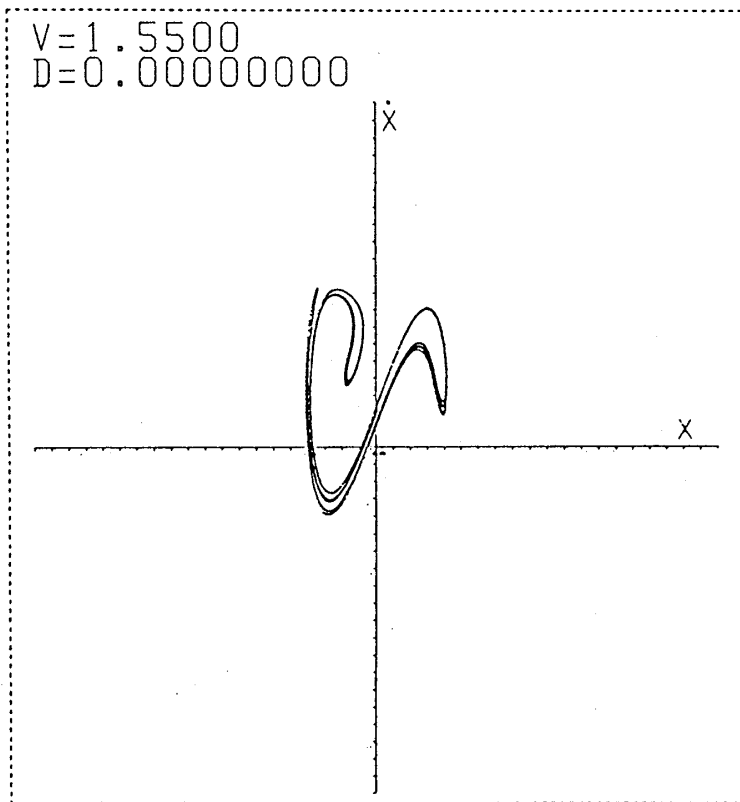
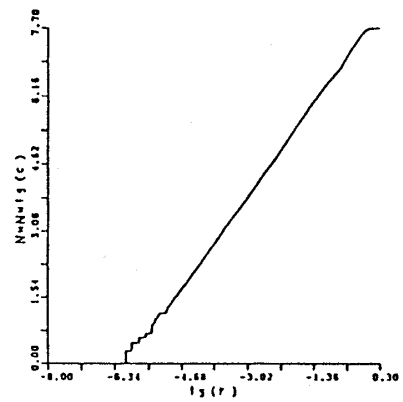


図 2-5 (a) Poincare map



(b) correlation integral



(c) dimension

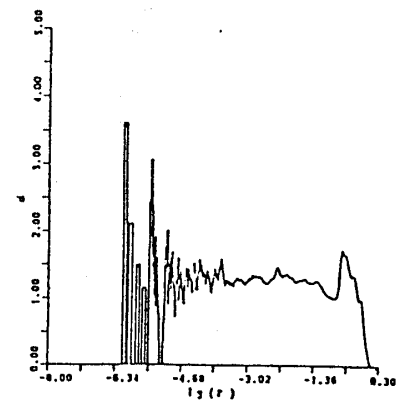
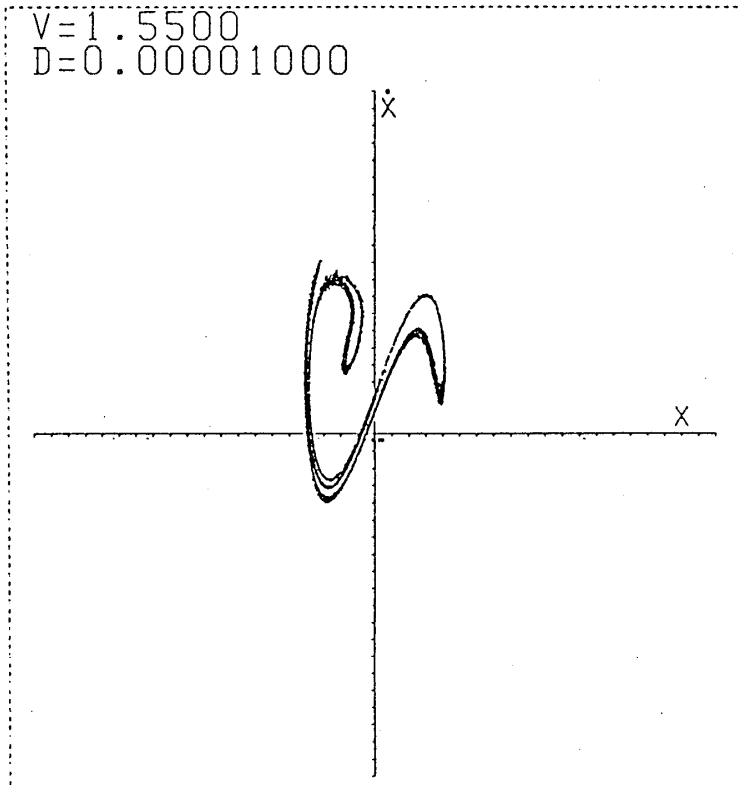
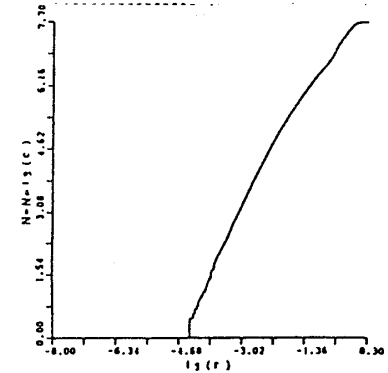


図 2-6 (a) Poincare map



(b) correlation integral



(c) dimension

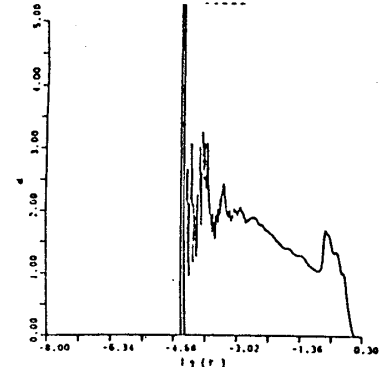
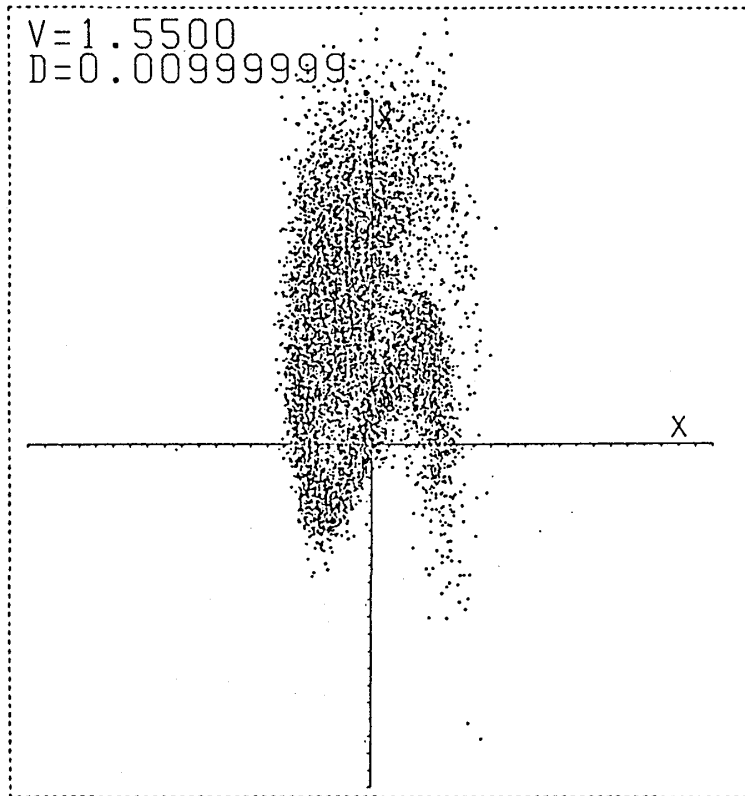
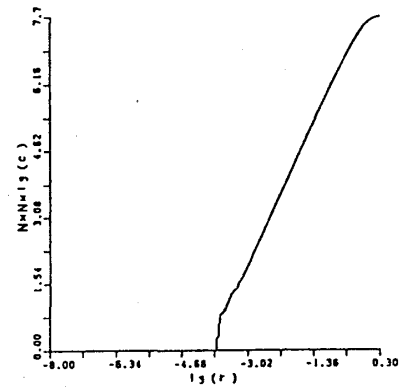


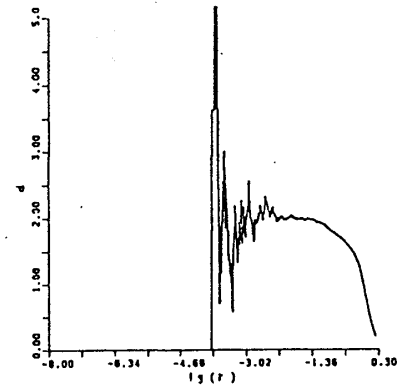
図 2 - 7 (a) Poincare map



(b) correlation integral



(c) dimension



$$r = d + 1$$

で与えられる。C (r) と d (map の相関次元) の、距離依存性をそれぞれ図 (b) と図 (c) に示す。(距離 r は対数目盛りで書いてある。)

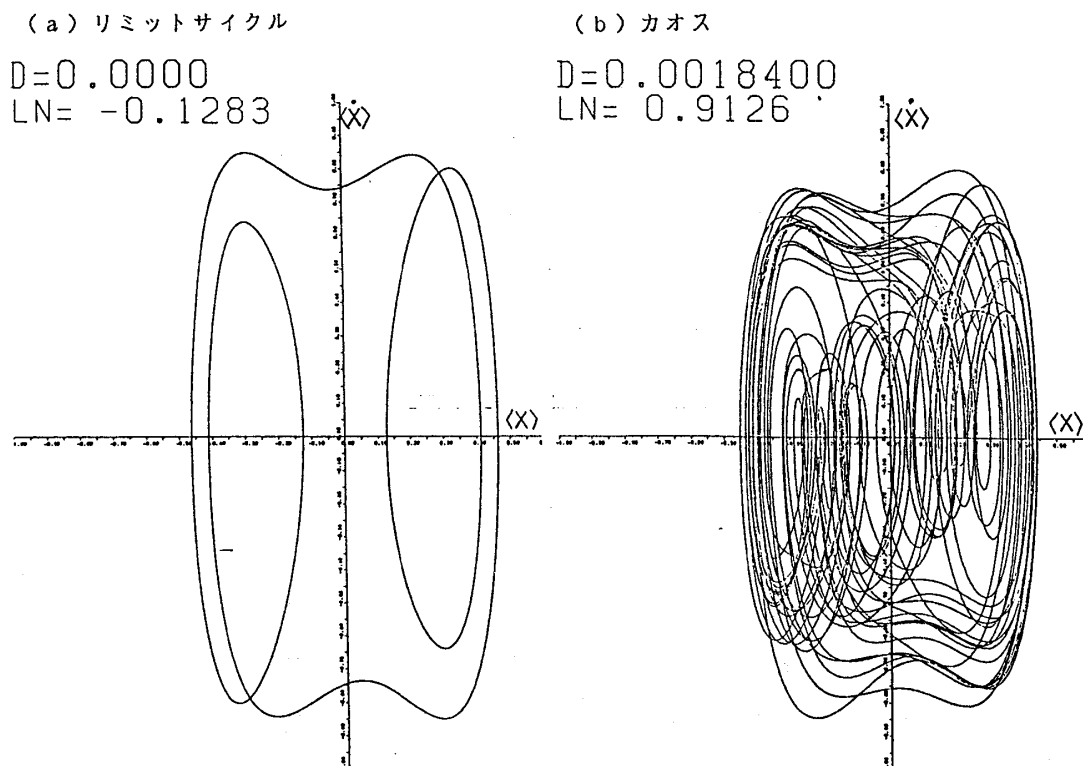
これらより、 $V = 1.45$ の場合は、ノイズの加わることによって単に軌道がぼやけるだけでなく、ノイズによるぼやけより大きなスペース上においても map の状態が変化し (リミットサイクル → カオス)、それに伴って次元も変化していることがわかる (図 2-2 → 2-3)。これに対して、 $V = 1.55$ の場合は単に map がぼやけるだけである。(図 2-5 → 2-6) どちらの場合も、ノイズが大きくなると map は完全にぼやけてしまう。(図 2-4, 2-7) この結果は先の図 1-3 の考え方と合っている。

2. 2 Gaussian-decouple 近似

§ 1でも述べたように、ノイズの小さい場合は、系の分布関数の広がりもまた小さい。このとき、分布関数は鋭い単峰形をしているであろうから、この形を Gaussian分布で近似することができる(9)。すると(2)式の位相平均を取った式は以下のモーメントに関する連立常微分方程式になる。

$$\begin{aligned}
 \langle \dot{x} \rangle &= \langle y \rangle \\
 \langle \dot{y} \rangle &= -b \langle x \rangle - a \langle y \rangle - 3c \langle x \rangle \langle x^2 \rangle + 2c \langle x \rangle^3 \\
 &\quad + V \cos(\omega t) \\
 \langle \dot{x}^2 \rangle &= 2 \langle x y \rangle \\
 \langle \dot{y}^2 \rangle &= -2a \langle y^2 \rangle - 2b \langle x y \rangle - 6c \langle x^2 \rangle \langle x y \rangle \\
 &\quad + 4c \langle x \rangle^3 \langle y \rangle + 2 \langle y \rangle V \cos(\omega t) + 2D \\
 \langle \dot{x} y \rangle &= -b \langle x^2 \rangle - 3c \langle x^2 \rangle^2 + 2c \langle x \rangle^4 + \langle y^2 \rangle \\
 &\quad - a \langle x y \rangle + \langle x \rangle V \cos(\omega t)
 \end{aligned} \tag{3}$$

図2-8 (3)式のシミュレーションによる位相図 $V=1.45$
(L. N: Lyapunov number)



これらの方程式を計算すれば、近似された分布関数の時間発展が求まる。

もちろんカオス軌道に対しては、その軌道拡大性から、単峰形の分布関数を仮定することは不可能である。しかしこの近似法はリミットサイクル軌道に対しては適用できるので、リミットサイクル軌道の安定性の目安にはなりうる。(3)式を計算しリアプノフ指数を求めた結果を図2-8に示す。この場合も、ノイズの増加により、リミットサイクルからカオスへの転移が見つかった。その転移点でのノイズの大きさは2.1で行った軌道そのもののシミュレーションにおける値よりも10倍ほど大きかったが、これらの定量的な意味付けは現在検討中である。

2. 3 アナログシミュレーション

上に述べてきた「大きなスケール上での分岐」がコンピューターシミュレーション上のみでなく、現実起こりうるものであるのかを調べるために、(1)式を積分方程式にした、

$$x(t) = \int_{ds} \left[-ax + \left\{ -bx - cx^3 + V \cos(\omega t) + \eta(t) \right\} d\tau \right]$$

を、OPアンプによるアナログ回路によってシミュレーションした。(ノイズ発生機により回路にノイズを加えた。)一般に、アナログシミュレーションはデジタルに比べ、精度は劣るが計算速度は早いため、このduffing方程式の解析にもよく用いられてきた。(4, 6, 7)

今回のシミュレーションの結果、2.1, 2.2で述べたのと同様に、ノイズの増加によって、リミットサイクルが不安定化することがわかった。しかし、これがカオスなのか、あるいはいくつかの軌道の間を飛び回っているのかなど、詳細を議論するのに必要な精度のある結果はまだ得られていない。そのため現在装置を改良中であり、詳しい結果は後に報告する予定である。なお、このアナログコンピューターとデジタルコンピューターとの対応については、同じパラメーターで計算してもアナログだとカオスになるのにデジタルだとならないという報告(5)もあるように、まだ多くの不明な点があり、注意が必要である。

§ 3 まとめ

我々は、「定常分布に漸近する途中における大きなスケール上での分岐」の機構を明らかにする目的で、強制振動 *Duffing* 方程式にノイズを加えた系の数値シミュレーションを行った。その結果、ノイズの大きさのわずかな増加による、大きなスケール上でのリミットサイクル-カオス転移が見つかった。その詳細に関しては現在解析中である。

今後は、分岐点近傍での系の振舞いをより精密に求め、ノイズの無いときのリミットサイクル-カオス転移の機構と、ノイズが加わったときのリミットサイクル、カオス両軌道の安定性との関係を調べたい。今回示した例は、ノイズが加わったときにカオス軌道の方が安定な場合であったけれど、これとは逆にリミットサイクルの方が安定な事もありえよう。このとき系は、ノイズの加わることによってカオスからリミットサイクルへの転移をおこすであろう。この、微分方程式系における *noise induced order* の可能性もあわせて検討したい。

参考文献

1. J. P. Crutchfield and B. A. Huberman,
Phys. Lett. 77A 407 (1980)
2. 津田一郎、松本健司, 日本物理学会誌 第40巻 203 (1985)
3. Andrej Lasota and Michael C. Mackey,
Physica 28D 143 (1987)
4. P. Holmes, Phil. Trans. Roy. Soc A292
419 (1979)
5. W. H. Steeb, W. Erig and A. Kunkin
Phys. Lett. 93A 267 (1983)
6. S. Sano, M. Sano and Y. Sawada
Phys. Rev. A28, 1654 (1983)
7. Y. H. Kao, J. C. Huang and Y. S. Gou

- Phys. Rev. A 35, 5228 (1987)
8. J. P. Eckmann and D. Ruelle,
Rev. Mod. Phys. 57, 351 (1985)
高安秀樹編、フラクタル科学 3章(朝倉書店、1987)
9. M. C. Valsakumar, K. P. N. Murthy
and G. Ananthakrishna
J. Stat. Phys 30 617 (1983)

35. テント写像の初期値と周期

静岡大・教養 長島弘幸, 馬場良和

1. Introduction

簡単な写像によってカオス的な状況を見ようとするとき, Tent-map $f(x) = 2x(0 < x < 1/2) = 2(1-x)(1/2 < x < 1)$ の初期値 x_0 が, 0.24 とか 0.682 とかの有限小数のときの軌道をコンピュータで見るのがてっとり早い(図-1)。

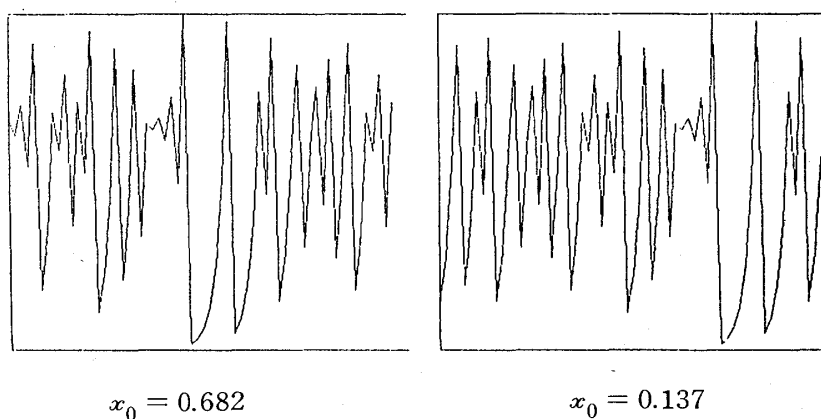


図-1 テント写像の軌道

これらは, もちろん周期軌道になってしまうが, 疑似乱数が乱数のかわりをするように, 長い周期の周期軌道はカオス的に見えるのである。この報告では, 「同一のけた数の有限小数から出発した周期軌道は, 同一の周期軌道になる。」という事実について述べる。つまり, そうした周期軌道はただ一つしかないのである。具体的にいえば, n けたの小数 x_0 から出発した軌道は, 周期 $2 \cdot 5^{n-1}$ のただ一つの周期軌道しか持たない。