

ドリンフェルト・ソコロフ階層の相似簡約 と結合型パンルヴェ VI 系

神戸大学 鈴木 貴雄 (Takao SUZUKI)

神戸大学 藤 健太 (Kenta FUJI)

Abstract

$D_{2n+2}^{(1)}$ 型および $E_6^{(1)}$ 型アフィン・リー代数に付随するドリンフェルト・ソコロフ階層の相似簡約について考察する.

1 はじめに

岡本和夫氏の一連の研究によって, パンルヴェ方程式は以下のようなアフィン・ワイル群の対称性を持つことが明らかにされた [O1].

P_{II}	P_{III}	P_{IV}	P_V	P_{VI}
$A_1^{(1)}$	$2A_1^{(1)}$	$A_2^{(1)}$	$A_3^{(1)}$	$D_4^{(1)}$

野海正俊・山田泰彦の両氏は, P_{II} , P_{IV} , P_V に対するアフィン・ワイル群の作用を手がかりに, $W(A_n^{(1)})$ 対称性を持つ高階パンルヴェ系を導入した [NY1]. また笹野祐輔氏は, P_{VI} に対するアフィン・ワイル群の作用を手がかりに, $W(D_{2n+2}^{(1)})$ 対称性を持つ結合型パンルヴェ VI 系を導入した [S].

ドリンフェルト・ソコロフ階層 (以下 DS 階層と記す) は, KdV (または mKdV) 階層の任意のアフィン・リー代数への一般化である [DS]. この DS 階層の枠組みから, 上記のパンルヴェ型微分方程式と無限次元リー代数の表現論との関係が次のように明らかにされている [AS, FS, KK1, KK2].

ルート系	実現	パンルヴェ方程式
$A_1^{(1)}$	principal homogeneous	P_{II} P_{IV}
$A_2^{(1)}$	principal "3 = 2 + 1" homogeneous	P_{IV} P_V P_{VI}
$A_n^{(1)} (n \geq 3)$	principal	野海・山田系
$D_4^{(1)}$	"s = (1, 1, 0, 1, 1)"	P_{VI}

本稿では、笹野氏による結合型パンルヴェVI系（以降笹野系と記す）を $D_{2n+2}^{(1)}$ 型 DS 階層の相似簡約から導くことで、その無限次元リー代数との関係を明らかにする。また、 $E_6^{(1)}$ 型アフィン・ワイル群対称性を持つ結合型パンルヴェVI系を、DS 階層の相似簡約を考察することで導入する。

なお、以降で用いるリー代数の記号は、特に断りの無い場合 [Kac] に従うものとする。

2 パンルヴェVI方程式と笹野系

t を独立変数、 $q = q(t)$, $p = p(t)$ を従属変数とし、 $\beta_0, \dots, \beta_4$ を関係式

$$\beta_0 + \beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 1$$

を常に満たす定数パラメータとする。この時、パンルヴェVI方程式は次のハミルトン系として表される [IKSY, O2]:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H_{VI}}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H_{VI}}{\partial q},$$

ただし、 $H_{VI} = H_{VI}(p, q; \beta_0, \beta_1, \beta_3, \beta_4)$ は次のように与えられる多項式ハミルトニアンとする:

$$t(t-1)H_{VI} = q(q-1)(q-t)p^2 - \{(\beta_1-1)q(q-1) + \beta_3(q-1)(q-t) + \beta_4q(q-t)\}p + \beta_2(\beta_0 + \beta_2)q.$$

笹野系は、ハミルトニアン H_{VI} を結合することで導入された結合型パンルヴェVI系である。 $q_i = q_i(t)$, $p_i = p_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) を従属変数とし、 α_j ($j = 0, \dots, 2n+2$) を関係式

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \sum_{j=2}^{2n} 2\alpha_j + \alpha_{2n+1} + \alpha_{2n+2} = 1$$

を常に満たす定数パラメータとする。これらの変数の多項式として、ハミルトニアンを次のように与える:

$$H = \sum_{i=1}^n H_{VI}(p_i, q_i; \beta_{i,0}, \beta_{i,1}, \beta_{i,3}, \beta_{i,4}) + \sum_{i < j} \frac{2(q_i - t)p_i q_j \{(q_j - 1)p_j + \alpha_{2j}\}}{t(t-1)}, \quad (2.1)$$

ただし

$$\begin{aligned} \beta_{i,0} &= \alpha_1 + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{2j+1}, & \beta_{i,1} &= \alpha_0 + \sum_{j=1}^{i-1} 2\alpha_{2j} + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{2j+1}, \\ \beta_{i,3} &= \sum_{j=i}^{n-1} \alpha_{2j+1} + \sum_{j=i+1}^n 2\alpha_{2j} + \alpha_{2n+2}, & \beta_{i,4} &= \sum_{j=i}^{n-1} \alpha_{2j+1} + \alpha_{2n+1}. \end{aligned}$$

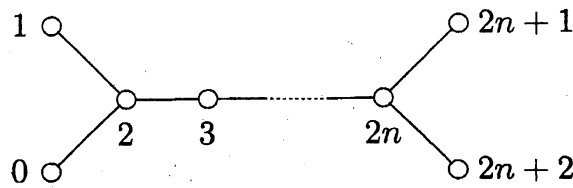


Figure 1: Dynkin diagram of type $D_{2n+2}^{(1)}$

この時, クロネッカーのデルタ $\delta_{i,j}$ を用いてポワソン括弧を

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{i,j}, \quad \{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0 \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

と定義すると, 笹野系はハミルトニアン H に対するハミルトン系として, 次のように表される [S]:

$$\frac{dq_i}{dt} = \{H, q_i\}, \quad \frac{dp_i}{dt} = \{H, p_i\} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (2.2)$$

笹野系はアフィン・ワイル群 $W(D_{2n+2}^{(1)})$ の対称性を持つ. 従属変数を用いて不変因子を

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 1, & \varphi_1 &= t - q_1, & \varphi_{2i+1} &= q_i - q_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n-1), \\ \varphi_{2j} &= p_j \quad (j = 1, \dots, n), & \varphi_{2n+1} &= q_n, & \varphi_{2n+2} &= q_n - 1 \end{aligned}$$

と取ると, 対称性を与える変換は次のように記述される:

$$r_i(\alpha_j) = \alpha_j - a_{ij}\alpha_i, \quad r_i(\varphi_j) = \varphi_j + \frac{\alpha_i}{\varphi_i}\{\varphi_i, \varphi_j\} \quad (i, j = 0, \dots, 2n+2).$$

ここで, $A = (a_{ij})_{i,j=0}^{2n+2}$ は $D_{2n+2}^{(1)}$ 型の一般化されたカルタン行列で, Figure 1 のディンキン図形に対応するものとする (ディンキン図形とカルタン行列の対応については [N] を参照.)

3 アフィン・リー代数

DS 階層は, アフィン・リー代数のハイゼンベルグ部分代数によって特徴付けられる. ハイゼンベルグ部分代数は極大ベキ零な部分代数で, 一般に 1 つのリー代数に対して複数個存在し, それぞれの部分代数は対応するグラデーション (生成元の次数付けによる直和分解) を持つ. 従って, DS 階層から笹野系を導くためには, $\mathfrak{g}(D_{2n+2}^{(1)})$ の適当なグラデーション及びハイゼンベルグ部分代数を選ぶ必要がある.

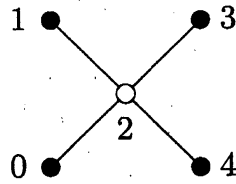


Figure 2: Gradation of type $s = (1, 1, 0, 1, 1)$

論文 [FS] においてパンルヴェ VI 方程式を導いた際には, $\mathfrak{g}(D_4^{(1)})$ の生成元の次数付けとして

$$\begin{aligned} \deg h &= \deg e_i = \deg f_i = 0 \quad (i = 2), \\ \deg e_j &= -\deg f_j = 1 \quad (j = 0, 1, 3, 4) \end{aligned}$$

とおくことで, この次数付けによって決まる $s = (1, 1, 0, 1, 1)$ 型グラデーションを選んだ. このグラデーションは, ディンキン図形を用いて Figure 2 のように表すことが出来る. ただし, 白丸は 0 の値を, 黒丸は 1 の値をそれぞれ表す. そして, この図からは次の 2 つの条件が見て取れる:

1. 端には常に黒丸が来る;
2. 同じ色の丸同士は隣り合わない.

そこで, 我々はこの 2 条件を満たすような図で表される $\mathfrak{g}(D_{2n+2}^{(1)})$ のグラデーションを考える.

以降, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(D_{2n+2}^{(1)})$ とする. $\mathfrak{g}$ のシュバレー生成元に対して次のように次数付けをする:

$$\begin{aligned} \deg h &= \deg e_i = \deg f_i = 0 \quad (i = 2, 4, \dots, 2n), \\ \deg e_j &= -\deg f_j = 1 \quad (j = 0, 1, 3, 5, \dots, 2n+1, 2n+2). \end{aligned}$$

この次数付けによって決まる $s = (1, 1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, 1, 1)$ 型グラデーション $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_k(s)$ を考える. このグラデーションは, ディンキン図形を用いて Figure 3 のように表されることに注意しておく. $d_s \in \mathfrak{h}$ を

$$\begin{aligned} (d_s | \alpha_i^\vee) &= 0 \quad (i = 2, 4, \dots, 2n), \\ (d_s | \alpha_j^\vee) &= 1 \quad (j = 0, 1, 3, 5, \dots, 2n+1, 2n+2) \end{aligned}$$

を満たすように取ると, 各 $\mathfrak{g}_k(s)$ は次のように定義される:

$$\mathfrak{g}_k(s) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [d_s, x] = kx\}.$$

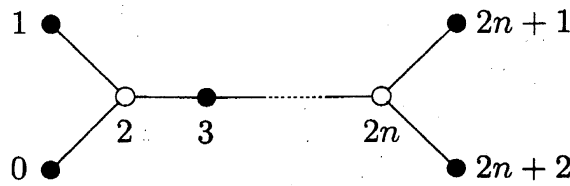


Figure 3: Gradation of type $s = (1, 1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, 1, 1)$

$s = (1, 1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, 1, 1)$ 型グラデーションには, 対応する $\mathfrak{g}$ のハイゼンベルグ部分代数が存在する [P]. この部分代数を $\mathfrak{s} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{s}_k(s)$ と表すと, 各 $\mathfrak{s}_k(s)$ は次のように表される:

$$\mathfrak{s}_k(s) = \begin{cases} \mathbb{C}\Lambda_{k,1} \oplus \mathbb{C}\Lambda_{k,2} & (k : \text{odd}), \\ \mathbb{C}K & (k = 0), \\ 0 & (k : \text{even}; k \neq 0). \end{cases}$$

任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathfrak{s}_k(s) \subset \mathfrak{g}_k(s)$ であることを注意しておく. すなわち

$$[d_s, \Lambda_{k,i}] = k\Lambda_{k,i} \quad (i = 1, 2; k = 1, 3, \dots).$$

また, 任意の $i = 1, 2$ と $k = 1, 3, \dots$ に対して

$$[\Lambda_{k,i}, \Lambda_{l,j}] = k\delta_{k+l,0}\delta_{i,j}K \quad (j = 1, 2; l \in \mathbb{Z})$$

が成り立つ.

次節では, $\mathfrak{s}$ の次数が正の生成元の組 $\{\Lambda_{2k-1,1}, \Lambda_{2k-1,2}\}_{k \in \mathbb{N}}$ を用いて DS 階層を定式化する.

Remark 3.1. ハイゼンベルグ部分代数はワイル群の共役類と 1 対 1 に対応することが知られている [KP]. 上で選んだハイゼンベルグ部分代数 $\mathfrak{s}$ の場合は, [C] の記号を用いると, ワイル群 $W(D_{2n+2})$ の "regular primitive" な共役類 $D_{2n+2}(a_n)$ と対応している [DF, P].

4 $D_{2n+2}^{(1)}$ 型 DS 階層の相似簡約

4.1 DS 階層とその相似簡約の定式化

これ以降, 簡略化のために次の記号を用いる:

$$\mathfrak{g}_{\geq 0} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathfrak{g}_k(s), \quad \mathfrak{g}_{< 0} = \bigoplus_{k < 0} \mathfrak{g}_k(s).$$

前節で定義したハイゼンベルグ部分代数 $\mathfrak{s}$ の生成元 $\Lambda_{k,i}$ ($i = 1, 2; k = 1, 3, 5, \dots$) に対して, それぞれ対応する時間変数 $t_{k,i}$ を導入する. また, $t_{k,i}$ についての微分作用素 $\partial_{k,i}$ を $\partial_{k,i}(\varphi) = [\partial_{k,i}, \varphi]$ で定義する. これらを用いて, 函数 $W \in \exp(\mathfrak{g}_{<0})$ に対する次の方程式系を考える:

$$\partial_{k,i}(W) = B_{k,i}W - W\Lambda_{k,i} \quad (i = 1, 2; k = 1, 3, 5, \dots), \quad (4.1)$$

ただし

$$W\Lambda_{k,i}W^{-1} = B_{k,i} - B_{k,i}^c, \quad B_{k,i} \in \mathfrak{g}_{\geq 0}, \quad B_{k,i}^c \in \mathfrak{g}_{<0}.$$

方程式系 (4.1) の両立条件からザハロフ・シャバト方程式系

$$[\partial_{k,i} - B_{k,i}, \partial_{l,j} - B_{l,j}] = 0 \quad (i, j = 1, 2; k, l = 1, 3, 5, \dots) \quad (4.2)$$

が従う. 我々は方程式系 (4.2) を $D_{2n+2}^{(1)}$ 型 DS 階層と呼ぶことにする.

波動函数 $\Psi = \Psi(t_{1,1}, t_{1,2}, \dots)$ を

$$\Psi = W \exp(\xi), \quad \xi = \sum_{i=1,2} \sum_{k=1,3,5,\dots} t_{k,i} \Lambda_{k,i}$$

と定義する. この時

$$\partial_{k,i}(\exp(\xi)) = \Lambda_{k,i} \exp(\xi) \quad (i, j = 1, 2; k, l = 1, 3, 5, \dots)$$

が成り立つことから, 方程式系 (4.1) の下で次の線形方程式系が従う:

$$\partial_{k,i}(\Psi) = B_{k,i}\Psi \quad (i = 1, 2; k = 1, 3, 5, \dots). \quad (4.3)$$

線形方程式系 (4.3) の両立条件からは, DS 階層 (4.2) が従う. これにより, 我々は (4.3) を DS 階層のラックス形式とみなすことが出来る.

ラックス形式 (4.3) に対して, 次の相似条件を課す:

$$d_s(\Psi) = M\Psi, \quad M = \sum_{i=1,2} \sum_{k=1,3,5,\dots} kt_{k,i} B_{k,i}, \quad (4.4)$$

ただし, $d_s(\varphi) = [d_s, \varphi]$ と定義する. この時, ラックス形式 (4.3), (4.4) の両立条件から, ザハロフ・シャバト方程式系

$$[\partial_{k,i} - B_{k,i}, \partial_{l,j} - B_{l,j}] = 0, \quad [d_s - M, \partial_{k,i} - B_{k,i}] = 0 \quad (i, j = 1, 2; k, l = 1, 3, 5, \dots) \quad (4.5)$$

が得られる. 我々は方程式系 (4.5) を DS 階層 (4.2) の相似簡約と呼ぶことにする.

4.2 笹野系の導出

時間変数を $t_{k,1} = t_{k,2} = 0$ ($k = 3, 5, \dots$) と特殊化する. この時, DS 階層の相似簡約 (4.5) は

$$[\partial_{1,1} - B_{1,1}, \partial_{1,2} - B_{1,2}] = 0, \quad [d_s - M, \partial_{1,i} - B_{1,i}] = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (4.6)$$

と等価であり, 方程式系 (4.6) は次のラックス形式を持つ:

$$d_s(\Psi) = M\Psi, \quad \partial_{1,i}(\Psi) = B_{1,i}\Psi \quad (i = 1, 2), \quad (4.7)$$

ただし, $M = t_{1,1}B_{1,1} + t_{1,2}B_{1,2}$ である. ここで, $M, B_{1,1}, B_{1,2} \in \mathfrak{g}_0(s) \oplus \mathfrak{g}_1(s)$ であることに注意しておく.

シュバレー生成元 e_i ($i = 0, \dots, 2n+2$) によって生成される $\mathfrak{g}$ の部分代数を $\mathfrak{b}$ とし, $\mathfrak{g}$ のボレル部分代数を $\mathfrak{b}_+ = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{b}$ と定義する. 我々は, $\mathfrak{g}_{\geq 0}$ 上のラックス形式 (4.7) を適当なゲージ変換で $\mathfrak{b}_+$ 上のラックス形式に変換することで, 方程式系 (4.6) から笹野系を導く.

作用素 M の $\mathfrak{g}_1(s)$ 成分を M_1 とすると, $M_1 = t_{1,1}\Lambda_{1,1} + t_{1,2}\Lambda_{1,2}$ であることから, 具体的に次の形に書き表される:

$$\begin{aligned} M_1 = & \sum_{j \in J} a_j e_j + a_{0,2}[e_0, e_2] + \sum_{j=1}^{2n} a_{j,j+1}[e_j, e_{j+1}] \\ & + a_{2n,2n+2}[e_{2n}, e_{2n+2}] + \sum_{j=1}^{n-1} a_{2j,2j+1,2j+2}[e_{2j}, [e_{2j+1}, e_{2j+2}]], \end{aligned}$$

ただし, $I = \{2, 4, \dots, 2n\}$, $J = \{0, 1, 3, 5, \dots, 2n-1, 2n+1, 2n+2\}$ とする. ここで, 各係数は $t_{1,1}, t_{1,2}$ の多項式であることに注意しておく. まず最初に, この M_1 を規格化するようなゲージ変換

$$\Psi^* = \exp \left(\sum_{j=1}^{2n+2} \gamma_{2,j} \alpha_j^\vee \right) \exp \left(\sum_{j \in I} \gamma_{1,j} e_j \right) \Psi$$

を考える. 具体的には, $\gamma_1 = \sum_{j \in I} \gamma_{1,j} e_j$ を

$$\exp(\text{ad}(\gamma_1))(M_1) = \sum_{j \in J} b_j e_j + \sum_{j=1}^{2n} b_{j,j+1}[e_j, e_{j+1}] + b_{2n,2n+2}[e_{2n}, e_{2n+2}]$$

を満たすように選び, その上で $\gamma_2 = \sum_{j=1}^{2n+2} \gamma_{2,j} \alpha_j^\vee$ を

$$\exp(\text{ad}(\gamma_2)) \exp(\text{ad}(\gamma_1))(M_1) = \sum_{j \in J - \{0\}} c_j e_j + e_0 + \sum_{j=1}^{2n} [e_j, e_{j+1}] + [e_{2n}, e_{2n+2}]$$

を満たすように選ぶ. このようなゲージ変換によって, ラックス形式 (4.7) は

$$d_s(\Psi^*) = M^* \Psi^*, \quad \partial_{1,i}(\Psi^*) = B_{1,i}^* \Psi^* \quad (i = 1, 2)$$

に変換される. ここで, M^* は次の形に書き表される:

$$\begin{aligned} M^* = & \sum_{j=0}^{2n+2} \eta_j \alpha_j^\vee + \sum_{j \in I} \varphi_j e_j + \sum_{j \in I} \psi_j f_j, \\ & + \sum_{j \in J - \{0\}} c_j e_j + e_0 + \sum_{j=1}^{2n} [e_j, e_{j+1}] + [e_{2n}, e_{2n+2}]. \end{aligned}$$

また, $B_{1,i}^*$ ($i = 1, 2$) は次の形に書き表される:

$$B_{1,i}^* = \sum_{j=0}^{2n+2} u_{i,j} \alpha_j^\vee + \sum_{j \in I} x_{i,j} e_j + \sum_{j \in I} y_{i,j} f_j + (\text{terms of degree 1}).$$

次に, $M^*, B_{1,1}^*, B_{1,2}^*$ を $\mathfrak{b}_+$ に移すようなゲージ変換

$$\Phi = \exp \left(\sum_{j \in I} \gamma_{3,j} f_j \right) \Psi^*$$

を考える. すなわち, 任意の $j \in I$ に対して

$$\varphi_j \gamma_{3,j}^2 + (\eta | \alpha_j^\vee) \gamma_{3,j} - \psi_j = 0 \quad (4.8)$$

及び

$$\partial_{1,i}(\gamma_{3,j}) = x_{i,j} \gamma_{3,j}^2 - (u_i | \alpha_j^\vee) \gamma_{3,j} - y_{i,j} \quad (i = 1, 2) \quad (4.9)$$

を満たすようなもの考える. ただし

$$\eta = d_s - \sum_{j=0}^{2n+2} \eta_j \alpha_j^\vee, \quad u_i = \sum_{j=0}^{2n+2} u_{i,j} \alpha_j^\vee.$$

この時, 方程式系 (4.6) の下で, (4.8) から (4.9) が従うことが確認出来るので, 結局 $\gamma_{3,j}$ は (4.8) を満たすように決めれば良い.

以上より, $\mathfrak{b}_+$ 上のラックス形式として次のものが得られる:

$$d_s(\Phi) = M^+ \Phi, \quad \partial_{1,i}(\Phi) = B_{1,i}^+ \Phi \quad (i = 1, 2). \quad (4.10)$$

M^+ は次の形に書き表される:

$$M^+ = \sum_{j=0}^{2n+2} \kappa_j \alpha_j^\vee + \sum_{j \in I} \mu_j e_j + e_0 + (\xi_1 - \lambda_1) e_1 + \sum_{j=1}^{n-1} (\lambda_j - \lambda_{j+1}) e_{2j+1} \\ + (\lambda_n - \xi_3) e_{2n+1} + (\lambda_n - \xi_4) e_{2n+2} + \sum_{j=1}^{2n} [e_j, e_{j+1}] + [e_{2n}, e_{2n+2}].$$

ここで, ξ_j は $t_{1,i}$ の関数となり, κ_j は $t_{1,i}$ に依存しない定数となる. また, 従属変数は

$$\lambda_j = \gamma_{3,j/2} - \sum_{i=1}^{j-1} c_{2i+1}, \quad \mu_j = \varphi_{j/2} \quad (j = 1, \dots, n)$$

と与えられることに注意しておく. この時, $B_{1,i}^+$ の各係数は (4.10) の両立条件から M^+ の係数を用いて一意に決まるが, それらの係数は $\xi_3 - \xi_1, \xi_3 - \xi_4$ の $t_{1,i}$ による一階微分を含む. そこで, 時間変数をあらかじめ

$$\partial_{1,1}(\xi_3 - \xi_1) = 2n + 2, \quad \partial_{1,1}(\xi_3 - \xi_4) = 0$$

を満たすように規格化しておく.

最後に, $t_{1,2} = 1$ と特殊化し, パラメータを

$$\alpha_j = \frac{(\kappa_j \alpha_j^\vee)}{2n + 2}, \quad \kappa = d_s - \sum_{j=0}^{2n+2} \kappa_j \alpha_j^\vee$$

と定義し, 更に変数変換を

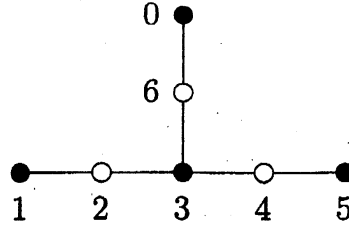
$$q_j = \frac{\lambda_j - \xi_3}{\xi_4 - \xi_3}, \quad p_j = \frac{\xi_4 - \xi_3}{2n + 2} \mu_j, \quad t = \frac{\xi_3 - \xi_1}{\xi_3 - \xi_4}$$

と取ることで, 最終的に次の結果が得られる.

Theorem 4.1. 特殊化 $t_{1,2} = 1$ の下で, ラックス形式 (4.10) の両立条件はハミルトニアン (2.1) を持つ笹野系 (2.2) と等価である.

5 $E_6^{(1)}$ 型 DS 階層の相似簡約

前節までに, リー代数 $\mathfrak{g}(D_{2n+2}^{(1)})$ の $s = (1, 1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, 1, 1)$ 型グラデーションに付随する DS 階層の相似簡約から, パンルヴェ VI 方程式及び笹野系が得られることが分かった. この結果をアフィン・リー代数 $\mathfrak{g}(E_6^{(1)})$ に拡張するために, Figure 4 のように表されるグラデーションを考える.

Figure 4: Gradation of type $s = (1, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$

以降, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(E_6^{(1)})$ とする. $\mathfrak{g}$ のシュバレー生成元に対して

$$\begin{aligned} \deg h &= \deg e_i = \deg f_i = 0 \quad (i = 2, 4, 6), \\ \deg e_j &= -\deg f_j = 1 \quad (j = 0, 1, 3, 5) \end{aligned}$$

と次数付けをする. また, $d_s \in \mathfrak{h}$ を

$$(d_s | \alpha_i^\vee) = 0 \quad (i = 2, 4, 6), \quad (d_s | \alpha_j^\vee) = 1 \quad (j = 0, 1, 3, 5)$$

を満たすように取る. これによって, $\mathfrak{g}$ の $s = (1, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$ 型グラデーション $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_k(s)$ が

$$\mathfrak{g}_k(s) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [d_s, x] = kx\}.$$

と決まる. このグラデーションから従う $\mathfrak{g}$ のハイゼンベルグ部分代数を $\mathfrak{s} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{s}_k(s)$ とすると, 各 $\mathfrak{s}_k(s)$ は次のように表される:

$$\mathfrak{s}_k(s) = \begin{cases} \mathbb{C}\Lambda_{k,1} \oplus \mathbb{C}\Lambda_{k,2} & (k = 6\mathbb{Z} + 1, 6\mathbb{Z} + 5), \\ \mathbb{C}\Lambda_{k,1} & (k = 6\mathbb{Z} + 2, 6\mathbb{Z} + 4), \\ \mathbb{C}K & (k = 0), \\ 0 & (k = 6\mathbb{Z}, 6\mathbb{Z} + 3; k \neq 0). \end{cases}$$

と表す. 後は, $\mathfrak{s}$ の次数が正の生成元を用いて Section 4 と同様の計算をすれば, 最終的にボレル部分代数上のラックス形式

$$d_s(\Psi) = M\Psi, \quad \frac{d\Psi}{dt} = B\Psi \quad (5.1)$$

が得られる. ここで, M は次のように表される:

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=0}^6 \kappa_i \alpha_i^\vee + \sum_{i=1}^6 \varphi_i e_i + \varphi_{23}[e_2, e_3] + \varphi_{43}[e_4, e_3] \\ &\quad + \varphi_{63}[e_6, e_3] + [e_6, e_0] + [e_2, e_1] + [e_4, e_5] + [e_2, [e_3, e_4]], \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= q_3 - t, & \varphi_1 &= q_1, & \varphi_2 &= p_1, & \varphi_3 &= q_1 q_2 - q_1 - q_2 + q_3, \\ \varphi_4 &= p_2, & \varphi_5 &= q_2, & \varphi_6 &= p_3.\end{aligned}$$

ここで, q_i, p_i は従属変数, $\varphi_{23}, \varphi_{43}, \varphi_{63}$ は補助変数とし, κ_i は t に依存しない定数パラメータとする. また, B は次のように表される:

$$\begin{aligned}B &= \sum_{i=0}^6 u_i \alpha_i^\vee + \sum_{i=0}^6 v_i e_i + v_{21}[e_2, e_1] + v_{45}[e_4, e_5] \\ &\quad + v_{23}[e_2, e_3] + v_{43}[e_4, e_3] + v_{63}[e_6, e_3] + v_{234}[e_2, [e_3, e_4]] \\ &\quad + v_{236}[e_2, [e_3, e_6]] + v_{436}[e_4, [e_3, e_6]] + v_{6234}[e_6, [e_2, [e_3, e_4]]].\end{aligned}$$

ラックス形式 (5.1) の両立条件から, B の各係数は M の係数を用いて一意に決まる. 具体的な形についてはここでは記述しない.

ポワソン括弧を

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{i,j}, \quad \{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

と定義することで, 次のハミルトン系を考える:

$$\frac{dq_i}{dt} = \{H, q_i\}, \quad \frac{dp_i}{dt} = \{H, p_i\} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (5.2)$$

ただし, ハミルトニアンを

$$\begin{aligned}H &= H_{\text{VI}}(p_1, q_1; \alpha_3, \alpha_0 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6, \alpha_1, \alpha_3) \\ &\quad + H_{\text{VI}}(p_2, q_2; \alpha_3, \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_6, \alpha_5, \alpha_3) \\ &\quad + H_{\text{VI}}(p_3, q_3; \alpha_3, \alpha_0, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5, \alpha_3) + H_c\end{aligned} \quad (5.3)$$

と与えて, その結合項を

$$\begin{aligned}t(t-1)H_c &= -(q_1 p_1 + \alpha_2)(q_2 p_2 + \alpha_4)\{(q_1 - 1)(q_2 - 1) - (t - 1)\} \\ &\quad - (q_2 p_2 + \alpha_4)\{(q_3 - t)p_3 + \alpha_6\}(q_2 - 1 + q_3 - 1) \\ &\quad - \{(q_3 - t)p_3 + \alpha_6\}(q_1 p_1 + \alpha_2)(q_3 - 1 + q_1 - 1).\end{aligned}$$

と与える. また, 定数パラメータについての関係式

$$\alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6 = 1$$

が常に満たされるとする. このとき次の定理が得られる.

Theorem 5.1. ラックス形式 (5.1) の両立条件は, ハミルトニアン (5.3) を持つハミルトン系 (5.2) と等価である. このハミルトン系 (5.2) は $E_6^{(1)}$ 型拡大アフィン・ワイル群対称性を持つ.

拡大アフィン・ワイル群 $\widetilde{W}(E_6^{(1)}) = \langle r_0, \dots, r_6, \pi_1, \pi_2 \rangle$ の従属変数及びパラメータへの作用を以下に記す. 双有理変換 $r_0, \dots, r_6$ の作用は DS 階層から自然に導かれて [NY2], 具体的には次のように記述される:

$$r_i(\alpha_j) = \alpha_j - a_{ij}\alpha_i, \quad r_i(\varphi_j) = \varphi_j + \frac{\alpha_i}{\varphi_i}\{\varphi_i, \varphi_j\} \quad (j = 0, \dots, 6),$$

ここで, $A = (a_{ij})_{i,j=0}^6$ は次のような一般化された $E_6^{(1)}$ 型カルタン行列とする:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

双有理変換 π_1 の作用は次のように記述される:

$$\begin{aligned} \pi_1(\alpha_1) &= \alpha_5, & \pi_1(\alpha_2) &= \alpha_4, & \pi_1(\alpha_4) &= \alpha_2, & \pi_1(\alpha_5) &= \alpha_1, \\ \pi_1(p_1) &= p_2, & \pi_1(p_2) &= p_1, & \pi_1(q_1) &= q_2, & \pi_1(q_2) &= q_1, \end{aligned}$$

双有理変換 π_2 の作用は次のように記述される:

$$\begin{aligned} \pi_2(\alpha_0) &= \alpha_1, & \pi_2(\alpha_1) &= \alpha_0, & \pi_2(\alpha_2) &= \alpha_6, & \pi_2(\alpha_6) &= \alpha_2, \\ \pi_2(p_1) &= \frac{(q_3 - 1)\{(q_3 - 1)p_3 + \alpha_6\}}{t - 1}, & \pi_2(p_3) &= \frac{(q_1 - 1)\{(q_1 - 1)p_1 + \alpha_2\}}{t - 1}, \\ \pi_2(q_1) &= \frac{q_3 - t}{q_3 - 1}, & \pi_2(q_3) &= \frac{q_1 - t}{q_1 - 1}. \end{aligned}$$

Remark 5.2. ここで選んだ $s = (1, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$ 型ハイゼンベルグ部分代数は, [C] の記号を用いると, ワイル群 $W(E_6)$ の "regular primitive" な共役類 $E_6(a_2)$ と対応している [DF, P].

References

- [AS] M. J. Ablowitz and H. Segur, Exact linearization of a Painlevé transcendent, Phys. Rev. Lett. **38** (1977), 1103-1106.

- [C] R. Carter, Conjugacy classes in the Weyl group, *Compositio Math.* **25** (1972), 1-59.
- [DF] F. Delduc and L. Fehér, Regular conjugacy classes in the Weyl group and integral hierarchies, *J. Phys. A: Math. Gen.* **28** (1995), 5843-5882.
- [DS] V. G. Drinfel'd and V. V. Sokolov, Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries type, *J. Sov. Math.* **30** (1985), 1975-2036.
- [FS] Kenta Fuji and Takao Suzuki, The sixth Painlevé equation arising from $D_4^{(1)}$ hierarchy, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39** (2006) 12073-12082.
- [IKSY] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura and M. Yoshida, From Gauss to Painlevé — A Modern Theory of Special Functions, *Aspects of Mathematics* **E16** (Vieweg, 1991).
- [Kac] V. G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, Cambridge University Press (1990).
- [KK1] S. Kakei and T. Kikuchi, Affine Lie group approach to a derivative nonlinear Schrödinger equation and its similarity reduction, *Int. Math. Res. Not.* **78** (2004), 4181-4209.
- [KK2] S. Kakei and T. Kikuchi, The sixth Painlevé equation as similarity reduction of $\widehat{\mathfrak{gl}}_3$ hierarchy, preprint (nlin-SI/0508021).
- [KP] V. G. Kac and D. Peterson, 112 constructions of the basic representation of the loop group of E_8 , in *Symposium on Anomalies, Geometry and Topology*, ed. W. A. Baedeen and A. R. White, (World Scientific, 1985) 276-298.
- [N] 野海 正俊, パンルヴェ方程式 -対称性からの入門-, 朝倉書店 (2000).
- [NY1] M. Noumi and Y. Yamada, Higher order Painlevé equations of type $A_i^{(1)}$, *Funkcial. Ekvac.* **41** (1998), 483-503.
- [NY2] M. Noumi and Y. Yamada, Birational Weyl group action arising from a nilpotent Poisson algebra, in *Physics and Combinatorics 1999, Proceedings of the Nagoya 1999 International Workshop*, ed. A.N.Kirillov, A.Tsuchiya and H.Umemura, (World Scientific, 2001) 287-319.
- [O1] K. Okamoto, Studies on the Painlevé equations, I, *Ann. Math. Pura Appl.* **146** (1987), 337-381, II, *Jap. J. Math.* **13** (1987), 47-76, III, *Math. Ann.* **275** (1986), 221-256, IV, *Funkcial. Ekvac.* **30** (1987), 305-332.

- [O2] K. Okamoto, The Hamiltonians associated with the Painlevé equations, The Painlevé property: One Century Later, ed. R. Conte, CRM Series in Mathematical Physics, (Springer, 1999).
- [P] O. Pavlyk, Solutions to WDVV from generalized Drinfeld-Sokolov hierarchies, preprint (math-ph/0003020).
- [S] Y. Sasano, Higher order Painlevé equations of type $D_l^{(1)}$, RIMS Koukyuroku **1473** (2006) 143-163.