

On differential equations with quasiperiodic coefficients

京大 数研 三井 斌友

periodic coefficients をもつ微分方程式系について、periodic solution がえられる条件、解の性質などについてすでに多くの研究がなされている。しかし quasiperiodic (後述) の場合は、物理的現象の実例はあるようであるが、あまり研究は進んでいないようにみうけられる。当面 periodic case でなりたつことほどの程度 analogous に拡張できるが、興味の対象となるであろう。B. X. Харасахал (Алма-Ата) は、数年来 quasiperiodic solution の解析的性質について、いくつかの論文を発表している ([2], [3]) が、linguistic unpopularity がらその内容は知られていないようなので、これを報告するのが、今回の目的である。

§1. quasiperiodic functions

quasiperiodic の概念は、periodic と almost periodic のえれ

その中に位置するものである。すなわち

Def. 1.1 $f(t)$ が quasiperiodic function (of order n) であるとは、 n 変数函数である変数 t について周期 $\tau_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$ の周期函数 $F(t_1, \dots, t_n)$ が存在して

$$f(t) = F(t, \dots, t)$$

がなりたつことである。

但、以下すべて実数 $\omega_1, \dots, \omega_n$ の間には、次のような rational independency の関係がなりたつものとする：

$$(j, \omega) \equiv j_1 \omega_1 + \dots + j_n \omega_n, \quad j: \text{integer vector},$$

$$(j, \omega) = 0 \Rightarrow j = 0.$$

このような $\omega_1, \dots, \omega_n$ を base of frequency とする。

上にように定義した quasiperiodic function は (Bohr の意味の) almost periodic function であって、従ってそれについてなりたつことが知られていること (e.g. [1]) は適用することができる。そして quasiperiodic function は finite base をもった almost periodic function であるという特徴づけもでき、次のことが分る。

Prop. 1.1 continuous quasiperiodic function $f(t)$ は一様収束の意味で、Fourier 展開

$$(1.1) \quad f(t) = \sum_j F_j e^{i(j, \omega)t}$$

が可能であって、かつ

$$(1.2) \quad M\{|f(t)|^2\} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_j |F_j|^2$$

がなりたつ。

Prop. 1.2 continuous quasiperiodic functions の一様収束列の極限はやはり continuous quasiperiodic である。

その他細かいことは、ここでは省略する。

§2. 線形系の場合の解の性質

quasiperiodic matrix を係数とする次のような線形微分方程式系を考える。

$$(2.1) \quad \frac{dx}{dt} = P(t)x$$

但、 $P(t)$ は m 次行列で、各要素 $p_{kl}(t)$ は同じ base of frequency をもつ quasiperiodic function で、 x は m 次元ベクトル。

$P(t)$ に対しては、各変数 ξ_i について周期 $\tau_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$ の periodic matrix $F(\xi_1, \dots, \xi_n)$ が存在して

$$P(t) = F(t, \dots, t)$$

となつてゐる。

D を、 n 変数の m 次ベクトル函数 $y(\xi_1, \dots, \xi_n)$ に作用する operator と

$$Dy = \frac{\partial y}{\partial \xi_1} + \frac{\partial y}{\partial \xi_2} + \dots + \frac{\partial y}{\partial \xi_n}$$

とする。偏微分方程式

$$(2.2) \quad Dy = F(\xi_1, \dots, \xi_n)y$$

を考えて、この方程式の解 y に対して、 $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = t$ とおいたとき ($\xi_1 = \dots = \xi_n$ を n 次元空間の diagonal とよぶことにする) $x(t) = y(t, \dots, t)$ が (2.1) の解を与える。従って方程式 (2.2) の解を調べようというのが χ apacaxa χ の基本的な考え方である。

Def. 2.1 方程式 (2.2) の m 個の特殊解 $y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$ が fundamental system であるとは、次の条件を満たすこととする：

(2.2) の任意の解 y に対して、differentiable function $A_k(\xi_2 - \xi_1, \dots, \xi_n - \xi_1)$ ($k=1, \dots, m$) が存在して

$$y = A_1 y^{(1)} + \dots + A_m y^{(m)}$$

がなりたつ。

Prop. 2.1 $y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$ を列とする行列を $Y(\xi_1, \dots, \xi_n)$ とする。

$$\det Y(\xi_1, \dots, \xi_n) \neq 0 \quad \text{for } \forall \xi$$

ならば、 $y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$ は fundamental system である。(このとき Y を fundamental matrix という。)

上のように、変数の差 $\xi_k - \xi_1$ ($k=2, \dots, n$) によりよる函数 $f(\xi_2 - \xi_1, \dots, \xi_n - \xi_1)$ を constant on diagonal とよぶことにする。

Prop. 2.2 方程式 (2.2) の係数 F が constant on diagonal 又は

everywhere constant ならば

$$(2.3) \quad Y = \exp \left[\frac{\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} F \right] \quad (\alpha_k: \text{constant})$$

は解の fundamental matrix である.

こゝまでは F は一般的なものとしてきたが, (2.1) の $P(t)$ が quasiperiodic であるとき, これに対応する方程式 (2.2) の条件は,

$$(2.4) \quad F(\xi_1 + \omega_1, \dots, \xi_n + \omega_n) = F(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

である. ((2.4) をみたすとき, n 変数関数として periodic といひ, 紛らわしくない限り単に periodic という.) この条件のもとで, さらに F が constant on diagonal / 又は everywhere constant ならば, Prop. 2.2 によつて解の形は完全に決つてしまう.

Prop. 2.3 $Y_0(\xi_1, \dots, \xi_n)$ を periodic system (2.2) の解の或る fundamental matrix とする. A を nonsingular, constant on diagonal matrix とし

$$(2.5) \quad Y(\xi_1, \dots, \xi_n) = Y_0(\xi_1, \dots, \xi_n) A$$

もやはり fundamental matrix である. 逆に解のすべての fundamental matrix は (2.5) の形にかけらる.

さらに periodic system (2.2) では, 任意の fundamental matrix

$Y(\xi_1, \dots, \xi_n)$ に対し $Y(\xi_1 + \omega_1, \dots, \xi_n + \omega_n)$ もまた fundamental matrix であるから、上の Prop. によつて

$$(2.6) \quad Y(\xi_1 + \omega_1, \dots, \xi_n + \omega_n) = Y(\xi_1, \dots, \xi_n)C$$

がなりたつ。 C は constant on diagonal matrix. (2.5) における A に対し $A_+ = A(\xi_1 + \omega_1, \dots, \xi_n + \omega_n)$ とおいて λ に関する方程式

$$(2.7) \quad \det.(C - \lambda A^{-1}A_+) = 0$$

を、方程式 (2.2) の characteristic equation とする。

Prop. 2.4 characteristic equation の解は fundamental matrix のとり方によらぬ。

方程式 (2.2) を

$$(2.8) \quad y = B(\xi_1, \dots, \xi_n)z$$

によつて変換する。但、 B は nonsingular matrix. すると z についての方程式

$$(2.9) \quad D\dot{z} = [B^{-1}FB - B^{-1}DB]z$$

がえられる。 B 及び DB は diagonal で bounded とする (= のような B を、常微分方程式の場合からの類推で Lyapunov matrix とする)。

Def. 2.2 方程式 (2.2) が reducible であるとは、Lyapunov matrix によつて変換 (2.8) を行ったとき、(2.9) の $B^{-1}FB - B^{-1}DB$

が constant on diagonal or everywhere constant matrix となることをいう。

Theorem 2.1 (H. П. Еругин)

方程式 (2.2) が reducible である必要十分条件は、解の fundamental matrix が

$$(2.10) \quad Y = B(\xi_1, \dots, \xi_n) \exp \left[\frac{\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} A \right]$$

と表わされることである。但、 B は Lyapunov matrix, α_n は定数、 A は constant on diagonal or everywhere constant matrix.

§3. 線形系の quasiperiodic solution の決定

線形系の解を決めるのに、関係式 (2.6) での C が重要な役割をもつことになる。

1° C が everywhere constant の場合。

Floquet の定理に対応して、次の定理がなりたつ。

Theorem 3.1 方程式 (2.2) が periodic Lyapunov matrix によって、everywhere constant matrix を係数とする方程式に reduce される必要十分条件は、matrix C が everywhere constant であることである。

ゆえに C が everywhere constant である場合は、変換 (2.8) を用いて、解の fundamental matrix は

$$Y(\xi_1, \dots, \xi_n) = K(\xi_1, \dots, \xi_n) \exp \left[\frac{\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} M \right],$$

但 K は periodic, M は everywhere constant, d_j は定数になる. 従, 2 方程式 (2.1) に対し Z は, fundamental matrix を

$$(3.1) \quad X(t) = \Phi(t) \exp(tM)$$

とかける. 但 Φ は $\Phi(t) = K(t, \dots, t)$ なる quasiperiodic matrix.

2°. C は "diagonal form"

(3.2) $C = \text{diag.}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, λ_k は constant on diagonal function である場合.

関係式 (2.6) より

$$(3.3) \quad y_{jk}(\xi_1 + \omega_1, \dots, \xi_n + \omega_n) = \lambda_k y_{jk}(\xi_1, \dots, \xi_n) \quad (j, k=1, \dots, m)$$

がなりたつゆえ

$$(3.4) \quad y_{jk} = \Phi_{jk}(\xi_1, \dots, \xi_n) \exp[R_k(\xi_1, \dots, \xi_n)] \quad (j, k=1, \dots, m)$$

である. 但, Φ_{jk} は periodic, R_k は, periodic function N_k によつて

$$R_k = \int_0^{\xi_1} N_k(\tau, \xi_2 - \xi_1 + \tau, \dots, \xi_n - \xi_1 + \tau) d\tau$$

とかける函数. 従, 2 (2.1) に対し Z は, fundamental matrix の各要素が

$$x_{jk}(t) = \varphi_{jk}(t) \exp\left[\int_0^t \ell_k(\tau) d\tau\right]$$

$$\text{但, } \varphi_{jk}(t) = \Phi_{jk}(t, \dots, t), \quad \ell_k(t) = N_k(t, \dots, t)$$

とかける.

3°. C は

$$(3.5) \quad C = \text{diag} (I_{g_1}(\lambda_1), \dots, I_{g_p}(\lambda_p)), \quad g_1 + \dots + g_p = m$$

但

$$I_{g_k}(\lambda_k) = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & \lambda_k & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix}}_{g_k}, \quad \lambda_k \text{ is constant on diagonal function}$$

である場合. (Jordan canonical form に analogous な場合)

関係式(2.6)より Y の各要素の間には

$$y_{s,j}(\xi_1 + \omega_1, \dots, \xi_n + \omega_n) = \lambda_k y_{s,j}(\xi_1, \dots, \xi_n), \quad \begin{matrix} s=1, \dots, m, \\ j = \sum_{i=1}^{k-1} g_i + 1, \quad k=1, \dots, p \end{matrix}$$

$$y_{s,j}(\xi_1 + \omega_1, \dots, \xi_n + \omega_n) = y_{s,j-1}(\xi_1, \dots, \xi_n) + \lambda_k y_{s,j}(\xi_1, \dots, \xi_n), \quad \begin{matrix} s=1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^{k-1} g_i + 2 \leq j \leq \sum_{i=1}^k g_i, \\ k=1, \dots, p \end{matrix}$$

がなりたつ. この関係式によれば, Y の各列は第一列から g_1 列, 次 g_1+1 列から g_2 列, $\dots$ というようにグループに分けられ, 各グループ毎に解の形が決まる.

4° C が (3.5) の形の分解可能である場合.

(2.2) の解の fundamental matrix のうち

$$Y_0(0, \xi_2, \dots, \xi_n) = I$$

をみたすものを normal という. normal fundamental matrix は必ず存在し, かつ一意的である. この normal matrix Y_0 から次のような fundamental matrix の集合を定義する.

$$\{Y_0\} \equiv \{Y; Y = Y_0 A \text{ 但 } A \text{ は everywhere constant matrix}\}$$

すると, characteristic equation (2.7) は当然

$$(3.6) \quad \det.(C - \lambda I) = 0$$

になる。 $\lambda = \zeta$ characteristic equation の根の様子から、各点 $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ において (3.5) の分解が可能になる。ただしこの分解は ζ に対しては不連続がもしれない。問題とするのは diagonal の近傍だけであるから、座標の一次変換

$$\zeta_k = \zeta_k + \sigma_k \quad (\sigma_k: \text{constant}, \quad k=1, \dots, n)$$

を用いて、不連続点を避けることができる。このようにすれば、3 の場合に帰着させられる。

§4. 付記

quasiperiodic coefficients をもつ線形系の場合の解の安定性・不安定性については Штокало ^([5]) がある。 $\lambda = \zeta$ は安定性・不安定性の criterion が与えられている。

また線形系の場合の結果を基礎に、非線形系を扱うことが考えられるが、この点については目下検討中である。

References

- [1] Bohr, H.: Almost periodic functions (English tr.), 1951.
- [2] Харасахал, В.Х.: О квазипериодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений, Прикл. Мат. Мех., 27 (1963), 672-682.
- [3] Харасахал, В.Х.: О правильности линейных систем дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами, "Некоторые Проблемы Дифференциальных Уравнений", 1969, 3-6.

- [4] Немыцкий, В.В. и Степанов, В.В.: Качественная теория дифференциальных уравнений, 1949.
- [5] Штокало, И.З.: Критерий устойчивости и неустойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с квази-периодическими коэффициентами, Мат. Сб., 19(61)(1946), 263-286.