

ベクトル値函数に対する 境界値問題について

龍谷大学 文 教 田 公 三

§ 1. 序

次のような問題を考える。

$$(1) \begin{cases} \Delta \vec{u}(x) = 0 & x \in \Omega \\ \vec{u}(x) = \vec{g}(x) & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \Omega \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ の中の領域} \\ \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \end{array} \right)$$

$\vec{u}(x)$, $\vec{g}(x)$ は Ω からある局所凸ベクトル空間 (実数体 $\mathbb{R}$ 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の) E への函数とする。

$$(2) \begin{cases} P(x, D) \vec{u}(x) = \vec{f}(x) & x \in \Omega \\ B_j(x, D) \vec{u}(x) = 0 & x \in \partial\Omega \quad (j=1, 2, \dots, b=\frac{m}{2}) \end{cases}$$

但し, $P(x, D)$ は $2b$ 次の楕円型微分作用素で, $\{P(x, D), B_j(x, D)\}$ は Schechter 流の条件 (後述) を満しているものとする。

上の問題が少し条件をつけると解けるということになる。
同時にある微分方程式を満すベクトル値函数についてのいく

フカの性質も分る。(§4)。例えば、調和なベクトル値函数は、
実解析的である。

§2. 記号と定義

ここでいくつかの函数空間を導入する。但し殆んどは
Schwartz [1], [2] の用語を借用しその説明はしない。

E を位相ベクトル空間とする。

$\mathcal{E}^m(\Omega, E)$ は m 回連続的に微分可能な E -値函数の全体と
する。 $\mathcal{D}'(\Omega, E)$ は E -値超函数の全体。ここで特に E を
局所凸 Hausdorff ベクトル空間とする。 $\mathcal{E}_L^m(\Omega, E)$ は、 $\mathcal{D}'(\Omega, E)$
に属し、その m 回までの超函数の意味の導函数が L^2 の意味で
すべて $L^2(\Omega)$ に属している E -値函数の全体。導函数が L^2 に属
しているとは、 $D^\alpha f_m$ が弱可測でかつ、すべての E の連続な
セミノルム q に対して $q(D^\alpha f) \in L^2(\Omega)$ ということである。
この空間のセミノルムとしては、 $(q_i)_{i \in I}$ を E の位相を定義す
るセミノルムの集まりとして、 $\|\varphi\|_{m, q_i}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |q_i(D^\alpha \varphi(x))|^2 dx$
がとれる。但しこの空間は、仮りに E が完備であつても、完備
にならないことがある。(しかし E が Frechet 空間なら、 $\mathcal{E}_L^m(\Omega, E)$
も Frechet 空間になる。

* $\mathcal{E}^m(\Omega, E)$ は $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ で E が sequentially complete
なら、 $\mathcal{E}^m(\Omega, E)$ も sequentially complete になる。ただし
 K_j を $K_i \subset K_j (i \leq j)$ かつ $\bigcup K_i = \Omega$ なる compact な列とし
て、セミノルムは $\|\varphi\|_{m, q, K_j} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K_j} q(D^\alpha \varphi(x))$ で与えられる。

§3. $E'_2(\Omega, E)$ に対するいくつかの Lemma.

まず、位相ベクトル空間 E が quasi-complete であるとは、 E のすべての有界閉集合が complete であることをいう。この空間は semi-complete である。compact 集合の凸 hull は compact である。以下、 E は 局所凸、Hausdorff、quasi-complete とする。

Lemma 3.1. $f(x) \in E'_2(\Omega, E)$ とすると、すべての $g(x) \in L^2(\Omega)$ に対して $\int_{\Omega} f(x) g(x) dx$ は意味がある。($\in E$)

Lemma 3.2. $f(x) \in E'_2(\Omega, E)$, A を E' の同等連続な集合とすると、 $\rho(e) = \int_{\Omega} |\langle f(x), e \rangle|^2 dx$ は A 上で、 E の弱位相で induce した E' 位相で連続である。

上の2つの Lemma により次の(後の定理6で使う) Lemma の Fourier 係数の意味付けと、Dirichlet の定理を使う根拠ができたことになる。

Lemma 3.3. $\{\varphi_i(x)\}_{i=1,2,3,\dots}$ を $E'_2(\Omega)$ の完全正規直交系とする。 $(f, \varphi_i)_{\mu, L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Omega} f(x) \overline{\varphi_i(x)} dx$ とする。この時、 E のすべての同等連続集合 A に対して、

$\sum_{i=1}^{\infty} (\langle f, e \rangle, \varphi_i)_{\mu, L^2(\Omega)} \varphi_i(x)$ は $E'_2(\Omega)$ の位相で $\langle f, e \rangle$ に収束するが、この収束は A 上一样である。

次の Lemma は E -値関数の弱微分可能性と強微分可能性の関係を示す。

Lemma 3.4. 測度空間 Ω (又は $\bar{\Omega}$) で定義された E -値函数

$\vec{f}(x)$ が m 回連続微分可能ならば, $m-1$ 回連続的強微分可能である。
連続的

次の Sobolev の Lemma は普通の数値正数の場合と同じ証明法で証明できる。

Lemma 3.5 $\vec{f}(x) \in \mathcal{E}_{L^2}^{(\frac{n}{2})+1+p}(R^n, E) \Rightarrow \vec{f}(x)$ は p 回連続的強微分可能で, q は E の semi-norm ε ($\varepsilon < 2$)

$$\sum_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in R^n} q(D^\alpha \vec{f}(x)) \leq C \left(\sum_{|\alpha| \leq (\frac{n}{2})+1+p} \|q(D^\alpha \vec{f}(x))\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

が成り立つ。

Lemma 3.6 $(\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega, E))$ に対する Sobolev の Lemma

$\Omega \subset R^n$: 開集合で $\partial\Omega = \bigcup_j S_j$ 但し S_j は m 回連続的微分可能な非超曲面とする。

$\vec{f}(x) \in \mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega, E)$, $m \geq \frac{n}{2}+1 \Rightarrow \vec{f}(x) \in \mathcal{E}^{m-(\frac{n}{2})-1}(\Omega, E)$
かつ $\sum_{|\alpha| \leq m-(\frac{n}{2})-1} \sup_{x \in \Omega} |q(D^\alpha \vec{f}(x))| \leq C \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|q(D^\alpha \vec{f}(x))\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$
となる $C > 0$ が存在する。

証明は $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$ か, $\mathcal{E}_{L^2}^m(R^n)$ への拡張作用素 (三浦: 例 p.171) を使って, Lemma 3.5 を適用すればよい。

§4. 楕円型微分方程式のベクトル値解の regularities.

先の Lemma 3.4 を用いて,

Lemma 4.1 $P(x, D)$ を hypoelliptic diff. op とすると, 次の方程式の解は $\mathcal{E}^\infty(\Omega, E)$ に属する。

$$P(x, D)\vec{u}(x) = \vec{f}(x) \quad \text{但し} \quad \vec{f}(x) \in \mathcal{E}^\infty(\Omega, E).$$

次に elliptic diff. op の解の regularities について, Hörmander(1)

の Th. 7.5.1 の証明を注意深く見ることにしよう。

Lemma 4.2. $P(x, D)$ を係数が Ω で解析的な elliptic diff. op. とする。かつ, $u(x)$ を $P(x, D)u(x) = f(x)$ の解とする。但し, $f(x)$ は Ω で解析的である。すると, すべての Ω の compact 部分集合 K に対して, 次の不等式を満たす定数 M_u と A が存在する。

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha u(x)| \leq M_u A^{|\alpha|} (|\alpha| + n)^{|\alpha| + n}$$

但し, M_u は $K, f(x), \Omega, P(x, D)$ に依存し, A は $K, f(x), \Omega, P(x, D)$ に依存する。

を得る。この Lemma により, 次の命題を得る。

Prop. 4.1. $P(x, D)$ は Lemma 4.2 と同じ条件を満たすとする。

$\vec{u}(x) \in \mathcal{D}(\Omega, E)$ が $P(x, D)\vec{u}(x) = \vec{f}(x)$ の解であるならば, $\vec{u}(x)$ も Ω で解析的である。但し, $\vec{f}(x)$ は Ω で解析的とする。

§ 5. Dirichlet 問題。

我々の考える問題は, スカラーの場合, Dirichlet 問題が解けるような領域に対しての Dirichlet 問題である。まず, 定義として

定義 5.1. Ω を $\mathbb{R}^n$ の相対コンパクトな開集合としたとき, $H(\Omega)$ をコンパクトな束の位相を入れた Ω 上の連続関数の全体とし, $H(\overline{\Omega})$ を $H(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ とする。

定義 5.2. $Ch_H(\Omega)$ を $H(\overline{\Omega})$ に由来する Ω の Choquet 境界

とする。

定理 5.1. $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ は開集合でかつ, $Ch_H(\overline{\Omega}) = \partial\Omega$ とする。このとき, 任意の $\partial\Omega$ 上の E-値連続函数 $\vec{g}(x)$ に対して, $\overline{\Omega}$ で連続な, 次の方程式の解が存在する。

$$\begin{cases} \Delta \vec{u}(x) = 0 \\ \vec{u}(x)|_{\partial\Omega} = \vec{g}(x) \end{cases} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

証明に.) の子前に; $Ch_H(\overline{\Omega}) = \partial\Omega$ は スカラーの場合, Dirichlet 問題が, 定理に.) 通りに解けることを意味する。

(たゞって, 解は weak に存在するわけであるけれども, それが E-値函数として真の解になっているかどうか分らない。それを付け加証明すべきことである。

Lemma 5.1. Ω を $\mathbb{R}^n$ 中で 相对コンパクトで, $Ch_H(\overline{\Omega}) = \partial\Omega$ であるための開集合とする。すると次のような条件を満たす正の measure の family $\{\mu_x\}_{x \in \Omega}$ が存在する。

$$i) \mu_x(h) = h(x) \quad (h \in H(\overline{\Omega}), x \in \Omega)$$

ii) $f; x \rightarrow \mu_x(g)$ は 任意の $\partial\Omega$ 上の有界可測函数に対して, 調和函数を定めて, 特に g が $\partial\Omega$ 上連続ならば $f(x)$ は $\overline{\Omega}$ で連続である。i.e

$$\lim_{x \rightarrow t \in \partial\Omega} f(x) = g(t).$$

証明は, Hinderichsen (1) p. 249 の証明を見直せばよい。実際は 調和函数の場合は, 正の Poisson kernel が存在する

のであるけれども、^{定理の}証明に必要なのは、正の ^{harmonic} measure が存在することだけで、Brelot 式の公理的 Dirichlet 問題にも適用できるよゝにとの心積りのためだけである。

定理の証明. $\bar{u}(x) = \int \bar{g}(t) d\mu_x(t)$ とおく。これは意味を持つが、Gothen dieck の critère による。明に、任意の $e' \in E'$ に対して $\Delta \langle \bar{u}(x), e' \rangle = 0$ である。Prop. 4.1 により、 $\bar{u}(x)$ は Ω で実解析的、調和的であることが分る。
 (1) $t \rightarrow 0$ 連続のことは、 $\lim_{x \rightarrow t \in \partial \Omega} \bar{u}(x) = \bar{g}(t)$ を示すことであるから、 $\bar{u}(x)$ の定義をみれば $\bar{g}(t_0) = 0$ とし、 $\lim_{x \rightarrow t_0} \bar{u}(x) = 0$ を示せばよい。

V を circular convex な E の近傍とする。 V の ^{polar} V° は E'_c (弱位相を持った dual) の中で同等連続でコンパクトであり、 E'_c (circular convex compact sets 上の一様収束位相を持つ E の dual) の中で最も小さい。

$G = \{\bar{g}(t) \in E; t \in \partial \Omega\}$ とおく。 $\partial \Omega$ がコンパクトで、 $\bar{g}$ は連続であるから、 G はコンパクトである。すると G° は E'_c の 0 の近傍になる。したがって、 $e'_1, e'_2, \dots, e'_m \in E'_c$ が存在して、 $G' = (e'_1 + G^\circ) \cup \dots \cup (e'_m + G^\circ)$ が V° を含むようにできる。又 $(V^\circ)^\circ = V$ であるから $G^\circ \subset V$ が成り立つ。そこで、 $e' = e'_i + e'_0 \in e'_i + G^\circ$ とし、 $|\langle \bar{u}(x), e' \rangle|$ を考へよう。

$$\begin{aligned}
 |\langle \vec{u}(x), e' \rangle| &= |\langle \int \vec{g}(t) d\mu_x(t), e' \rangle| = |\int \langle \vec{g}(t), e' \rangle d\mu_x(t)| \\
 &= |\int \langle \vec{g}(t), e'_i + e'_o \rangle d\mu_x(t)| \leq |\int \langle \vec{g}(t), e'_i \rangle d\mu_x(t)| + \\
 &+ |\int \langle \vec{g}(t), e'_o \rangle d\mu_x(t)| = I_1 + I_2
 \end{aligned}$$

I_1 は Lemma 5.1 の (i) の性質により, x が t_0 の十分近くにあれば, 1 より小にできる。 I_2 は e'_o が G^0 に属することにより, Lemma 5.1 の (ii) の性質を使えば, やはり, 1 より小になる。

したがって, x が t_0 の十分近くにあれば $\vec{u}(x)$ は $2G^0$ に含まれる。^{(1) かつ $2V$ に含まれる。} すなわち, $\lim_{x \rightarrow t_0} \vec{u}(x) = 0$ である。解の一意的性は, weakly に一意的なことから従う。証明終り。

§ 6. 一般境界値問題。

序に出て来た次の問題を考へる。

$$\begin{cases} A(x, D) \vec{u}(x) = \vec{f}(x) & (x \in \Omega) \end{cases} \quad (6.1)$$

$$\begin{cases} B_j(x, D) \vec{u}(x) = 0 & (x \in \partial\Omega, j=1, 2, \dots, b=\frac{m}{2}) \end{cases} \quad (6.2)$$

m は偶数で, $A(x, D)$ は m 階の楕円型作用素, $B_j(x, D)$ は normal system⁽¹⁾ で $\{A(x, D), B_j(x, D) (j=1, 2, \dots, b)\}$ は complementing condition⁽²⁾ を満たすとする。さらに, スカラーの境界値問題を Green 作用素 $G = A^{-1}; \mathcal{E}_2^s(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(A) = \{u(x) \in \mathcal{E}_2^{m+s}(\Omega); B_j(x, D)u(x) = 0, x \in \partial\Omega, j=1, 2, \dots, b\}$ 但し, $s=0, 1, 2, \dots, k$ とし, k は適当な^{十分大の}正の整数とする。

定理 6.1. $k \geq (\frac{n}{2}) + 1$ とし, 上の条件の下に, $s \geq k$ ならば $\vec{f}(x) \in \mathcal{E}_2^s(\Omega, \mathbb{R})$ ならば, (6.1), (6.2) の解が存在して, (i), (ii) は満たすもの (1). p. 427.

$E^{s+m-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}(\bar{\Omega}, \bar{E})$ に属する。

これを証明するのには, Sobolev's Lemma と Lemma 3.3 と 2.2 の Lemma をあわせて用いる。

Lemma 6.1. G を $E_L^s(\Omega)$ から $E_{L^2}^{m+s}(\Omega)$ の中への連続線型作用素とする。もし $s+m > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ ならば, G を $E_L^s(\Omega, E)$ の $E^{s+m-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}(\bar{\Omega}, \bar{E})$ の中への線型作用素に拡張できる。

証明. $G: E_L^s(\Omega) \rightarrow E_{L^2}^{m+s}(\Omega)$ conti. かつ $\|Gu\|_{m+s} \leq C\|u\|_s$, $u \in E_L^s(\Omega)$ とする $C > 0$ が存在する。但し $\|u\|_s = \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$, かつ $(f(x), g(x))_s = \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\Omega} D^\alpha f(x) \overline{D^\alpha g(x)} dx$, i.e. $E_L^s(\Omega)$ の内積とする。 $E_L^s(\Omega)$ は Hilbert 空間であるから, 完全正規直交基底 $\{\varphi_i(x)\}_{i=1,2,\dots}$ がとれる。

$f(x) \in E_L^s(\Omega, E)$, $\vec{b}_i = (f, \varphi_i)_s$ とする。 $\left\{ \sum_{i=1}^h \vec{b}_i G \varphi_i(x) \right\}_{h=1,2,\dots}$ は $E^p(\bar{\Omega}, \bar{E})$ の Cauchy 列である。($p = s+m - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 \geq 0$)

実際, $\left| \sum_{i=h}^l \langle \vec{b}_i, e' \rangle G \varphi_i(x) \right|_p \leq C \left\| \sum_{i=h}^l \langle \vec{b}_i, e' \rangle G \varphi_i(x) \right\|_{s+m}$ (Sobolev's Lemma)
 $\leq CC' \left\| \sum_{i=h}^l \langle \vec{b}_i, e' \rangle \varphi_i(x) \right\|_s$

== 2. Lemma 3.3 を使えば, $\left\| \sum_{i=h}^l \langle \vec{b}_i, e' \rangle \varphi_i(x) \right\|_s$ は E の同等連続関数集合上 τ -様には 0 に収束する, ($h, l \rightarrow +\infty$)。 E の任意の $e \in V$ かつ $u \in \mathcal{G}$ かつ E の内 circular convex 近傍 $\mathcal{G}$ を定義する, $\mathcal{G}(e) = \{ u \in V \mid | \langle e, u \rangle | < 1 \}$ であるとき, V の任意連続な E の部分集合で

$$\|f\|_p = \sum_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |D^\alpha f(x)|$$

あと二つに注意すれば, $\sum_{i=1}^n \vec{b}_i G \varphi_i(x)$ が $E^p(\Omega, E)$ の Cauchy 列であることが分る。 $E^p(\Omega, E)$ が quasi-complete であることにより, $E^p_2(\Omega, E)$ から $E^{s+m-\frac{p}{2}}(\Omega, E)$ の中への連続線型作用素も $Gf = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{b}_i G \varphi_i$ として定義することが出来る。連続性は,

$$\begin{aligned} \|Gf(x_0), e'\|_p &= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \langle \vec{b}_i, e' \rangle G \varphi_i(x_0) \right\|_p < \\ &< CC' \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \langle \vec{b}_i, e' \rangle \varphi_i(x) \right\|_s = CC' \|\langle \vec{b}, e' \rangle\|_s \\ (1) \text{ 及び } (2), \text{ 任意の } E \text{ に対して } 1 \leq p < \infty \text{ に対して,} \\ \sum_{|x| \leq p} \sup_{x \in \Omega} q(D^\alpha Gf(x)) &\leq CC' \left(\sum_{|x| \leq p} \int_{\Omega} |Gf(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = CC' \|f\|_{s, q} \\ \text{が成り立つことより分る。} \end{aligned}$$

証明終り。

定理 6.1 の証明は上の Lemma 2 によって終る。実際, $e' \in E'$ の任意の元とするとき, $\langle Gf, e' \rangle$ は (6.1), (6.2) を満たす。 (もし $Gf \in E^{s+m-\frac{p}{2}}$ であるならば, 直接に (6.1), (6.2) を満たしている。 $u(x) = Gf(x)$ とおけばよい。)

証明終り。

参考文献

N. Bourbaki [1] : Espaces vectoriels topologiques. Ch. I-IV. Hermann.

[2] : Intégration. Ch. V. Hermann.

J. Dieudonné et L. Schwartz, la dualité dans les espaces

$\mathcal{F}$ et $\mathcal{L}\mathcal{F}$. Ann. Inst. Fourier 1. (1949) 61-101

A. Grothendieck : Sur certains espaces de fonctions holomorphes.

Journal für reine und angewandte Mathematik.
N. d. 192 (1957)

D. Hindrichsen : Randintegrale und nukleare Funktionenräume
Ann. Inst. Fourier 17. (1967)

L. Hörmander : Linear partial differential operators. Springer

S. Mizushima : 偏微分方程式論 第1巻

L. Schwartz (1) Espaces de fonctions différentiables à
valeurs vectorielles. Journal d'Analyse
Mathématique 4 (1954-55). 88-143.

(2) Théorie des distributions. 1 et 2.

(3) Théorie des distributions à valeurs
vectorielles. 1. Ann. Inst. Fourier 7. (1957).

(4) Produits tensoriels topologiques et
espaces nucléaires. Séminaire Schwartz
1953-54. Inst. Henri Poincaré.

K. Yabuta : Problèmes au bord pour
les fonctions à valeurs vectorielles.
à paraître.

一般境界値問題 $1 \leq \alpha \leq 4$.

M. Schechter : General boundary value problems for
elliptic differential equations. Comm. Pure
and Appl. Math. 19 (1959). 457-486.

