

温度勾配のある管内気柱の不安定化と 熱音響振動のシミュレーション

阪大院 基礎工 清水 大 (Dai SHIMIZU)

阪大院 基礎工 杉本 信正 (Nobumasa SUGIMOTO)

Graduate School of Engineering Science, Osaka University

1. はじめに

管路に沿って温度勾配を与えると、その内部の気体中を伝播する音波は、管壁との間の相互作用によって熱エネルギーと力学的エネルギーの変換を励起することが知られている。このエネルギー変換が熱音響効果である。この熱音響効果による代表的な現象として、開放端と閉端を持ついわゆる $1/4$ 波長管において、閉端を室温に保った状態で開放端を極低温にすることにより、管壁に沿って温度勾配が発生し、結果として管内のヘリウムの気柱が自励振動する現象が Taconis によって 1949 年に報告されている⁽¹⁾。この解析は Rott によって行われ、温度分布をステップ関数と仮定することにより、その臨界曲線が導かれている⁽²⁾。また近年、杉本・吉田によって、温度分布が連続である放物型分布の場合に、1 次の境界層理論の枠内でも臨界曲線が求まることが報告されている⁽³⁾。しかし、いずれにせよ未だに非線形性も含めた自励振動に至る過渡的な現象を上手く説明することは出来ておらず、管内音波の不安定化から非線形性による飽和に至る自励振動を説明し得る新たなモデルが待望されている。

本報告は、上記結果を受け、1 次の境界層理論が臨界条件を求めること以外にも、初期・境界値問題を解くことによって、管内気柱の不安定化から非線形性による振動の飽和に至るまでの熱音響自励振動を記述できるのかを調べる。基礎方程式の導出にあたっては、管断面にわたる平均量と偏差量、境界層を除く主流部にわたる平均量と偏差量、境界層内の欠損量を考えることによって、熱音響効果を高めるために細い管やスタックと呼ばれる積層平板を管内に挿入した場合にも適用可能なモデルとして定式化を行った⁽⁴⁾。境界層理論を適用すると計算は基礎方程式を 1 次元に帰結できる一方、散逸効果を示す履歴積分の取り扱いが難しいという問題点もある。また、初期条件を与えるために必要な一時的な衝撃力の導入など、微分方程式では表面には現れない工夫が必要となる。

2. 基礎方程式

既に示してきたように⁽⁴⁾、3 次元の連続の式、運動方程式、エネルギー方程式を管断面にわたり積分し、境界層と主流部を分けることにより、主流部に対して次の無次

元基礎方程式が導出される：

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \{ (\hat{\rho}_e + \hat{\rho}) \hat{u} \} = \frac{1}{A_0} \sqrt{\frac{\nu_e}{\omega}} (\hat{\rho}_e + \hat{\rho}) \left[C \frac{\partial^{-1/2}}{\partial \hat{t}^{-1/2}} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} \right) - C_T \frac{1}{\hat{\rho}_e} \frac{d \hat{\rho}_e}{d \hat{x}} \frac{\partial^{-1/2} \hat{u}}{\partial \hat{t}^{-1/2}} \right] + \frac{1}{A_0} \sqrt{\frac{\nu_e}{\omega}} \frac{d \hat{1}}{d \hat{x}} (\hat{\rho}_e + \hat{\rho}) \frac{\partial^{-1/2} \hat{u}}{\partial \hat{t}^{-1/2}}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} = - \frac{1}{\gamma (\hat{\rho}_e + \hat{\rho})} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} (\hat{S}_e + \hat{S}) = 0. \quad (2.3)$$

ここで、 ρ, u, p, S はそれぞれ、密度、軸方向の速度、圧力、エントロピーを表す。添え字 e は平衡状態における量を示し、添え字のない $[\hat{\quad}]$ を付けた量は無次元化された擾乱である。また、 $A_0, 1_0$ はそれぞれ、管の断面積とぬれ縁長さを示し、ぬれ縁は管の長手方向に変化してもよいものとする。ただし、スタックの平板の厚みは無視する。無次元化は室温での値を用いて行う。 x は管に沿う座標、 t は時間を示し、それぞれ入力波の代表波長 Δ と代表周波数 $\omega = a_0 / \Delta$ で無次元化する。ただし、 a_0 は音速である。 ν は動粘性係数、 γ は比熱比、 C, C_T はプラントル数と比熱比で決定される定数である。

3. 数値シミュレーションの方法

3.1 初期・境界値問題の設定

管全体にわたって滑らかな勾配が存在する温度分布を考える：

$$\hat{T}_e = 1 - (1 - \frac{1}{n}) \frac{1}{2} \left(\tanh [\alpha (\hat{x} + \hat{x}_w)] - \tanh [\alpha (\hat{x} - \hat{x}_w)] \right), \quad (3.1)$$

ここで n は室温を最低温度で割った温度比、 $\hat{x}_w$ は勾配が最大となる位置、 α は勾配の大きさを決めるパラメータである。なお開放端を $\hat{x} = 0$ 、閉端を $\hat{x} = 1/4$ とする。

時刻 $\hat{t} = 0$ での初期条件としては、速度を与え超過圧力はゼロにとる：

$$\hat{u} = U(x), \quad \hat{p} = 0. \quad (3.2)$$

一方、境界条件として、開放端では超過圧 $\hat{p} = 0$ 、閉端では、底での温度境界層を考慮して、

$$\hat{u} = \frac{C-1}{\gamma} \frac{1}{\Delta} \sqrt{\frac{\nu_e}{\omega}} \frac{\partial^{1/2} \hat{p}}{\partial \hat{t}^{1/2}} \quad \text{at } \hat{x} = 1/4, \quad (3.3)$$

を与える⁽³⁾。初期流速 U については、温度勾配と粘性を無視した線形の基本最低次の

固有 1/4 波長モードを与える。Figure.3.1(a),(b)にそれぞれ初期波形と温度分布を示す。なお、管半径と長さはそれぞれ $R = 0.01$ [m], $l = 2$ [m]とし、管内気体はヘリウムとする。

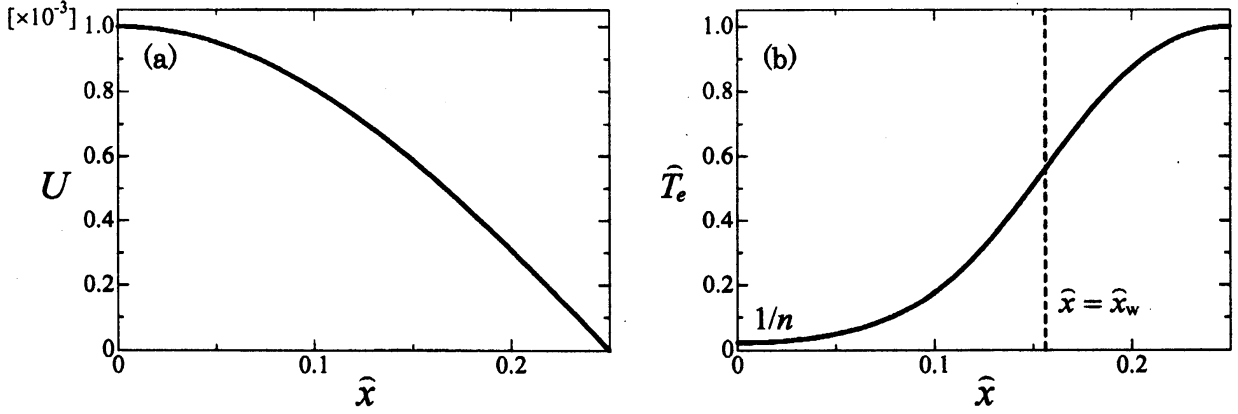


Fig.3.1 Spatial profile of initial wave U (a) and temperature distribution $\hat{T}_e$ (b).

3.2 初期値まわりの漸近解と衝撃力の導入

ここで扱う基礎方程式は境界層による履歴積分を含んでいるので、単に初期条件だけを与えるだけでは十分ではなく、初期時刻以前の状態を明記する必要がある。ここでは $\hat{t} < 0-$ では静止平衡状態を仮定し、初期条件周りに漸近解を以下のように展開する：

$$\begin{cases} \hat{u} = U\hat{t}_+^0 + f_{1/2}\hat{t}_+^{1/2} + f_1\hat{t}_+^1 + f_{3/2}\hat{t}_+^{3/2} + f_2\hat{t}_+^2 + \dots, \\ \hat{p} = g_1\hat{t}_+^1 + g_{3/2}\hat{t}_+^{3/2} + g_2\hat{t}_+^2 + \dots, \\ \hat{S} = h_1\hat{t}_+^1 + h_{3/2}\hat{t}_+^{3/2} + h_2\hat{t}_+^2 + \dots \end{cases} \quad (3.4)$$

ここで、添え字を付けた f, g, h は $\hat{x}$ の関数であり、 $\hat{t}_+^{n/2} \equiv |\hat{t}|^{n/2} H(\hat{t})$ である。但し $-\infty < \hat{t} \ll 1$ であり、 $H(\hat{t})$ はステップ関数である。1/2 乗のべき展開は 1/2 階微分に由来するものである。この展開を方程式(2.1), (2.3)に代入すると、係数の間の関係が逐次求まる。最低次の近似から、

$$g_1 + \gamma \frac{dU}{d\hat{x}} = 0, \quad h_1 + U \frac{d\hat{S}_e}{d\hat{x}} = 0, \quad (3.5)$$

が得られる。特に注意したいのは、(2.2)から、この初期条件を実現するためには、無次元化された単位質量当たりの衝撃力 $F(\hat{x}, \hat{t})$ が運動方程式の右辺に必要なことが分かる：

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{\gamma(\hat{\rho}_e + \hat{\rho})} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} = F. \quad (3.6)$$

微分方程式であれば、この衝撃力は時間のデルタ関数 $\delta(\hat{t})$ で与えられ、 $t=0+$ 以降の時間ではそれはゼロになるので、表面的には考慮する必要はない。しかし、履歴積分があると、衝撃力はしばらく持続し、

$$F = U\delta + \frac{f_{1/2}}{\sqrt{\hat{t}_+}} + f_1 + \dots, \quad (3.7)$$

で与えられ、衝撃力による局所インパルス（力積） $I(\hat{x})$ は、

$$I = \int_{0-}^{\infty} F(\hat{x}, \hat{t}) d\hat{t} \quad (3.8)$$

で与えられる。しかし、このインパルスは発散し物理的には許されない。よって次のような指数関数的に減衰する衝撃力を考える：

$$F \equiv U\delta + \hat{t}_+^{-1/2} \left(\frac{1}{2}f_{1/2} + D_{1/2}\hat{t}_+^{1/2} + D_1\hat{t}_+^1 + \dots \right) \exp \left[-C_{1/2}\hat{t}_+^{1/2} - C_1\hat{t}_+^1 - \dots \right] \quad (3.9)$$

境界条件より、 $C_{1/2}, C_1 \geq 0$ ととることが可能であり、 $C_{1/2}, C_1, \dots, D_{1/2}(\hat{x}), D_1(\hat{x}), \dots$ は順次決定される。

3.3 数値計算手法

ここでは、第2章で示した基礎方程式(2.1)～(2.3)を数值的に解くにあたり、状態方程式を用いることで、4つの未知量 $\hat{\rho}, \hat{p}, \hat{u}, \hat{S}$ から音波の議論で有用な $\hat{u}, \hat{p}, \hat{S}$ を未知量として解く。密度に関する発展方程式である連続の式(2.1)に対して、圧力と密度とエントロピーの間で一般に成り立つ式：

$$\frac{1}{\gamma p} \frac{Dp}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{1}{c_p} \frac{DS}{Dt}, \quad (3.10)$$

に加え、状態方程式とエネルギー式(2.3)を用いて、次のような超過圧の発展方程式を導く：

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} - X = \hat{V}_b, \quad (3.11)$$

$$\left(\begin{aligned} \hat{V}_b &\equiv \frac{1}{A_0} \sqrt{\frac{\nu_e}{\omega}} \left[C \frac{\partial^{-1/2}}{\partial \hat{t}^{-1/2}} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} \right) - C_r \frac{1}{\hat{\rho}_e} \frac{d\hat{\rho}_e}{d\hat{x}} \frac{\partial^{-1/2} \hat{u}}{\partial \hat{t}^{-1/2}} \right] + \frac{1}{A_0} \sqrt{\frac{\nu_e}{\omega}} \frac{d\hat{1}}{d\hat{x}} \frac{\partial^{-1/2} \hat{u}}{\partial \hat{t}^{-1/2}}, \\ X &\equiv \hat{p} \hat{V}_b - \frac{1}{\gamma} \hat{u} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} - \hat{p} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}}. \end{aligned} \right) \quad (3.12)$$

ここで、境界層の代表厚さ $\sqrt{\nu_e/\omega}$ と1次の量の積である $\hat{V}_b$ と、2次の量 X は小さいと仮定し、境界層の代表厚さの2乗の項と3次の項を無視することにより、 $\hat{V}_b$ は次

のように書きなおすことができる：

$$\hat{V}_b = -\frac{\mathcal{A}}{A_0} \sqrt{\frac{v_e}{\omega}} \left[\frac{C}{\gamma} \frac{\partial^{1/2} \hat{p}}{\partial \hat{t}^{1/2}} + C_r \frac{1}{\hat{\rho}_e} \frac{d\hat{\rho}_e}{d\hat{x}} \frac{\partial^{-1/2} \hat{u}}{\partial \hat{t}^{-1/2}} \right] + \frac{\mathcal{A}_0}{A_0} \sqrt{\frac{v_e}{\omega}} \frac{d\mathcal{A}}{d\hat{x}} \frac{\partial^{-1/2} \hat{u}}{\partial \hat{t}^{-1/2}}. \quad (3.13)$$

境界層理論を用いる利点は、基礎方程式を1次元に帰着できることであるが、メモリー効果を示す非整数階微分が含まれる微積分方程式となることにより、計算ステップが進むにつれ、この履歴積分の計算に対する計算負荷が増大する問題点がある。解決策として、履歴情報を少なくするために時間発展の間隔を大きく取ることのできる手法が必要となる。そこで、ステップ数が少ない時には余り有利ではないが、時間発展の間隔を大きく取った場合にも安定に計算が可能な陰解法(Crank Nicolson 法)を2段階で採用する。先ず基礎方程式(3.11)と(2.2)と(2.3)を線形項と非線形項に分離し、改めて次のように書き直す：

$$\left\{ \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} - \hat{V}_b = X, \right. \quad (3.14)$$

$$\left\{ \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \frac{1}{\gamma \hat{\rho}_e} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} = Y, \right. \quad (3.15)$$

$$\left\{ \frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{d\hat{S}_e}{d\hat{x}} = Z, \right. \quad (3.16)$$

$$\left(\begin{array}{l} X = \hat{p} \hat{V}_b - \frac{1}{\gamma} \hat{u} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} - \hat{p} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}}, \\ Y = -\hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{\hat{\rho}_e + \hat{\rho}} - \frac{1}{\hat{\rho}_e} \right) \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}}, \quad \left(\hat{\rho} = \left[\left\{ (1 + \hat{p}) / e^{\gamma \hat{S}} \right\}^{1/\gamma} - 1 \right] \hat{\rho}_e \right), \\ Z = -\hat{u} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{x}}. \end{array} \right) \quad (3.17)$$

第1段階は右辺の非線形量を現在の値で見積り、クランク・ニコルソン法を適用することにより、(3.14)と(3.15)から超過圧と流速を求め、(3.16)からエントロピーを求める。この結果を用いて右辺の非線形量の次ステップの値を再度計算し、次ステップの超過圧、流速、エントロピーを改めて決定する。

4. シミュレーションの結果

4.1 初期不安定化の数値計算

(a) 温度勾配の効果

温度分布(3.1)に対し、温度比 $n = T_e(\hat{l}) / T_e(0)$ のみを変えることにより、幾つかの温度比をもつ場合を考える。まず、温度比の違いによって、中立振動もしくは増幅や減衰振動が起こることを示す。Figure.4.1 に様々な温度比に対する閉端における圧力

の時間変化を示す。Figure 4.1 より、温度比 $n < 40$ では減衰し、温度比 $n = 40$ の場合、減衰も増幅もしない中立振動が出現し、温度比 $n > 40$ では増幅することがわかる。

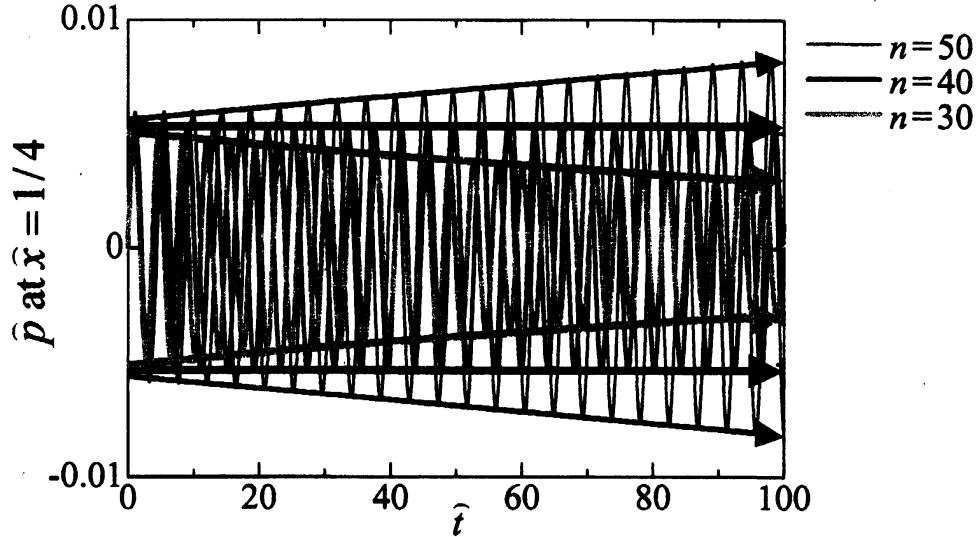


Fig.4.1 Temporal variations of $\hat{p}$ at the closed end of the tube without the stack of plates for various temperature ratios.

(b) スタックの効果

この章では、振動が減衰するような低い温度比 $n = 30$ の場合に、Fig.4.2 に示すような温度勾配が大きな位置にスタックを挿入することにより、ぬれ縁を部分的に増大させることで、振動を増幅できることを示す。なお、最大幅が管半径と同じ平板を m 枚挿入することによりぬれ縁が位置によって異なるとする。それぞれの枚数 m に対する閉端における圧力 $\hat{p}$ を Fig.4.3 に示す。Figure 4.3 より、スタックの枚数を増加させることにより、低い温度比でも振動の増幅が可能であることがわかる。

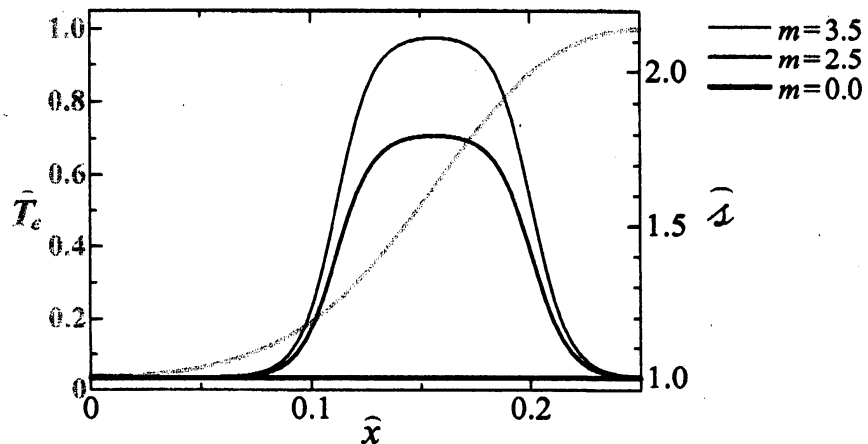


Fig.4.2 Axial distributions of temperature $\hat{T}_e$ with $n = 30$ and normalized wetted perimeters $\hat{z}$ for $m = 0, 2.5$ and 3.5 .

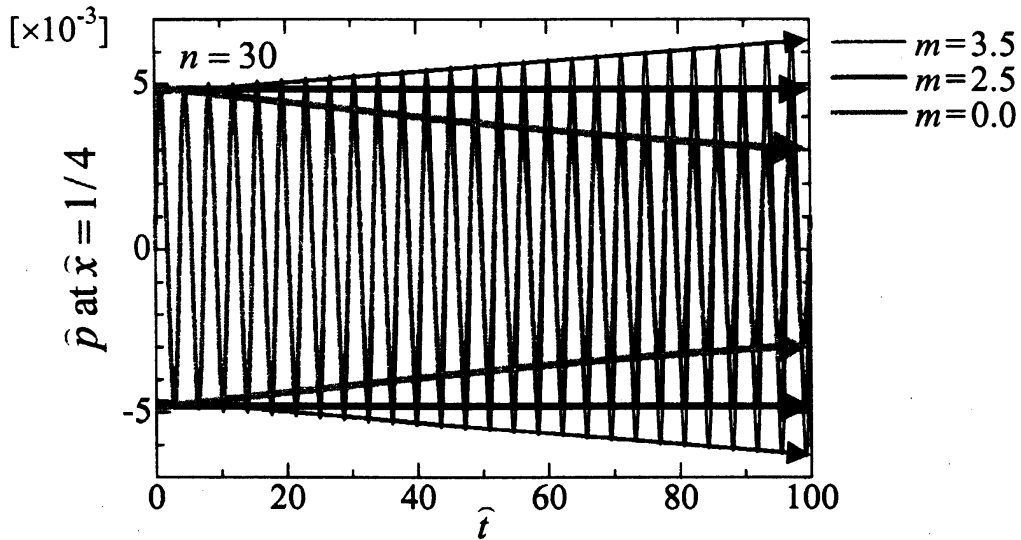


Fig.4.3 Temporal variations of $\hat{p}$ at the closed end of the tube with the stack of plates for various values of the wetted perimeter, and for the temperature ratio $n = 30$.

4.2 自励振動発生の数値計算 (スタックなし)

(a) 中立振動

Figure 3.1 で示した温度比 $n = 40$ の場合における閉端での超過圧の時間変化を約 200 周期にわたって Fig.4.4 に示す. Figure 4.4 より約 200 周期にわたって熱音響効果による増幅効果と, 散逸による減衰の効果が釣り合って, 増幅も減衰もしない中立振動が持続することが分かる.

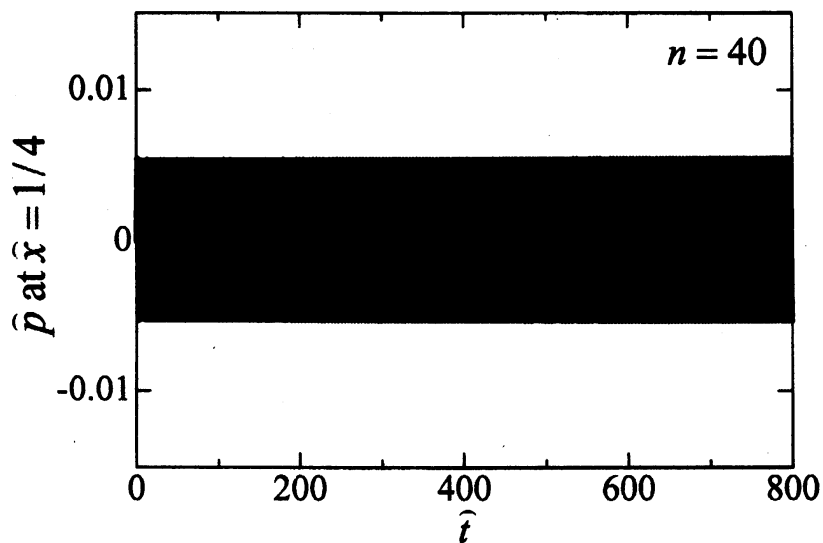


Fig.4.4 Temporal variations of $\hat{p}$ at the closed end of the tube without the stack of plates for the temperature ratio $n = 40$.

(b) 自励振動

Figure 3.1 で示した温度比 $n = 50$ の場合における閉端での超過圧の時間変化を約 300 周期にわたって Fig. 4.5(a) に示し、その対数表示を (b) に示す。Figure 4.5(a) より数百周期にわたって増幅した後に非線形性により飽和し、その後、定常振動し続ける、いわゆる自励振動が発生していることが分かる。また Fig. 4.5(b) では、振幅が小さい間、傾きが直線的であることから、振幅が振動しながら指数関数的に増幅していることが分かる。同様に飽和後は傾きがゼロとなり定常振動していることが分かる。

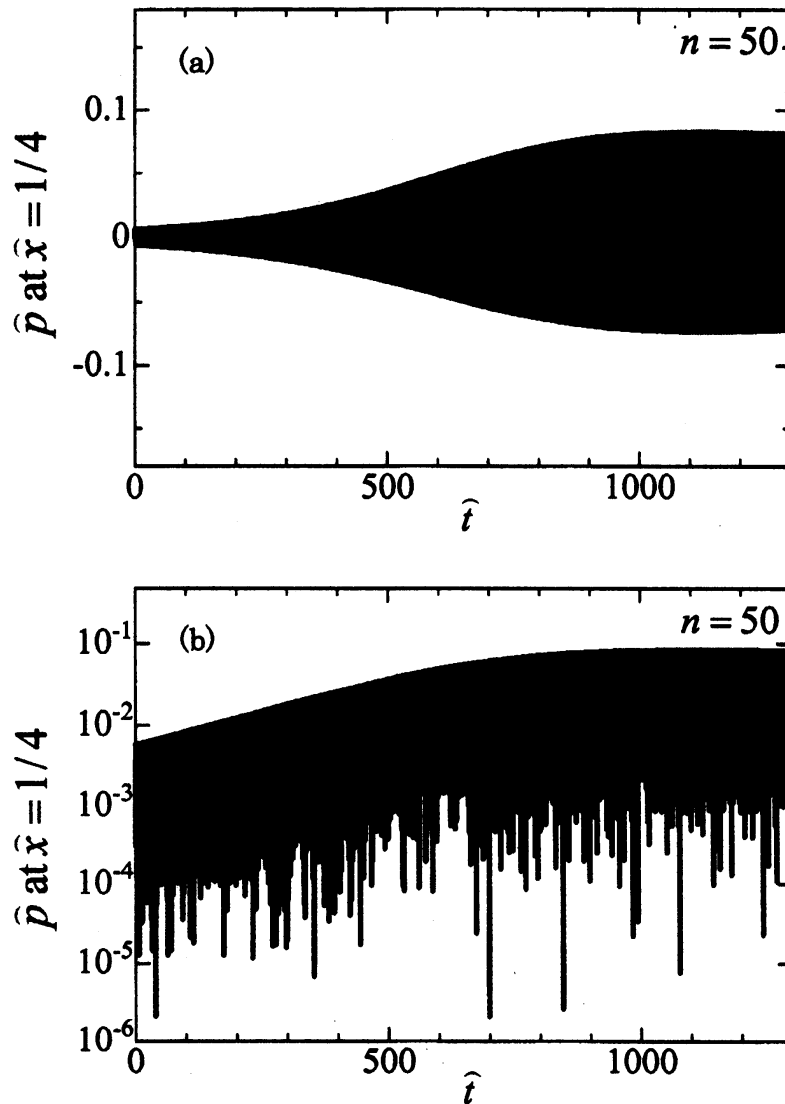


Fig. 4.5 Temporal variations of $\hat{p}$ at the closed end of the tube without the stack of plates for the temperature ratio $n = 50$ (a) and those in the logarithmic scale in $\hat{p}$ for the case with $\hat{p} > 0$ (b).

(c) 飽和時の空間波形の時間変化の様子

この節では, Fig.4.5 で示した温度比 $n = 50$ の場合における飽和時の空間波形の時間発展の様子を, $\hat{t} \approx 1000$ 辺りの 1 周期を抽出し, それを約 16 分の 1 周期毎に示し, 飽和時に管内に形成される定在波の波形発展を明らかにする. Figure4.6 に流速の波形発展の様子を示す. この時の超過圧の波形発展の様子を Fig.4.7 に示す. なお, 図中の矢印は実線灰色, 黒, 破線黒, 灰色の順に 4 分の 1 周期毎の発展の様子を示す. Figure4.6 より, 流速の最大振幅は概ね $\hat{x}$ 軸に関して対称であるが, 波形発展は非対称であることが分かる. また, Fig.4.7 より超過圧は $\hat{x}$ 軸に関して非対称で, その平均値は正となることが分かる.

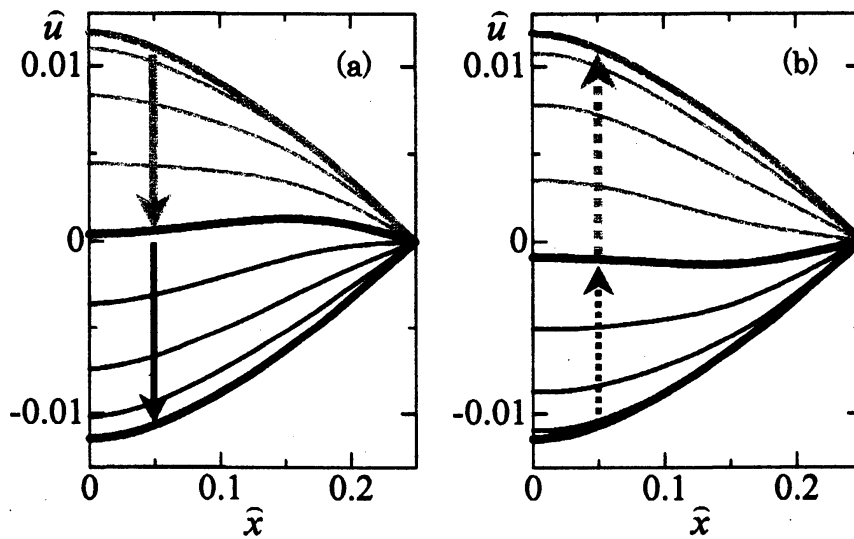


Fig.4.6 Spatial profiles of $\hat{u}$ at every 1/16-th period for the stationary self-excited oscillations. (a) for the first half period. (b) for the latter half period.

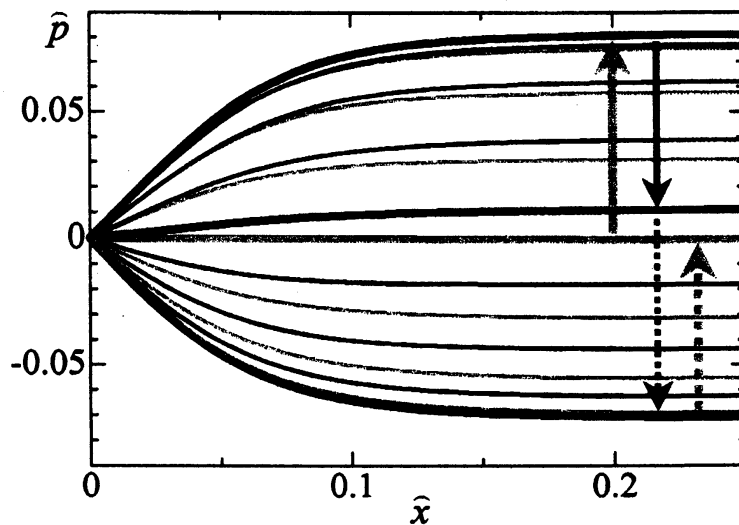


Fig.4.7 Spatial profiles of $\hat{p}$ at every 1/16-th period for the stationary self-excited oscillations.

Figure 4.8 に、この時の境界層外縁の内向き法線方向速度 $\widehat{u}_b$ の波形発展を示す。Figure 4.8 より、比較的 $\widehat{p}$ の値が大きい閉端付近では、 $\widehat{u}_b$ を構成するマイナス符号の掛かる第 1 項である $\widehat{p}$ の $1/2$ 階微分の影響が強く、 $\widehat{p}$ の位相と比較して $\pi/4$ 進んでかつ正負反転していることが分かる。

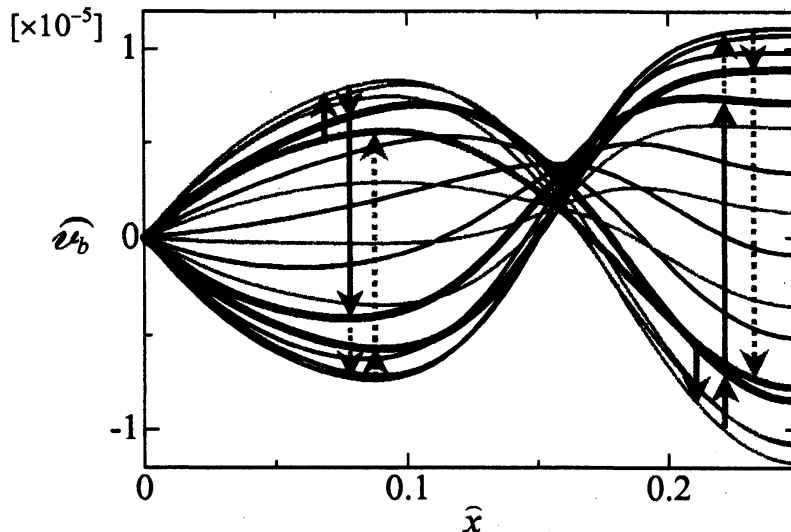


Fig. 4.8 Spatial profiles of $\widehat{u}_b$ at every $1/16$ -th period for the stationary self-excited oscillations.

7. 結論

$1/4$ 波長管の開放端を低温にし、閉端を室温に保つ場合、ある臨界温度比を超えると管内気柱が不安定化し、非線形性により飽和する、いわゆるタコニス振動と言われる熱音響自励振動を、境界層厚さの 1 次近似の範囲内で説明できることを示した。これにより、Kramers や Rott 以来、熱音響現象は境界層近似では説明できないと考えられてきたが、これを覆し 1 次近似の範囲内で定式化した本モデルの有効性を示すことができた。また、初期条件を実現するために、初期衝撃力として、 δ 関数に加えて履歴積分に由来する $t^{-1/2}$ で減衰する衝撃力も必要であることが分かった。また、温度勾配が大きい位置にスタックを挿入すると、小さい温度比でも不安定化が起こることが示された。

参考文献

- (1) Taconis, K. W., Beenakker, J. J. M., Nier, A. O. C. & Aldrich, L. T. "Measurements concerning the vapour-liquid equilibrium of solutions of He^3 in He^4 below 2.19°K ", *Physica*. 15 (1949), 733-739.

- (2) Rott, N. "Thermally driven acoustic oscillations, Part II: stability limit for helium", *Z. Angew. Math. Phys.* **20** (1973), 54-72.
- (3) Sugimoto, N. & Yoshida, M. "Thermoacoustic oscillations of a gas in a tube. Part 1. Derivation of marginal condition of instability", *Phys. Fluids*, **19** (2007), 074101.
- (4) 清水大, 杉本信正, "管路内の非線形音波の伝播における熱音響現象の定式化と数値計算" 京都大学数理解析研究所講究録「波動現象の数理とその応用」#1543 142-151 (2006).