

ベロネーズ多様体の特徴付けについて

筑波大学 数学系 伊藤 武広

S. S. Chern, M. do Carmo, S. Kobayashi ([1]) 氏等により、ベロネーズ曲面を、微分幾何学的には、曲率 $1/3$ の 2 次元球面から 曲率 1 の 4 次元球面への 極小はめこみ とみなす事ができます。

このベロネーズ曲面の概念の拡張には、次の二つの方向が考えられます。すなわち、

- (i) 外の 4 次元球面のみを一般次元の球面に拡張する。
- (ii) 両方の球面を一般次元の球面に拡張する。

T. Otsuki ([9]) 氏は 余次元 2 の極小部分多様体を構成したときに、その基礎曲面として generalized Veronese surfaces を与えました。氏の与えた曲面は、(i) の意味でのベロネーズ曲面の一般化とみなす事ができます。

次に、(ii) に関しましては、B. O'Neill ([8]) 氏が具体的に

minimal & isotropic な immersion

$$\iota: S^n(c) \longrightarrow S^{n+p}(\tilde{c}),$$

$$\text{但し, } c = n\tilde{c}/2(n+1), \quad p = n(n+1)/2 - 1$$

$S^n(c)$ は 曲率 C_1 の n 次元球面を表わす。

を構成しました。特に、 $n=2$ のときには、ベロネーズ曲面となります。その後、J. A. Little ([7]) が代数的にベロネーズ多様体を定義していますが、上の部分多様体は彼の定義したものの中で、特殊なものです。本論文では、微分幾何学的立場より、この O'Neill 氏の部分多様体を (ii) の意味での拡張として、ベロネーズ多様体 と言う事にします。

さて、本論文では、このベロネーズ多様体の特徴付けを、いくつか紹介します。そのために、部分多様体上の幾何学的不変量をいくつか定義して、それらの間の興味深い関係を導きます。

§1. 準備

$M = M^n$ を 定曲率 c の $(n+p)$ -次元定曲率空間 $\tilde{M} = \tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$ 内に、等長はめこみにより はめこめられた n 次元部分多様体とする。この事を、今後は、 $M^n \subset \tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$ と表わす事にする。 $\tilde{M}$ 内の orthonormal frames $\{e_1, e_2, \dots, e_n,$

$e_{n+1}, \dots, e_{n+p}$ で M に制限したとき、 $e_1, \dots, e_n$ が M に接しているものの全体を考へる。これらの dual frames を $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n+p}$ とし、また、connection formes を $\omega_{ij}, \omega_{i\alpha}, \omega_{\alpha\beta}$ で表わすと、 M に制限したとき、よく知られているように、 M の構造方程式を得る、すなわち、

$$\begin{aligned}
 \omega_\alpha &= 0 \\
 \omega_\alpha &= \sum h_{ij}^\alpha \omega_j, \quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha, \\
 d\omega_i &= \sum \omega_{ij} \wedge \omega_j, \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \\
 d\omega_j &= \sum \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} - \Omega_{ij}, \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \sum R_{ijke} \omega_k \wedge \omega_e, \\
 R_{ijke} &= \tilde{c}(\delta_{ik} \delta_{je} - \delta_{ie} \delta_{jk}) + \sum (h_{ik}^\alpha h_{je}^\alpha - h_{ie}^\alpha h_{jk}^\alpha), \\
 d\omega_{\alpha\beta} &= \sum \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma\beta} - \Omega_{\alpha\beta}, \quad \Omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum R_{\alpha\beta ij} \omega_i \wedge \omega_j, \\
 R_{\alpha\beta ij} &= \sum (h_{ik}^\alpha h_{kj}^\beta - h_{jk}^\alpha h_{ki}^\beta).
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

但し、本論文では、index に属して次の結果を得る。

$$i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, n, \quad \alpha, \beta, \gamma, \dots = n+1, \dots, n+p,$$

また、index をつけない和の記号 $\sum$ はその中のくりかえして書かれており index に属して、上の範囲の和をとるものとする。

このとき第 II 基本形式は次のように表わされる。 X, Y を M の tangent vector fields とすると

$$\sigma(X, Y) = \sum h_{ij}^\alpha \omega_i(X) \omega_j(Y) e_\alpha.
 \tag{1.2}$$

h_{ij}^α の変微分 h_{ijk}^α を次式で定義する.

$$(1.3) \quad \sum h_{ijk}^\alpha \omega_k := dh_{ij}^\alpha + \sum h_{im}^\alpha \omega_{mj} + \sum h_{jm}^\alpha \omega_{mi} + \sum h_{ij}^\beta \omega_{\beta\alpha},$$

すると, $\tilde{M}$ が定曲率であることより $h_{ijk}^\alpha = h_{ikj}^\alpha$ となる.
また, 更に h_{ijke}^α を次のように定義する

$$(1.4) \quad \sum h_{ijke}^\alpha \omega_e := dh_{ijk}^\alpha + \sum h_{mjke}^\alpha \omega_{mi} + \sum h_{imke}^\alpha \omega_{mj} + \sum h_{ijm}^\alpha \omega_{mk} + \sum h_{ijk}^\beta \omega_{\beta\alpha},$$

すると, 上の構造方程式より,

$$(1.5) \quad h_{ijke}^\alpha - h_{ijek}^\alpha = \sum h_{im}^\alpha R_{mjke} + \sum h_{jm}^\alpha R_{mike} + \sum h_{ij}^\beta R_{\beta\alpha ke}.$$

さて, ここで, 次の M 上の幾何学的不変量を考へる.

$$(1.6) \quad S := \|\sigma\|^2 = \sum h_{ij}^\alpha h_{ij}^\alpha,$$

$$(1.7) \quad K_N := \sum R_{\alpha\beta c j} R_{\beta\alpha c j} = \sum \left(\sum_k (h_{ick}^\alpha h_{kj}^\beta - h_{ijk}^\alpha h_{ci}^\beta) \right)^2,$$

$$(1.8) \quad L_N := \sum h_{ij}^\alpha h_{ij}^\alpha h_{ke}^\alpha h_{ke}^\beta,$$

M が点 $x \in M$ で isotropic (λ -isotropic) であるとは、
 M の点 x での任意な unit tangent vector X に対して、

$$\|\sigma(X, X)\| = -\text{定} = \lambda$$

となる時に言う。

B. O'Neill [8] により 次の結果が知られている。

Lemma 1. ([8]). M が点 x で λ -isotropic であるための必要十分な条件は、次の等式が x で成り立つ事である。

$$\sum h_{ij}^{\alpha} h_{ke}^{\alpha} + \sum h_{ik}^{\alpha} h_{je}^{\alpha} + \sum h_{ie}^{\alpha} h_{jk}^{\alpha} = \lambda^2 (\delta_{ij} \delta_{ke} + \delta_{ik} \delta_{je} + \delta_{ie} \delta_{jk}).$$

さて、次の2つのテンソルを考える。

$$W_{ijke} := \sum h_{ij}^{\alpha} h_{ke}^{\alpha} + \sum h_{ik}^{\alpha} h_{je}^{\alpha} + \sum h_{ie}^{\alpha} h_{jk}^{\alpha} \\ - \lambda (\delta_{ij} \delta_{ke} + \delta_{ik} \delta_{je} + \delta_{ie} \delta_{jk}),$$

$$V_{ijke} := \sum h_{ij}^{\alpha} h_{ke}^{\alpha} - \sum h_{ie}^{\alpha} h_{kj}^{\alpha} - \mu (\delta_{ij} \delta_{ke} - \delta_{ie} \delta_{jk}),$$

そこで、 h_{ij}^{α} , $i, j = 1, 2, \dots, n$, を成分とする n 次正方行列を H^{α} と表わせ、各テンソルの長さの平方を $\|\cdot\|^2$ で

表わすと.

$$\frac{1}{3}\|W\|^2 = \sum [\text{tr}(H^\alpha H^\beta)]^2 + 2 \sum \text{tr}(H^\alpha H^\beta)^2 - 2n^2 H^2 \lambda - 4\lambda S' + n(n+2)\lambda^2,$$

$$\frac{1}{2}\|V\|^2 = \sum [\text{tr}(H^\alpha H^\beta)]^2 - \sum \text{tr}(H^\alpha H^\beta)^2 + 2M(S' - n^2 H^2) + n(n-1)M^2,$$

但し, H は M の平均曲率を表わすものとする.

また一方, K_N と L_N も H^α を用いると次の式となる.

$$K_N = 2 \sum \text{tr}(H^\alpha)^2 (H^\beta)^2 - 2 \sum \text{tr}(H^\alpha H^\beta)^2,$$

$$L_N = \sum [\text{tr}(H^\alpha H^\beta)]^2.$$

以上の関係式より, 次の結果が容易に導かれる.

Lemma 2. M^n が minimal なとき.

$$L_N \geq \frac{2S^2}{(n+2)(n-1)}$$

が成り立つ. 等号は, M^n が isotropic で且つ, 定曲率の時にのみ成り立つ.

Lemma 3. ([6]). M^n が isotropic で minimal ならば、次の等式が 成り立つ。

$$K_N = \frac{2}{n+2} S^2 + L_N.$$

上の $\Rightarrow$ の Lemma 2, 3 を用いると、次の事が解る。

Lemma 4. ([6]). M^n が isotropic で minimal ならば、次の不等式が 成り立つ。

$$K_N \geq \frac{2n S^2}{(n+2)(n-1)}.$$

但し、等号は M^n が定曲率の時に限り成り立つ。

著者は [4] において、 L_N と K_N との値の 興味ある 次のような関係を得た。 すなわち、

Lemma 5. ([4]). $M^n \in \tilde{M}^{n+p}$ に対して、次の不等式 が成り立つ。

$$n L_N \geq K_N.$$

等号は、 M^n が minimal で isotropic で 定曲率の時に限る。

§2. ヴロネー多様体の特徴付け.

この節では、前節で定義した 幾何学的不変量等を用いて、
 ヴロネー多様体の特徴付けを与える。

定理1. ([6]), $M^n \subseteq \tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$ が λ -isotropic で
minimal 且つ、はめにみか full なとき

$$(i) \quad n \geq 3$$

$$(ii) \quad \tilde{c} > 0 \quad \text{で} \quad \lambda > 0$$

$$(iii) \quad K_N \leq \frac{n\tilde{c}}{n+1} S + \frac{2S^2}{n+2}$$

が成り立つならば M^n は ヴロネー多様体となる。

証明. $n \geq 3$ であって、 M^n が λ -isotropic で
 minimal である事より、 M^n は Einstein となる。
 すなわち、 R_{ij} をリッチテンソル とすると、

$$R_{ij} = \left\{ (n-1)\tilde{c} - \frac{n+2}{2}\lambda^2 \right\} \delta_{ij},$$

だから、 λ は一定となる。また、定義より $S = \frac{n+2}{2n}\lambda^2$
 となるから、 S も一定となる。したがって、 S のラプラシ
 アン を考えると、[3]にあるように 次の等式を得る。

$$(2.1) \quad \frac{1}{2} \Delta S = \sum (h_{i,j,k}^\alpha)^2 + n \hat{c} S - L_N - K_N$$

したがって,

$$\sum (h_{i,j,k}^\alpha)^2 = K_N + L_N - n \hat{c} S.$$

Lemma 3 を用いると,

$$(2.2) \quad \sum (h_{i,j,k}^\alpha)^2 = K_N - \frac{n^2 \tilde{c}}{n+1} S + K_N - \frac{n \tilde{c}}{n+1} S - \frac{2}{n+2} S^2$$

を得る. 一方, 仮定 (ii) より $K_N \leq \frac{n^2 \tilde{c}}{n+1} S$ が導かれるから, (2.2) より

$$h_{i,j,k}^\alpha = 0 \quad \text{for } \forall i, j, k, \alpha.$$

$$K_N = \frac{n^2 \tilde{c}}{n+1} S = \frac{n \tilde{c} S}{n+1} + \frac{2}{n+2} S^2$$

が求まる. このとき M^n は 定曲率 となる. ゆえに, [2] における 定理 と [4] における 定理 1 より M^n は ベロネーヌ多様体となる. 了証.

定理 2. ([6]). compact で oriented な $M^n \subset \tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$ が isotropic で, はじめのみが full の時, H^2 を平均

曲率ベクトルの長さの平方として、関係式

$$0 < H^2 \leq \frac{2(n+1)}{n} c - \tilde{c}, \quad p = \frac{n(n+1)}{2},$$

が成り立っているならば、 $M^n(c)$ は $\tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$ の定曲率 $\tilde{c} + H^2$ の hypersphere $S^{n+p-1}(\tilde{c} + H^2)$ 内に ベロネーズ多様体として はめこまれている。

証明. 詳しくは [6] の定理 5.1 を見ていただきたい。

ここでは、おおまかな方針のみを述べる。

仮定より $M^n(c)$ が $\tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$ で λ -isothropic であるとしてよい。すると、前節の 2. のテンソル W と V が消えている事より、

$$(2.3) \quad \sum h_{ij}^{\alpha} h_{ke}^{\alpha} = (\lambda - c + \tilde{c})(\delta_{ik} \delta_{je} + \delta_{ie} \delta_{jk}) \\ + (\lambda^2 + 2c - 2\tilde{c}) \delta_{ij} \delta_{ke}$$

を得る。実は (2.3) と 「 $W=0, V=0$ 」 とは同値である。この事より、 M^n は pseudo-umbilical となる。更に $n \geq 3$ ならば $M^n(c)$ は Einstein となつて、 λ は一定となる。pseudo-umbilical

である事と仮定より, $H > 0$ としよ!! から,

$$h_{ij}^{n+1} = H \delta_{ij}$$

となる 特別な frames で考えて, 公式 (2.1) を
用いる. 以上.

次に L_N と S との 間の関係による, ヴロネース多様体の特徴付けを与える.

定理 3. ([4]). $M^n \subseteq S^{n+p}(\tilde{c})$ が compact で oriented であって, はめにみか full で minimal するとき, 不等式

$$(n+1)L_N \geq n\tilde{c}S, \quad p > 0$$

が 成り立つならば, M^n は ヴロネース多様体となる.

証明. 公式 (2.1), Lemma 5 及び 仮定より

$$\frac{1}{2}\Delta S = \sum (h_{ijk}^\alpha)^2 + n\tilde{c}S - K_N - L_N \geq \sum (h_{ijk}^\alpha)^2 + n\tilde{c}S - (n+1)L_N \geq 0.$$

を得る。 M^n が compact で oriented だから、上の不等式は全て等号となる。したがって、 $R_{ijk}^\alpha = 0$ 、 M^n は定曲率、且つ、isotropic となるから、既に示した結果により、 M^n は「ペロネース」多様体となる。 了証。

次に 断面曲率も pinching する事により、ペロネース多様体の特徴付けを与える。

定理4. ([5]), $M^n \subset S^{n+p}(\tilde{c})$ が compact で oriented であって、はめ込みが full で minimal なるとき.

$$\underline{M^n \text{ の全ての断面曲率} \geq \frac{n\tilde{c}}{2(n+1)}, \quad p > 0.}$$

ならば、 M^n は「ペロネース」多様体となる.

証明. (1.5) より 任意な定数 a に対して、

$$(2.4) \quad \sum h_{ij}^\alpha h_{ij}^\alpha = (a+1) \left\{ \sum (h_{ij}^\alpha h_{km}^\alpha R_{mijk} + h_{ij}^\alpha h_{mi}^\alpha R_{mkjk}) \right\} \\ + aL_n - \frac{1-a}{2} K_n - na\tilde{c}S$$

を得る. $C \in M^n$ の断面曲率の最小値とすると, $R_{ijij} \geq C$ だから, (5) の Lemma 1 に示したように,

$$(2.5) \quad \sum h_{ij}^{\alpha} h_{km}^{\alpha} R_{mijk} + \sum h_{ij}^{\alpha} h_{lm}^{\alpha} R_{mkjk} \geq nCS.$$

を導く事が出来る. (2.4) と (2.5) より $a+1 \geq 0$ なる定数 a に対して, 次の不等式を得る.

$$(2.6) \quad \sum h_{ij}^{\alpha} \Delta h_{ij}^{\alpha} \geq (a+1)cnS - a\tilde{c}nS + aL_N - \frac{1-a}{2} K_N.$$

前節の Lemma 5 の不等式 $nL_N \geq K_N$ を (2.6) に代入すると, 正の定数 a に対して, 次の不等式を得る.

$$\sum h_{ij}^{\alpha} \Delta h_{ij}^{\alpha} \geq (a+1)cnS - a\tilde{c}nS + \left(\frac{a}{n} - \frac{1-a}{2}\right) K_N.$$

そこで, $a = \frac{n}{n+2}$ とおくと 上不等式は次式となる.

$$(2.7) \quad \sum h_{ij}^{\alpha} \Delta h_{ij}^{\alpha} \geq \frac{n}{n+2} \{2(n+1)C - n\tilde{c}\} S$$

(2.1), (2.7) 及び 仮定 $2(n+1)C \geq n\tilde{c}$ を用いると 次の不等式を得る.

$$(2.8) \quad \frac{1}{2} \Delta S \geq \sum (h_{i,j,k}^\alpha)^2 + \frac{n}{n+2} \{2(n+1)c - n\tilde{c}\} S \geq 0.$$

M^n は compact で oriented だから, (2.8) において
 全ての等号が成り立つ. $\tau_p > 0$ であるから $S > 0$ を考慮す
 ると,

M^n は isotropic

$$h_{i,j,k}^\alpha = 0 \quad \text{for } \forall i, j, k, \alpha$$

$$M^n \text{ は定曲率 } \frac{n\tilde{c}}{2(n+1)}$$

となる. したがって, M^n は ヲロネーズ多様体となる.

了証.

最後に, B. Smyth [10] の結果を用いて, 上の定理4と
 同じ証明法により ヲロネーズ多様体の特徴付けを, 平均曲
 率ベクトルが一定な 部分多様体について与える.

先づ, B. Smyth [10] の結果によると, 次の事が分る.

Lemma 6. ([10]). compact で oriented な M^n

が正曲率であって、その平均曲率ベクトルが normal bundle で平行ならば、 M^n は pseudo-umbilical である。但し、 M^n が minimal な場合は除く。

さて、ペロネース多様体の特徴付けは次のようになる。

定理 5. $M^n \subset \tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$ が compact で oriented
であって、その平均曲率ベクトルが normal
bundle で平行で、はめにみか full なるとき、

$$\underline{M^n \text{ の 全ての 断面曲率 } \geq \frac{n}{2(n+1)} (\tilde{c} + \|H\|^2) > 0, p > 1,}$$

ならば、 M^n は $\tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$ の 定曲率 $\tilde{c} + \|H\|^2$ なる hypersphere
 $S^{n+p-1}(\tilde{c} + \|H\|^2)$ 内に ペロネース多様体としてはめ込まれて
いる。

証明は 定理 4 と 殆んど同じであるので 省略する。

以上。

Bibliography

- [1] S. S. Chern, M. doCarmo and S. Kobayashi, Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length, Functional analysis and Related Fields, Springer, 1970, 59-75.
- [2] J. Erbacher, Reduction of codimension of an isometric immersion, J. Differential Geometry, 5(1971), 333-340.
- [3] T. Itoh, On minimal surfaces in a Riemannian manifold of constant curvature, Math. J. Okayama Univ., 17(1974), 19-38.
- [4] ———, On Veronese manifolds, J. Math. Soc. Japan, 27(1975), 497-506.
- [5] ———, A characterization of Veronese manifolds, to appear.
- [6] T. Itoh and K. Ogiue, Isotropic immersions and Veronese manifolds, Trans. Amer. Math. Soc., 209(1975), 109-117.
- [7] J. A. Little, On singularities of submanifolds of higher dimensional Euclidean spaces, Ann. Mat. Pura Appl., 83(1969), 261-336.
- [8] B. O'Neill, Isotropic and Kaehler immersions, Canad. J. Math., 17(1965), 907-915.
- [9] T. Otsuki, Minimal submanifolds with M -index 2 and generalized Veronese surfaces, J. Math. Soc. Japan 24(1972), 89-122.
- [10] B. Smyth, Submanifolds of positive curvature,
- [11] S. T. Yau, Submanifolds with constant mean curvature II, Amer. J. Math. Soc., (1974).

Department of Mathematics

University of Tsukuba