

正の有理レベルにおける sl_2 型拡大 W 代数とその表現 Extended W algebra of sl_2 type at positive rational level and its representations

By

Akihiro TSUCHIYA *

§ 0. Abstract

This paper is a Japanese expository version of my joint paper with S.Wood [TW]. In occasion to write a Japanese version paper of [TW], I explained the fundamental concept of conformal field theories and description of vertex operator algebras by using language of conformal field theories. I hope this will help researchers who are not familiar with conformal field theories.

Now I explain the contents of this paper.

Chapter 2. Energy momentum tensors and field operators.

In the first part of this paper, I explained relationship between the representation theory of Virasoro algebra and the energy momentum tensor.

In the second part, I explained the concepts of field operators, the mutually locality of two field operators, and operator product expansions.

Finally I explained the concepts of propagation of locality of operators. This is important to formulate vertex operator algebras and their modules.

Chapter 3. Vertex operator algebras and their representations.

In this chapter, by using the concept of energy momentum tensor, mutually locality of two field operators and the propagation of the locality, I introduce the concept of vertex operator algebra (VOA). Then I introduce the universal enveloping algebra $U(V)$ of a vertex operator algebra V . Then I define the zero mode algebra $A_0(V)$ as a subquotient of $U(V)$.

An finiteness condition, called Zhu's C_2 cofiniteness condition, and Theorem 3-2 due to I. Frenkel and Zhu state that when Zhu's C_2 condition is satisfied, the dimension

Received August 4, 2013. Revised January 17, 2017.

2010 Mathematics Subject Classification(s): 81R10, 81T40

*IPMU, University of Tokyo

of $A_0(V)$ is finite, and the set of irreducible V -modules and the set of irreducible A_0 -modules are in one to one correspondance. So the number of irreducible V -modules is finite.

Chapter 4. Bosonic vertex operator algebras and lattice vertex operator algebras

In this chapter I introduce the most important VOAs, the Bosonic VOA and the lattice VOA.

Bosonic VOA has parameters $\kappa_+, \kappa_- \in \mathbf{C}^*$ with $\kappa_+ \kappa_- = 1$, and will be denoted by Π_{κ_+, κ_-} . The central charge of energy momentum tensor of Π_{κ_+, κ_-} is $c_{\kappa_+, \kappa_-} = 13 - 6(\kappa_+ + \kappa_-)$. So the Bosonic VOA Π_{κ_+, κ_-} contains the Virasoro vertex operator algebra $Vir_{c_{\kappa_+, \kappa_-}}$.

The abelian category of Π_{κ_+, κ_-} -mod consisting of Π_{κ_+, κ_-} -modules is semi-simple, and the simple objects of Π_{κ_+, κ_-} -modules are Fock modules $F_\beta \ni u_\beta, \beta \in \mathbf{C}$. So we get $Vir_{c_{\kappa_+, \kappa_-}}$ -module F_β .

If $\kappa_+ \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Q}, \Leftrightarrow \kappa_- \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Q}$, then F_β is not simple as $Vir_{c_{\kappa_+, \kappa_-}}$ -module if and only if $\beta \in \mathbf{Z}_{\frac{1}{2}}\alpha_+ \oplus \mathbf{Z}_{\frac{1}{2}}\alpha_-$, where $\alpha_+ = \sqrt{\frac{\kappa_+}{2}}, \alpha_- = \sqrt{\frac{\kappa_-}{2}}, \alpha_+ \cdot \alpha_- = -2$. And for $\beta \in \mathbf{Z}_{\frac{1}{2}}\alpha_+ \oplus \mathbf{Z}_{\frac{1}{2}}\alpha_-$, the structure of $Vir_{c_{\kappa_+, \kappa_-}}$ -module is very simple, which can be analyzed by Virasoro screening operators $S_+(z), S_-(z)$. When $\kappa_+ \in \mathbf{Q}_{>0}, \Leftrightarrow \kappa_- \in \mathbf{Q}_{>0}$, the structure of $F_\beta, \beta \in \mathbf{Z}_{\frac{1}{2}}\alpha_+ + \mathbf{Z}_{\frac{1}{2}}\alpha_-$, is very complicated. In this case the rank of the free abelian group $\mathbf{Z}_{\frac{1}{2}}\alpha_+ + \mathbf{Z}_{\frac{1}{2}}\alpha_-$ is one.

For $\kappa_+ = \frac{p_-}{p_+}, \kappa_- = \frac{p_+}{p_-}; p_+, p_- \geq 2$ and p_+ and p_- are relatively prime integers, we can define lattice vertex operator algebra $\mathcal{V}_{p_+, p_-}$ which has sub-VOA $\Pi_{\kappa_+, \kappa_-} \subset \mathcal{V}_{p_+, p_-}$.

When $\kappa_+ = \frac{p_-}{p_+}, \kappa_- = \frac{p_+}{p_-}$, it can be proved that the abelian category $\mathcal{V}_{p_+, p_-}$ -mod consisting of $\mathcal{V}_{p_+, p_-}$ -modules is semi-simple and has $2p_+p_-$ simple modules.

Chapter 5. Free field realization of Virasoro vertex operator algebra.

For $\kappa_+, \kappa_- \in \mathbf{C}^*, \kappa_+ \kappa_- = 1$, the Virasoro vertex operator algebra $Vir_{c_{\kappa_+, \kappa_-}}$ is obtained as sub-VOA of bosonic VOA Π_{κ_+, κ_-} by using the screening operators $S_+(z), S_-(z)$.

When $\kappa_+ = \frac{p_-}{p_+}, \kappa_- = \frac{p_+}{p_-}, p_+, p_- \geq 2, p_+, p_-$ mutually prime, then the central charge is $c_{\kappa_+, \kappa_-} = 13 - 6\frac{(p_+ - p_-)^2}{p_+ p_-}$, which we write c_{p_+, p_-} in this case. In this case the Virasoro vertex operator algebra $Vir_{c_{\kappa_+, \kappa_-}}$ is not irreducible as VOA, and it has quotient VOA which is called minimal Virasoro algebra and we denote it $MinVir_{c_{\kappa_+, \kappa_-}}$.

The abelian category $MinVir_{c_{\kappa_+, \kappa_-}}$ -mod consisting of $MinVir_{c_{\kappa_+, \kappa_-}}$ -modules is semi-simple as an abelian category, and the number of simple objects is $\frac{1}{2}(p_+ - 1)(p_- - 1)$. Using the minimal Virasoro VOA $MinVir_{c_{\kappa_+, \kappa_-}}$, three Russian physicists Belavin, Polyakov and Zamolodchikov developed the conformal field theory, and get numbers of remarkable results about two dimensional critical phenomena [BPZ].

Since $Vir_{c_{p_+, p_-}}$ is a sub-VOA of Π_{κ_+, κ_-} , for $\kappa_+ = \frac{p_-}{p_+}, \kappa_- = \frac{p_+}{p_-}$, and in this case the bosonic VOA Π_{κ_+, κ_-} is a sub-VOA of the lattice VOA $\mathcal{V}_{p_+, p_-}$.

Using the screening operators $S_+(z), S_-(z)$, we can define the sub-VOA M_{p_+, p_-} of $\mathcal{V}_{p_+, p_-}$ and M_{p_+, p_-} has $Vir_{c_{p_+, p_-}}$ as sub-VOA.

The main purpose of our paper [TW] is analysis of the vertex operator algebra M_{p_+, p_-} , which we call the extended Virasoro algebra of type sl_2 at positive rational levels.

The results of our paper [TW] are the following.

(1) The vertex operator algebra M_{p_+, p_-} is generated by $T(z), W_{1,a}(z)$, $a = \pm, 0$ and the conformal dimension of $W_{1,a}(z)$ is $\Delta_1 = (2p_+ - 1)(2p_- - 1)$.

(2) The VOA M_{p_+, p_-} satisfies Zhu's C_2 finiteness condition and we can determined the structure of finite dimensional algebra $A_0(M_{p_+, p_-})$ explicitly.

(3) We can determine all the simple modules of M_{p_+, p_-} , the number of them is $\frac{1}{2}(p_+ - 1)(p_- - 1) + 2p_+p_-$, and we can determine the structure of these simple M_{p_+, p_-} -modules.

(4) The VOA M_{p_+, p_-} has sub-VOA $Vir_{c_{p_+, p_-}}$ and has the quotient VOA M_{p_+, p_-} -module.

(5) The simple $MinVir_{c_{p_+, p_-}}$ -modules can be considered as simple M_{p_+, p_-} -modules, and the number of simple modules is $\frac{1}{2}(p_+ - 1)(p_- - 1)$.

The method of the proof of these results are very complicated, and mainly use the lifting of base field $\mathbf{C}$ to the discrete valuation ring $\mathcal{O} = \mathbf{C}[[\epsilon]]$.

Chapter 6. On the lifting to discrete valuation ring.

At first we lift to the valuation field $\mathcal{K} = \mathbf{C}((\epsilon))$. And then by using the properties of Jack polynomial defined on $\mathcal{K}$, we prove the $\mathbf{C}[[\epsilon]]$ integrality of the lifting.

Chapter 7. The representation theory of $\mathcal{V}_{c_{p_+, p_-}}$ and of $\mathcal{W}_{c_{p_+, p_-}}$.

We analyze the structure of $F_\beta, \beta \in \mathbf{Z}_{\frac{1}{2}}\alpha_+ + \mathbf{Z}_{\frac{1}{2}}\alpha_-$, as $\mathcal{V}_{c_{p_+, p_-}}$ -module carefully. The results are stated as Felder complex of Virasoro Fock modules F_β , and we construct $Vir_{c_{p_+, p_-}}$ -modules $\mathcal{X}_{[r,s]}^\pm \subset \mathcal{K}_{[r,s]}^\pm, 1 \leq r \leq p_+, 1 \leq s \leq p_-$.

Chapter 8. The extended W algebra M_{p_+, p_-} and their representations.

First we construct operators E and F which we call Frobenius operators. The construction of E and F and analysis of their properties in [TW] are very complicated, and we need some simple method to analyze this part. In 2016 we succeeded this simplification. We are now preparing a paper and it will appear in 2017. So in this resume we state the properties of E and F , and skip the proof of it. Using the properties of E and F , we prove that $\mathcal{X}_{[r,s]}^\pm \subset \mathcal{K}_{[r,s]}^\pm$ are indeed M_{p_+, p_-} -modules and $\mathcal{X}_{[r,s]}^\pm$ are irreducible as M_{p_+, p_-} -modules. Then we prove the C_2 -cofiniteness of M_{p_+, p_-} , and we can determine the structure of the zero mode algebra $A_0(M_{p_+, p_-})$ explicitly. Then using the structure of $A_0(M_{p_+, p_-})$, we can prove that the set of irreducible modules is

$$\{L_{[r,s]} = L_{[p_+ - r, p_- - s]} \quad 1 \leq r \leq p_+ - 1, 1 \leq s \leq p_- - 1\}$$

and $\{\mathcal{X}_{[r,s]}^\pm \quad 1 \leq r \leq p_+, 1 \leq s \leq p_-\}$, and $L_{[r,s]} = L_{[p_+ - r, p_- - s]}$ are the lifting of

the simple $MinVir_{c_{p_+, p_-}}$ -modules to simple M_{p_+, p_-} -modules by quotient VOA map $M_{p_+, p_-} \rightarrow MinVir_{c_{p_+, p_-}} \rightarrow 0$.

In Chapter 8 we simply state the results and their proof are omitted.

These are the statements of our Japanese version of [TW].

§ 1. 共形場理論と頂点作用素代数

共形場理論はロシアの 3 人の物理学者 Belavin, Polyakov, Zamolodchikov [BPZ] によって 2 次元統計力学における臨界現象を記述する場の量子論として展開された。そこでは、V. G. Kac, Feigin-Fuchs [FF1][FF2][FF3] により展開されていた Virasoro 代数の表現論、特に共形異常＝中心荷電 c が

$$c_{p_+, p_-} = 1 - 6 \frac{(p_+ - p_-)^2}{p_+ p_-} \quad (p_+, p_- \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \text{ は互いに素})$$

な場合の極小表現論を用いて理論が展開された。結果として、臨界現象における最も重要な物理量である臨界指数が表現論における共形次元に同定されたのみでなく、対応する場の量子論における primary fields 達に関する N 点関数系を完全に特徴づける確定特異点型のホロノミック系が発見された。このホロノミック系は、極小表現の圏においては primary field に対応する Verma 加群は十分たくさんの Null ベクトルを持つことから、この Null ベクトルに対応する子孫場を N 点関数系の中で零と置いて得られた。

頂点作用素代数は、共形場理論における最も重要な概念であるエネルギー・モーメント・テンソル＝Virasoro 代数の生成作用素、primary 場とその子孫場、場の作用素達の局所性と作用素展開等を公理化して Borchers やその他の人々により導入された。

現段階では、頂点作用素代数 V を与えた時、 V 加群のなすアーベル圏をどのように設定するかは良くわかっていない。 V に更にデータを付け加えた上で、このデータに基づいて V 加群のなすアーベル圏を設定する必要があると思われる。このためこの論考では、 sl_2 型の W 代数および拡大 W 代数とよぶ頂点作用素代数にあてはまる形で表現のなすアーベル圏を設定する。たとえば $\mathfrak{g}$ を ADE 型単純リー環で、そのランクが 1 より大きいとする。 $\mathfrak{g}$ 型の W 代数や拡大 W 代数を考える際、対応する表現については少々異なる条件をつけてアーベル圏を設定する必要がある。これは将来の課題である。

頂点作用素代数は共形場理論の代数的部分であり、共形場理論を頂点作用素代数とその表現論の上に展開することが一つの方法であり、数学者にとって分かりやすい。

頂点作用素代数に付随する共形場理論において [BPZ] による極小系列のように N 点関数系を特徴づける確定特異点型微分方程式系が存在するためには、頂点作用素代数は非

常に強い有限性条件を満たす必要がある。この講演の目的はそのような頂点作用素代数の例を構成し、表現論を展開することである。

念のために注意しておくが、超弦理論においても共形場理論は大きな役割を持つが、そこで現れる頂点作用素代数はこのような強い有限性条件を持っていない。弦の中心モーメントがもつ共形次元が連続パラメータを持つためである。頂点作用素代数の有限性に注目したこの講演とは別の側面を持っているのである。

上に述べた強い有限性条件を持つ頂点作用素代数の典型例は、Virasoro 代数の極小表現に付随する頂点作用素代数およびその拡張である単純 Lie 環に対応して定義される W 代数の極小表現に付随する頂点作用素代数である。これについては 2013 年春の学会における荒川知幸氏の代数学特別講演を参照されたい。さらに affine リー環の可積分表現に付随する頂点作用素代数や、even integral lattice に付随して定義される格子頂点作用素代数がある。

これらの頂点作用素代数は、次のような強い有限性を持つ。すなわち、この頂点作用素代数の表現のつくるアーベル圏を考えると、そのアーベル圏の既約表現の数は有限であり、アーベル圏としては半単純である。すなわち、すべての表現は単純加群の有限個の直和である。

近年、物性物理学において、 N 点関数系を特徴づける確定特異点型のホノロミック系が存在するが、その解に $\log$ 型の関数が現れる $\log$ 型共形場理論が注目を浴びている。このような共形場理論を記述する頂点作用素代数は、その表現のつくるアーベル圏の既約表現の数は有限個であるが、アーベル圏としては半単純でなく、表現に対して Virasoro 代数の零モード作用素 $L[0]$ の固有空間分解を考えると、一般には対角化できず、Jordan block が現れる。

このような頂点作用素代数の例を構成し、その表現のカテゴリの性質を明らかにすることは非常に難しいことである。

2006 年、Feigin 達 4 人の数学者 [FGST06][FGST07] は、互いに素な正の整数の組 p_+, p_- に対して (p_+, p_-) 型の W 代数と呼んでいる頂点作用素代数を定義し、既約表現の構成とその構造、表現の指標をテータ関数を使って表示し、指標達に関する modular 不変性を確立するなど、数々の注目すべき結果を発表した。しかし、その議論や結論は非常に荒っぽいものであり、その結果を厳密化し、精密化し、さらに発展させることが期待される。

講演者は、Simon Wood 氏 (IPMU) と共同でこの問題に取り組み、 $p_+, p_- \geq 2$ の場合に現れる screening 作用素代数の積を積分する twisted cycle の正則化を、理論を $\mathbb{C}$

係数から discrete valuation ring $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[\varepsilon]]$ に持ち上げるにより行ない、Feigin 達 4 人の結果の厳密化、精密化を行なった。

講演では我々の論文 [TW] の主結果を話したが、この論考ではそれに先立って共形場理論における場の作用素、互いに局所的であること、作用素展開などについて丁寧に説明を行った。この部分の解説が役に立つことを願っている。

この論文の構成について述べておく。

§2 では、共形場理論においてもっとも重要な概念である、場の作用素、2 つの場の作用素の間の局所性、局所的な 2 つの場の作用素の積の作用素分解について詳しく述べる。

§3 では、互いに局所的ないくつかの場の作用素たちの生成する、局所作用素の空間の概念を導入する。この概念を使って、頂点作用素代数とその表現の概念が定義される。例として、Virasoro 頂点作用素代数について述べる。

Virasoro 頂点作用素代数の最も重要な不変量は、中心電荷 c である。この論考では $c \neq 0$ を常に仮定する。対応して、ボゾン頂点作用素代数はレベルと呼ばれる不変量の組 (κ_+, κ_-) をもつ。ただし、 $\kappa_+ \kappa_- = 1$ は常に仮定する。この 2 つの不変量は $c = c_{\kappa_+, \kappa_-} = 13 - 6(\kappa_+ + \kappa_-)$ で関係しあっている。

この論文では、レベル (κ_+, κ_-) のボゾン頂点作用素代数から、局所的でない 2 つの screening 作用素 $S_+(z)$, $S_-(z)$ とその多重積分たち

$$\int \cdots \int S_+(z_1) \cdots S_+(z_r) dz_1 \cdots dz_r, \quad \int \cdots \int S_-(z_1) \cdots S_-(z_s) dz_1 \cdots dz_s$$

を使ってヴィラゾロ頂点作用素代数 $Vir_{c_{\kappa_+, \kappa_-}}$ とその表現の圏が研究される。

このため §4 章ではボゾン頂点作用素代数 Π_{κ_+, κ_-} について述べる。

§5 章では、 Π_{κ_+, κ_-} 上で screening 作用素の重複した積分達を使って $Vir_{c_{\kappa_+, \kappa_-}}$ とその表現を得る方法を書いた。

ところで重複した積分は twisted de Rham 理論にもとづいて行われる。この twisted de Rham 理論は $\kappa_+, \kappa_- \notin \mathbb{Q}$ の場合は単純な構造を持っている。このため §5 章では $\kappa_+, \kappa_- \notin \mathbb{Q}$ の場合に考察を行った。

私の目的は、 $p_+, p_- \geq 2$, $(p_+, p_-) = 1$ のとき、 $\kappa_+ = \frac{p_-}{p_+}$, $\kappa_- = \frac{p_+}{p_-}$ の場合である。

この場合中心電荷は $c = c_{\kappa_+, \kappa_-} = c_{p_+, p_-} = 13 - 6 \frac{(p_+ - p_-)^2}{p_+ p_-}$ である。中心電荷 c は c_{κ_+, κ_-} と c_{p_+, p_-} の 2 つの表し方を使ったがあえて混用する。

$c = 13 - 6 \frac{(p_+ - p_-)^2}{p_+ p_-}$ は極小系列のもつ中心電荷であるが、この論文の目的は極小系列以外の表現達の構造を徹底的に調べることである。この過程で極小系列の役割も明らかになる。

正の有理レベル $\kappa_+ = \frac{p_-}{p_+}, \kappa_- = \frac{p_+}{p_-}$ の場合の twisted de Rham 理論は極めて複雑な構造を持っている。この困難を克服するため、基礎環を modular 系 ($\mathcal{K} = \mathbb{C}((\epsilon)), \mathcal{O} = \mathbb{C}[[\epsilon]]$) に持ち上げ、対応してレベルを $\kappa_+(\epsilon), \kappa_-(\epsilon) \in \mathcal{O}, \kappa_+(\epsilon)\kappa_-(\epsilon) = 1$ と持ち上げて twisted de Rham 理論を展開する。基礎環 $\mathcal{K} = \mathbb{C}((\epsilon))$ を考えると $\kappa_{\pm} \notin \mathbb{Q}$ であるので、§5 章で展開した理論を使うことができる。

問題は理論に使われる各種積分量が $\mathcal{O}$ に属することを示すことである。この積分量の $\mathcal{O}$ 整値性は Macdonald の本 [Mac85] の第 6 章で展開された、Jack 多項式

$$J_{\lambda}(x; \kappa_+), \quad J_{\lambda}(x; \kappa_-)$$

が $\mathcal{O}$ の整値性を示すことにより証明される。これが §5 章の内容である。

§6 章では、§5 章で $\epsilon = 0$ とおいて得られる $\mathbb{C}$ 上の twisted de Rham 理論の積分理論を使って、 $Vir_{c_{p_+, p_-}} = Vir_{c_{\kappa_+, \kappa_-}}$ を含む 2 つの頂点作用素代数

$$W_{p_+, p_-} = W_{\kappa_+, \kappa_-} : \mathfrak{sl}_2 \text{ 型 } W \text{ 頂点作用素代数}$$

および

$$M_{p_+, p_-} = M_{\kappa_+, \kappa_-} : \mathfrak{sl}_2 \text{ 型拡大頂点作用素代数}$$

が定義される。これらには

$$Vir_{c_{p_+, p_-}} \subset W_{p_+, p_-} \subset M_{p_+, p_-}$$

の関係がある。

§7 章では、 $Vir_{c_{p_+, p_-}}$ と W_{p_+, p_-} の表現の圏の構造が詳しく調べられる。我々の最終目的は M_{p_+, p_-} の表現論である。このため §8 章ではフロベニウス作用素と呼んだ作用素 E および F を導入する。

このフロベニウス作用素の性質を使って、 M_{p_+, p_-} の既約表現が全て決定される。その数は有限個である。§8 章の詳しい説明は本論文に譲った。本論文における E, F の構成はよく整理されておらず複雑である。現在橋本義武氏と共同でこの部分の自然な構成を考察し、ほぼ完全版を得た。これは近々発表する予定である（この部分は 2016 年 1 月の追記）。

§ 2. 場の作用素と局所性

共形場理論における最も重要な概念は、(1) エネルギー・モーメント・テンソル $T(z)$ の存在、(2) 2 つの場の作用素 $A(z), B(z)$ が互いに局所的であること、そこより生じる

場の作用素の積 $A(z)B(w)$ の $z = w$ のまわりでの作用素展開、(3) 場の作用素 $A(z)$ の子孫の場の作用素の存在、これを言い切った field-state 対応である。

頂点作用素代数 (vertex operator algebras, VOA) はこの性質を公理化して得られた。頂点作用素代数の公理系は一見複雑なものであるが、共形場理論の視点を持つてみると見通しが良くなる。さらに言えば、共形場理論の視点を持たないとその性質は解明できない。

§ 2.1. エネルギー・モーメント・テンソルとヴィラゾロ代数

まず、共形場理論で重要な場の作用素であるエネルギー・モーメント・テンソル

$$T(z) = \sum_n L[n] z^{-n-2}$$

を見ておく。このとき、 $T(z)$ の Fourier 係数 $L[n]$ は、考えているベクトル空間に作用している作用素である。これらは次のリー環の構造をもち、このリー環を Virasoro リー代数という。

$$\mathfrak{L} = \sum_n \mathbb{C} L[n] \oplus \mathbb{C} C$$

$$[L[m], L[n]] = (m - n) L[m + n] + \frac{1}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n,0} C$$

C は $\mathfrak{L}$ の中心の元である。共形場理論を考えると、 $C = c \text{ id}$, $c \in \mathbb{C}$ と固定される。このとき、共形場理論は共形異常あるいは中心荷電 c をもつという。

$c \in \mathbb{C}$ を固定したとき、中心荷電 c をもつ $\mathfrak{L}$ の表現論を考える。表現の種類として次の2つの場合が重要である。

1. $c = 0$ のとき、 $\mathfrak{L}$ の自分自身への adjoint 表現が典型例である。
2. $c \neq 0$ のとき、 $\mathfrak{L}$ の $C = c \text{ id}$ の表現で次の条件を満たすものを考える。

$$M = \sum_{h \in \mathbb{C}} M[h], \dim M[h] < \infty \quad (M[h] = \{m \in M; (L[0] - h)^k m = 0, k \geq 1\})$$

であり、

$$H(M) = \{h \in \mathbb{C}; M[h] \neq 0\}$$

とおけば高々可算個の複素数 h_i で $h_i - h_j \notin \mathbb{Z}$ ($i \neq j$) を満たすものが存在して、

$$H(M) \subseteq \bigcup_i h_i + \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

をみたす。

この条件をみたす左 $\mathfrak{L}$ 加群のつくる Abel 圏を $\mathfrak{L}_c\text{-Mod}$ と表すことにする。

$\mathfrak{L}$ の部分リー環を

$$\mathfrak{L}_{\geq 0} = \sum_{n \geq 0} \mathbb{C}L[n] \oplus \mathbb{C}C, \quad \mathfrak{L}_{> 0} = \sum_{n \geq 1} \mathbb{C}L[n], \quad \mathfrak{L}_{< 0} = \sum_{n \geq 1} \mathbb{C}L[-n]$$

とおく。定義により、 $M \in \mathfrak{L}_c\text{-Mod}$ は次の性質をもつ：任意の $m \in M$ について

$$\dim_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{L}_{\geq 0})m < \infty.$$

$U(\mathfrak{L})$ で $\mathfrak{L}$ の普遍展開環を表し、 $c \in \mathbb{C}$ について、 $U_c(\mathfrak{L})$ で $U(\mathfrak{L})$ において $C = c \text{ id}$ とおいたものを表す。

ここで、Abel 圏 $\mathfrak{L}_c\text{-Mod}$ の単純対象をすべて求めておく。

$h \in \mathbb{C}$ について、 $|h\rangle$ を生成元として次の基本関係式で定義される $\mathfrak{L}_c\text{-Mod}$ の元を共形次元 $h \in \mathbb{C}$ をもつ Verma 加群と呼び、 M_h で表す。

$$L[n]|h\rangle = 0 \quad (n \geq 1), \quad C|h\rangle = c|h\rangle$$

$$L[0]|h\rangle = h|h\rangle$$

リー環の普遍展開環に関する Poincaré-Birkhoff-Witt の定理により、左 $U(\mathfrak{L}_{< 0})$ 加群として次は同型である。

$$U(\mathfrak{L}_{< 0}) \longrightarrow M_h, \quad P \mapsto P|h\rangle$$

各 $h \in \mathbb{C}$ について、 M_h は唯一の既約商加群 L_h を持つことが分かる。 $\mathfrak{L}_c\text{-Mod}$ の単純対象は $\{L_h : h \in \mathbb{C}\}$ でつくされる。

重要な問題として、 M_h はいつ可約か、言い換えると、いつ M_h と L_h は異なるか、また、そのとき L_h の $\mathfrak{L}_c\text{-module}$ としての構造が問題になる。この問題は、V. G. Kac, Feigin-Fuchs により 1980 年代初めに完全に解決された。これを述べる前に記号を用意する。

複素数の組 (κ_+, κ_-) で $\kappa_+ \cdot \kappa_- = 1$, $c = 13 - 6(\kappa_+ + \kappa_-)$ となるものを取る。 c と組 (κ_+, κ_-) は 1 対 1 に対応する。整数の組 $(r, s) \in \mathbb{Z}^2$ について、

$$h_{r,s} = \frac{r^2 - 1}{4} \kappa_+ - \frac{1}{2}(rs - 1) + \frac{s^2 - 1}{4} \kappa_-$$

とおく。 $h_{r,s} = h_{-r,-s}$ である。ただし $c \neq 0$ である。

定理 (V. G. Kac, Feigin-Fuchs). Verma 加群 $M_h \in \mathfrak{L}_c\text{-Mod}$ が可約であるための必要十分条件は、 $r \geq 1, s \geq 1$ なる (r, s) が存在して $h = h_{r,s}$ と表されることである。

注意 2-1 $\kappa_+, \kappa_- \notin \mathbb{Q}$ のとき、 $\{h_{r,s}, r \geq 1, s \geq 1\}$ は互いに相異なる元よりなる。しかし、 $\kappa_+, \kappa_- \in \mathbb{Q}^*$ のときは、 $\{h_{r,s}\}$ 達の間には関係が生じる。例えば、 $\kappa_+ = \frac{p_-}{p_+}$, $p_+, p_- \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, (p_+, p_-) が互いに素なとき、 $h_{r+p_+, s+p_-} = h_{r,s}$ が成立する。

さらに、 $r \geq 1, s \geq 1$ のとき、 $L_{h_{r,s}}$ の $\mathfrak{L}$ -加群の構造は Feigin-Fuchs [FF3] により完全に分かっている。この講演では $p_+, p_- \geq 2$, $(p_+, p_-) = 1$ のときが現れ、そのとき $L_{h_{r,s}}$ の詳しい構造が問題となる。

§ 2.2. 場の作用素の局所性

共形場理論における最も重要な概念である 2 つの場の作用素 $A(z), B(z)$ が互いに局所的であること、互いに局所的な場の作用素の積 $A(z)B(w)$ の $z = w$ の周りでの作用素展開について説明する。ここでは、共形場理論に則した説明をする。大事な概念なので、丁寧に行う。

中心荷電 $c \neq 0$ を固定し、 $M \in \mathfrak{L}_c\text{-Mod}$ について考える。ただし、ある $h \in \mathbb{C}$ について

$$M = \sum_{d \geq 0} M[h+d], \quad \dim_{\mathbb{C}} M[h+d] < \infty (d = 0, 1, 2, \dots)$$

という広義の $T[0]$ 固有値分解を持つと仮定する。

$$\text{End}^f(M) = \sum_{d \in \mathbb{Z}} \text{End}^f(M)[d]$$

とおく。ここに、

$$\text{End}^f(M)[d] = \{f : M \longrightarrow M, \mathbb{C}\text{-linear}, [L[0], f] = df\}$$

このとき、 $\text{End}^f(M)$ は $\mathbb{C}$ 上の $\mathbb{Z}$ -graded algebra となる。また、各 $d \in \mathbb{Z}$ と $N \in \mathbb{Z}$ について、

$$I_N[d] = \{f \in \text{End}^f(M)[d] ; \text{各 } h \in \mathbb{C} \text{ について } f = f_2 \circ f_1 \text{ と分解する,} \\ f : M[h] \xrightarrow{f_1} M[h-N] \xrightarrow{f_2} M[h+d]\}$$

とおけば、次が成立する。

$$\text{End}^f(M)[d] \supseteq I_0[d] \supseteq I_1[d] \supseteq \dots, \quad \bigcap_N I_N[d] = 0, \quad \bigcup_N I_N[d] = \text{End}^f(M).$$

$\text{End}^f(M)[d]$ には、 $\{I_N[d]\}$ を零の近傍系としてコンパクトな線形位相が入る。 $\text{End}^f(M) = \sum_d \text{End}^f(M)[d]$ の積はこの位相について連続である。また、 $\text{End}^f(M) \times M \longrightarrow M$ なる積は M に discrete 位相を入れて連続である。

さて、 $\text{End}^f(M)$ は $U(\mathfrak{L})$ について両側加群となる：

$$f \in \text{End}^f(M), P, Q \in U(\mathfrak{L}), m \in M \text{ に対し、} (PfQ)(m) = Pf(Qm)$$

である。さらに、 $\mathfrak{L}$ は adjoint で $\text{End}^f(M)$ に作用する： $\ell \in \mathfrak{L}$ として、

$$\text{ad}(\ell)(f) = \ell f - f\ell.$$

$\mathfrak{L}$ の元は $\mathbb{C}$ 上の代数 $\text{End}^f(M)$ 上に derivation として拡張され、Lie 代数の準同型

$$\text{ad} : \mathfrak{L} \longrightarrow \text{Der}_{\mathbb{C}}(\text{End}^f(M))$$

を導く。これは Virasoro 代数の $c = 0$ の表現である。

このとき $\ell \in \mathfrak{L}, P, Q \in U_c(\mathfrak{L}), \Phi \in \text{End}^f(M)$ について、次の公式が成立する。

$$\text{ad}(\ell)\Phi = \ell\Phi - \Phi\ell$$

$$\text{ad}(\ell)(P\Phi) = \text{ad}(\ell)(P)\Phi + P(\text{ad}(\ell)\Phi)$$

$$\text{ad}(\ell)(\Phi Q) = (\text{ad}(\ell)\Phi)Q + \Phi \cdot \text{ad}(\ell)(Q)$$

M 上の場の作用素を定義しよう。 $\Delta \in \mathbb{Z}$ を固定する。 $A(z) \in \text{End}^f(M)[[z, z^{-1}]]$ が M 上の共形次元 Δ をもつ場の作用素とは $A(z)$ が次の形の Fourier 展開を持つことをいう。

$$A(z) = \sum_n A[n]z^{-n-\Delta}, \quad A[n] \in \text{End}^f(M)[-n]$$

共形次元 Δ をもつ M 上の場の作用素全体のつくるベクトル空間を $\mathfrak{F}(M)[\Delta]$ と表し、 $\mathfrak{F}(M) = \sum_{\Delta} \mathfrak{F}(M)[\Delta]$ とおく。 $\mathfrak{F}(M)$ を M 上の場の作用素空間という。

上の Fourier 展開における次数の関係式は、次の微分方程式と等価である。

$$\left(z \frac{d}{dz} - \Delta_A\right) A(z) = [L[0], A(z)]$$

今 $A(z), B(z) \in \mathfrak{F}(M)$ とし、それぞれ共形次元 $\Delta_A, \Delta_B \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を持つとする。ここで組 $(A(z), B(z))$ が互いに局所的であることの定義を行う。

定義 2-1 (局所性) 組 $(A(z), B(z))$ が互いに局所的であるとは、ある整数 $N \geq 0$ が存在し、任意の $u \in M, \varphi \in M^\vee$ に対し $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \ni (z, w)$ 上の有理関数 $C_{\varphi, u}$ であって

- ・ その極は $z = 0, \infty$, $w = 0, \infty$ および $z = w$ のみ、
- ・ $z = w$ での極の位数は N 以下、

であり、以下の条件 1, 2, 3, 4 を満たすものが存在するときをいう。

1. $C_{\varphi,u}$ を領域 $U_1 = \{|z| > |w| > 0\}$ で局所座標 (z, w) で展開するとき、次が成立する。

$$\begin{aligned} C_{\varphi,u} &= \langle \varphi | A(z)B(w) | u \rangle = \sum_n \langle \varphi | [A[n]B(w)] | u \rangle z^{-n-\Delta_A} \\ &= \sum_{n,m} \langle \varphi | A[n]B(w) | u \rangle z^{-n-\Delta_A} w^{-m-\Delta_B}. \end{aligned}$$

2. $C_{\varphi,u}$ を領域 $U_2 = \{|w| > |z| > 0\}$ で局所座標 (z, w) で展開するとき、次が成立する。

$$\begin{aligned} C_{\varphi,u} &= \langle \varphi | B(w)A(z) | u \rangle = \sum_m \langle \varphi | [B[m]A(z)] | u \rangle w^{-m-\Delta_B} \\ &= \sum_{n,m} \langle \varphi | B[m]A(z) | u \rangle z^{-n-\Delta_A} w^{-m-\Delta_B}. \end{aligned}$$

3. $C_{\varphi,u}$ を領域 $U_3 = \{|w| > |z - w| > 0\}$ で局所座標 $(w, z - w)$ で展開するとき、次が成立する。

$$\begin{aligned} C_{\varphi,u} &= \langle \varphi | A(z - w)B(w) | u \rangle = \sum_n \langle \varphi | (A[n]B)(w) | u \rangle (z - w)^{-n-\Delta_A} \\ &= \sum_{n,m} \langle \varphi | A[n]B[m] | u \rangle w^{-m-\Delta_B} (z - w)^{-n-\Delta_A}. \end{aligned}$$

4. $C_{\varphi,u}$ を領域 $U_4 = \{|z| > |w - z| > 0\}$ で局所座標 $(z, w - z)$ で展開するとき、次が成立する。

$$\begin{aligned} C_{\varphi,u} &= \langle \varphi | B(w - z)A(z) | u \rangle = \sum_m \langle \varphi | (B[m]A)(z) | u \rangle (w - z)^{-m-\Delta_B} \\ &= \sum_{n,m} \langle \varphi | B[m]A[n] | u \rangle z^{-m-\Delta_A} (w - z)^{-m-\Delta_B}. \end{aligned}$$

注意 2-2 組 $(A(z), B(z))$ が互いに局所的であれば、無限行列環 $\text{End}^f(M)$ に値を持つ $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の有理関数 $C(z, w)$ で、その行列要素が $\langle \varphi | C(z, w) | u \rangle = C_{\varphi,u}$ となるものが唯一つ存在する。

この $C(z, w)$ を $A(z)B(w)$, $B(w)A(z)$, $A(z - w)B(w)$, $B(w - z)A(z)$ と表す。この書き方は、これらが表す $\text{End}^f(M)$ に値を持つ $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の有理関数として、どの領域で

展開して定義されたかを表す。そこで $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の有理関数としては、次が成立している:

$$A(z)B(w) = B(w)A(z) = A(z-w)B(w) = B(w-z)A(z).$$

注意 2-3 この解析接続して得られた $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の有理関数において、 $z = w$ のまわりの展開

$$A(z)B(w) = \sum_n (A[n]B)(w)(z-w)^{-n-\Delta_A}$$

を全作用素展開と呼び、その $z = w$ での極の主要部を次のように表して、 $z = w$ での作用素展開と呼ぶ。

$$A(z)B(w) \sim \sum_{n \geq -\Delta_A+1} (A[n]B)(w)(z-w)^{-n-\Delta_A}$$

同様なことが、

$$\begin{aligned} B(w)A(z) &= \sum_m (B[m]A)(z)(w-z)^{-m-\Delta_B} \\ &\sim \sum_{m \geq -\Delta_B+1} (B[m]A)(z)(w-z)^{-m-\Delta_B} \end{aligned}$$

についても言える。

注意 2-4

1. $A(z) \in \mathfrak{F}(M)$ に対して、一般には組 $(A(z), A(z))$ は互いに局所的ではない。これより、組 $(A(z), A(z))$ が互いに局所的であるという言明は意味あることである。
2. $T(z) = \sum_n L[n]z^{-n-2} \in \Phi(M)$ とおくと、組 $(T(z), T(z))$ は互いに局所的であり、作用素展開

$$T(z)T(w) \sim \frac{\frac{1}{2}c}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}\partial_w T(w)$$

が成立する。この作用素展開は $\{L(n)\}$ のなすリー環 $\mathfrak{L}$ の定義式と同値である。

3. $A(z), B(z) \in \mathfrak{F}(M)$ について、組 $(A(z), A(z)), (B(z), B(z)), (A(z), B(z))$ は互いに局所的であるとする。このとき、次の表示が成立する: $R > r > 0$ とするとき、

$$\begin{aligned} &[A[n], B[m]] \\ &= \frac{1}{(2\pi r)^2} \int_{|w|=R} \int_{|z-w|=r} (z-w)^{n+\Delta_A-1} w^{m+\Delta_B-1} A(z)B(w) dz dw \\ &= \sum_{\ell \geq -\Delta_A+1} \int_{|w|=R} \int_{|z-w|=r} (z-w)^{n+\Delta_A-1} w^{m+\Delta_B-1} (A[n]B)(w)(z-w)^{-\ell-\Delta_A} dz dw. \end{aligned}$$

これより、交換関係 $[A[n], B[m]]$ は $A(z)B(w)$ の $z = w$ での作用素展開のみに依存することが分かる。さらに、 $z = w$ における作用素展開の極の主要部は交換関係 $[A[n], B[m]]$, $n, m \in \mathbb{Z}$ で完全に決まる。

ここで述べた局所性と作用素展開について詳しく知りたい方は、例えば E.Frenkel, D.Ben-Zvi の教科書 [FBZ] を参照されたい。

次の命題は共形場理論の専門家には暗に知られていたが、頂点作用素代数の一部の専門家では Dong の補題として知られている。

命題 2-1 (局所性の伝播). $A(z), B(z) \in \mathfrak{F}(M)$ について、組 $(A(z), A(z)), (B(z), B(z)), (A(z), B(z))$ は互いに局所的であるとする。このとき、 $A(z), B(z), \frac{dA(z)}{dz}, \frac{dB(z)}{dz}$ および $(A[n]B)(z), (B[m]A)(z), m, n \in \mathbb{Z}$ はどの 2 つの対についても互いに局所的である。

§ 3. 頂点作用素代数とその表現

局所性の伝播についての補題に基づくと、局所作用素の空間 $\Phi(M) \subseteq \mathfrak{F}(M)$ という概念が定義される。

§ 3.1. 局所作用素の空間

定義 3-1 (局所作用素の空間). 部分空間 $\Phi(M) \subseteq \mathfrak{F}(M)$ が局所作用素の空間であるとは、以下を満たすことを言う。ただし M は $U_c(\mathfrak{L})$ -module, $c \neq 0$ とする。

1. $\Phi(M) \ni \text{id}_M, T(z)$
2. $A(z), B(z) \in \Phi(M)$ とすると $(A(z), B(z))$ は互いに local
3. $A(z), B(z) \in \Phi(M)$ とすると $(A[n]B)(z), (B[n]A)(z) \in \Phi(M)$ ($n \in \mathbb{Z}$)
4. $A(z) \in \Phi(M)$ ならば $\frac{dA}{dz}(z) \in \Phi(M)$

注意 3-1 $\cdot (T(z), T(z))$ は互いに local であるので、局所性の伝播により少なくとも一つの局所作用素の空間が存在する。

・局所作用素の空間は数多くあり得る。

・ S を $\mathfrak{F}(M)$ の部分集合とし、 S のどの 2 つの組—自分自身の組も含めて—についても、その 2 つは互いに局所的であるとする。このとき、 S を含む包含関係について、最

小の局所作用素の空間 $\Phi(M)$ が存在する。この S を $\Phi(M)$ の生成元という。 S の各元は共形次元をもつと仮定しておく。また、 $T(z) \in S$ となるものとしておく。

定義 3-2 局所作用素の空間 $\Phi(M)$ は、有限集合よりなる生成元の集合をもつとき、有限生成であるという。

この局所作用素の空間の性質を抽象化して、頂点作用素代数 (Vertex Operator Algebra, VOA) の概念が定義される。

定義 3-3 (頂点作用素代数) $V = (V, |0\rangle, T, Y)$ が中心荷電 $c_V \in \mathbb{C}$ をもつ頂点作用素代数であるとは、次の 1, 2, 3 を満たすことをいう。

1. $V \in \mathfrak{L}_{c_V}\text{-Mod}$.
2. $L[0]$ について V は次の性質をもつ。

$$V = \sum_{\Delta \geq 0} V[\Delta] \quad \dim_{\mathbb{C}} V[\Delta] < \infty \text{ であって}$$

$$V[0] = \mathbb{C}|0\rangle, \quad V[2] \ni T = L[-2]|0\rangle, \quad T \neq 0.$$

$V \ni |0\rangle$ を真空元、 $V \ni T$ を Virasoro 元という。

3. 線型写像

$$Y : V \longrightarrow \text{End}^f(V)[[z, z^{-1}]]$$

$$A \mapsto Y(A : z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A[n] z^{-n-\Delta_A} \quad (A \in V[\Delta_A])$$

が存在して、次をみたす。

$$(a) \quad Y(|0\rangle : z) = \text{id},$$

$$Y(T : z) = T(z),$$

$$Y(A : z)|0\rangle \in A + V[[z]]z.$$

- (b) $A, B \in V$ について $Y(A : z), Y(B : z)$ は互いに局所的で、全作用素展開

$$\begin{aligned} Y(A : z)Y(B : z) &= Y(A(z)B : w) \\ &= \sum_n Y(A[n]B : w)(z - w)^{-n-\Delta_A}. \end{aligned}$$

が成立する。

(c) $A \in V$ について微分方程式

$$\frac{d}{dz}Y(A; z) = Y(L[-1]A; z) = [L[-1], Y(A; z)]$$

が成立する。

注意 3-2 以下、本論説で扱う頂点作用素代数は、その中心荷電が $c_V \neq 0$ であると仮定する。 $c_V = 0$ の時は少し注意が必要だからである。

定義 3-4 T を含む V の有限部分集合 $S \ni T$ が存在して、 $\Phi(V) = \{Y(A; z); A \in V\}$ が局所作用素の空間として $\{Y(A; z), A \in S\}$ で生成されるとき、 V は有限生成であり S で生成されるという。ただし S の元は共形次元を持つとする。

ところで V が頂点作用素代数であると、 $A, B, C \in V$ について、 $Y(A; z)$, $Y(B; z)$, $Y(C; z)$ はその作用素積について数々の compatibility 条件をみたす。この条件が Borchers により確立され、今日 Borchers の関係式と呼ばれる。詳しくは E.Frenkel 達の教科書 [FBZ] を参照されたい。

さて、頂点作用素代数を定義する最も重要な性質は、 $\frac{d}{dz}Y(A; z) = Y(L[-1]A; z)$ および、組 $(Y(A; z), Y(B; z))$ が互いに局所的であることである。この関係式は D -加群の概念を使って表すことができる。頂点作用素代数は Beilinson-Drinfeld により chiral algebra D -加群の言葉を使って定義された。これについても、E.Frenkel 達の教科書を参照されたい。

講演者は、頂点作用素代数の定義はこの D -加群を使った chiral algebra によるものが自然であると考え。しかし、このためには D -加群についての非常に抽象的な概念を駆使する必要がある、使いこなすのが難しい。近い将来この概念を使いこなす若い意欲ある研究者が出現することを待ち望むものである。

頂点作用素代数の定義が出来ると、頂点作用素代数の表現という概念が定式化される。 (M, Y^M) が $V = (V, |0\rangle, T, Y)$ の表現とは、 $M \in \mathfrak{L}_{c_V}\text{-Mod}$ であり、 $Y^M : V \rightarrow \text{End}^f(M)[[z, z^{-1}]]$ が存在して、想像される関係式がみたされる時をいう。これも詳しくは、E.Frenkel 達の教科書を参照されたい。

頂点作用素代数 V の表現論を展開するには、 V の普遍展開環 $U(V)$ を定義しておく と便利である。

定義 3-5(普遍展開環) V の普遍展開環 $U(V)$ は、 $A \in V$ と $n \in \mathbb{Z}$ について、その Fourier 係数 $A[n]$ で生成される $\mathbb{Z}$ -graded $\mathbb{C}$ -algebra であり、頂点作用素代数の定義にある数々の

関係式を、その Fourier 成分の関係で書き表したものを基本関係式とすることで定義される。

普遍展開環は $U(V) = \sum_{d \in \mathbb{Z}} U(V)[d]$ なる $\mathbb{Z}$ -graded algebra であり、 $U(V)[d] = \{P \in U(V); [L[0], P] = dP\}$ と $L[0]$ の adjoint 作用で degree 付けられている。 $A(z)$ 達の間の互いに局所的という条件は、その Fourier 成分の間の無限個の元で構成される、Borcherds の関係式とよばれる 2 次関係式となる。このため、各 $U(V)[d]$ に次のように位相を導入して linearly compact Hausdorff 空間にする。すなわち $U(V)[d]$ の位相は、各 $N \geq 0, d \in \mathbb{Z}$ について $I_N[d]^f = \sum_{n \geq N} U(V)[d-n]U(V)[n]$ とおき、 $I_N[d]$ を $U(V)[d]$ に入っている位相による閉包とすると、 $U(V)[d]$ には $\{I_N[d]; N = 1, 2, \dots\}$ が 0 の開近傍系となるよう位相が入れられる。 $U(V) = \sum_d U(V)[d]$ には $U(V)[d]$ の直和として locally compact linear topology が入る。詳しくは、[FZ92], [MNT] を参照されたい。

V の頂点作用素代数としての表現 (M, Y^M) と $U(V)$ の適当な条件を持つ $U(V)$ 加群とは同値である。これより、 V の表現のつくる Abel 圏 $V\text{-Mod}$ と $U(V)$ 加群のつくる Abel 圏 $U(V)\text{-Mod}$ は Abel 圏の同値となることは容易に分かるであろう。では、 $\text{MinVir}_{c_{p+p_-}}$ の構造はどうであろうか。頂点作用素代数の自然な準同型

$$\text{Vir}_{c_{p+p_-}} \longrightarrow \text{MinVir}_{c_{p+p_-}} \longrightarrow 0$$

が引き起こすアーベル圏の準同型

$$\text{MinVir}_{c_{p+p_-}}\text{-Mod} \longrightarrow \text{Vir}_{c_{p+p_-}}\text{-Mod}$$

は injective で、image は fully faithful な部分アーベル圏である。この部分アーベル圏の構造は次の Feigin-Fuchs による構造定理で分かる ([IK] も参照)。

定理 3-1 (Feigin-Fuchs)[FF1] $\text{MinVir}_{c_{p+p_-}}\text{-Mod}$ は、単純対象

$$L_{h_{r,s}} = L_{h_{p_+-r, p_--s}}, \quad 1 \leq r \leq p_+ - 1, 1 \leq s \leq p_- - 1$$

をもつ半単純なアーベル圏である。結果として単純対象の数は $\frac{1}{2}(p_+ - 1)(p_- - 1)$ である。

さて、 $\text{Vir}_c\text{-Mod} \longrightarrow U_c(\mathfrak{L})\text{-Mod}$ はアーベル圏としての同値であることが分かった。 $U_c(\mathfrak{L})\text{-Mod}$ の元と $\text{Vir}_c\text{-Mod}$ の元を、これで自由に行き来できる。

ここで、 $U_c(\mathfrak{L})\text{-Mod}$ の fully faithful 部分アーベル圏 $U_c(\mathfrak{L})\text{-mod}$ を定義しておくのが便利である：

定義 3-6 $U_c(\mathfrak{L})\text{-Mod} \ni M$ が $U_c(\mathfrak{L})\text{-mod}$ に属する

$$\iff H(M) \subseteq H_c = \bigcup_{r,s \geq 0} h_{r,s} + \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

3.2. 頂点作用素代数の C_2 -有限性と零モード代数

頂点作用素代数の有限性について述べておく。以下、頂点作用素代数は中心荷電 $c_V \neq 0$ と仮定し、さらに頂点作用素代数として有限個の生成元をもつと仮定しておく。

定義 3-7 (Zhu の C_2 -有限性) V が Zhu の C_2 -有限性条件をみたすとは、

$$C_2(V) \equiv \{A[n]B : A \in V(\Delta_A), B \in V, n \leq -N - 1\}$$

とおくとき

$$\dim_{\mathbb{C}} V/C_2(V) < \infty$$

をみたすときを言う。

もう一つ、 V の零モード代数と呼ぶ $\mathbb{C}$ 上の結合代数 $A_0(V)$ を定義しておこう。

定義 3-8 (零モード代数). $p \in \mathbb{Z}$ について、 $F_p(U(V)) = \sum_{d \leq p} U(V)[\Delta]$ とおく。 $\mathfrak{I}$ を $U(V)$ の、 $U(V) \cdot F_{-1}(V)$ の (degree wise に closure をとった) degree wise closed left ideal とおく。 $I = \mathfrak{I} \cap F_0(U(V))$ とおくと I は $F_0(U(V))$ の closed 両側 ideal である。

$$A_0(V) = F_0(U(V))/I$$

において、 $\mathbb{C}$ 上の associative algebra が得られる。これを V の零モード代数と呼ぶ。

C_2 -有限性や零モード代数は、1990 年代初めに I.Frenkel とその弟子 Zhu により定式化された。次の定理が両氏によって得られた基本定理である。 V は有限個の元 $\{S_1, \dots, S_N\}$ で生成されるとし、 S_i 達は共形次元 Δ_{S_i} をもつとする。

定理 3-2(Frenkel-Zhu [FZ92]) V は C_2 -有限性条件をもつとする。このとき次が成立する。

1. $\dim A_0(V) < \infty$ であり、 $A_0(V)$ は $[S_1(0)], \dots, [S_N(0)]$ を $\mathbb{C}$ -algebra としての生成元にもつ。
2. $V\text{-Mod}$ は有限個の既約表現をもつ。ただし、 $V\text{-Mod}$ はアーベル圏としては完全可約とは限らない。

3. 正の整数 $L \geq 1$ が存在して、任意の $M \in V\text{-Mod}$ 、任意の $h \in H(M)$ について、 $M[h] = \{m \in M, (L_0 - h)^L m = 0\}$ が成立する。
4. $A_0(V)\text{-mod}$ を、有限次元代数 $A_0(V)$ の有限次元表現のつくるアーベル圏とする。

$$HW : V\text{-Mod} \longrightarrow A_0(V)\text{-mod}$$

$$M \mapsto HW(M).$$

なる covariant functor が、 $HW(M) = \{m \in M, F_{-1}(U(V))m = 0\}$ として定義される。この HW は両辺の既約表現の間の一対一対応を与える。

頂点作用素代数 V に従う共形場理論を展開するためには、左 $U(V)$ -加群だけでなく両側 $U(V)$ 加群を考えることが重要である。しかし、頂点作用素代数の表現を上のように定義しただけではよい表現論が期待できない。目的によって内在的条件を付け加える必要があると考える。

我々の目的である sl_2 型の拡大 W -代数の理論を展開するためには、後に定義する $V\text{-Mod}$ の部分アーベル圏 $V\text{-mod}$ を考えれば十分である。

$U(V)$ は、I.Frenkel と Zhu [FZ92] により 1990 年代初めに定式化された。 C_2 -有限性をもつ強い条件の下での定式化とその性質については [MNT] を参照されたい。

頂点作用素代数とその表現の例に移ろう。

§ 4. ボゾン頂点作用素代数と格子頂点作用素代数

ヴィラゾロ頂点作用素代数は、ボゾン頂点作用素代数と格子頂点作用素代数上に働く screening 作用素を重複積分した作用素を使って定義される。この章はその準備である。

§ 4.1. ボゾン頂点作用素代数の荷電格子

まずはじめに、0 でない複素数の組 (κ_+, κ_-) で $\kappa_+ \kappa_- = 1$ を満たすものを固定する。

2 つの場合に分ける。

場合 I $\kappa_+, \kappa_- \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$

場合 II $\kappa_+ = \frac{p_-}{p_+}, \kappa_- = \frac{p_+}{p_-}$, ここに $p_+, p_- \in \mathbb{Z}$ は互いに素、ただし $(p_+, p_-) \neq (2, 3)$

注意 4-1 $\kappa_+, \kappa_- \in \mathbb{Q}_{<0}$ の場合は扱わない。この場合も重要であるがいろいろ性質が変わってくる。

上記 (κ_+, κ_-) について

$$\frac{\alpha_{\pm}^2}{2} = \kappa_{\pm}, \quad \alpha_+ \alpha_- = -2$$

となる (α_+, α_-) をとり固定する。

定義 4-1 (荷電格子)

$$X_{\kappa_+, \kappa_-} = \mathbb{Z} \frac{\alpha_+}{2} + \mathbb{Z} \frac{\alpha_-}{2} \subset \mathbb{C}$$

とおく。

場合 I のとき、 X_{κ_+, κ_-} はランク 2 の自由アーベル群、

場合 II のとき、 X_{κ_+, κ_-} はランク 1 の自由アーベル群である。

注意 4-2 (κ_+, κ_-) を固定してあるときは、 X_{κ_+, κ_-} を単に X と書く。

$r, s \in \mathbb{Z}$ について

$$\beta_{r,s} = \frac{1-r}{2} \alpha_+ + \frac{1-s}{2} \alpha_-$$

とおく。

場合 I のとき、 $X_{\kappa_+, \kappa_-} = \{\beta_{r,s} ; r, s \in \mathbb{Z}\}$

場合 II のとき、 $p_+ \frac{\alpha_+}{2} + p_- \frac{\alpha_-}{2} = 0$ の関係があり

$$X_{\kappa_+, \kappa_-} = \{\beta_{r,s} ; r, s \in \mathbb{Z}\} / \sim$$

である。

§ 4.2. ボゾン頂点作用素代数。一般の場合

ここでは $\kappa_+, \kappa_- \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$, $\kappa_+ \kappa_- = 1$ をとり、

$$X = \mathbb{Z} \frac{\alpha_+}{2} + \mathbb{Z} \frac{\alpha_-}{2} = \{\beta_{r,s} \mid r, s \in \mathbb{Z}\}$$

を考える。双線形写像

$$\cdot : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (\beta, \beta') \mapsto \beta \beta'$$

の基底 $\frac{\alpha_+}{2}, \frac{\alpha_-}{2}$ に関する内積表は

$$\begin{bmatrix} \frac{\kappa_+}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\kappa_-}{2} \end{bmatrix}$$

となり、行列式は 0 である。

$$\rho_0 = \frac{\alpha_+}{2} + \frac{\alpha_-}{2} \in X \text{ とおく。}$$

文字 $b[n]$, $n \in \mathbb{Z}$ を用意し、その交換関係が $[b[m], b[n]] = m\delta_{m+n,0} \text{ id}$ で定義される $\mathbb{Z}$ -graded algebra $U^f(b)$ を考える。

$$b = \sum_n \mathbb{C} b[n], \quad b_{\pm} = \sum_{n \geq 1} \mathbb{C} b[\pm n], \quad b_0 = \mathbb{C} b[0], \quad \bar{b} = b_+ \oplus b_-$$

とおく。Poincaré-Birkhoff-Witt の定理より、

$$U^f(b) = U(b_-) \otimes U(b_+) \otimes U(b_0)$$

である。ここに、 $U(b_{\pm}) = \mathbb{C}[b_{\pm}]$ は無限変数多項式環であり、 $U(b_0) = \mathbb{C}[b[0]]$ も多項式環である。 $\deg b[n] = -n$ とすれば、 $U^f(b) = \sum_{d \in \mathbb{Z}} U^f(b)[d]$ という $\mathbb{Z}$ -graded algebra の構造が入る。 $U^f(b) = U^f(\bar{b}) \otimes U(b_0)$ となる。 $U^f(b) = \sum_{d \in \mathbb{Z}} U^f(b)[d]$ も $\mathbb{Z}$ -graded algebra である。

各 $d \in \mathbb{Z}$, $N = 0, 1, 2, \dots$ について、

$$I_N[d] = \sum_{n \geq N} U^f(\bar{b})[d-n] \cdot U^f(\bar{b})[n]$$

とおく。 $U^f(\bar{b})[d] \supseteq I_0[d] \supseteq I_1[d] \supseteq \dots, \bigcap I_N[d] = \{0\}$ である。

$$U(\bar{b})[d] = \lim_N U^f(\bar{b})[d]/I_N[d]$$

には自然にコンパクト・ハウスドルフ $\mathbb{C}$ -linear な位相空間の構造が入る。 $U(\bar{b}) = \sum_{d \in \mathbb{Z}} U(\bar{b})[d]$ は $\mathbb{Z}$ -graded topological $\mathbb{C}$ -algebra となる。また、 $U(b) = U(b) \otimes U(b_0)$ も topological な $\mathbb{Z}$ -graded algebra である。

定義 4-2 ハイゼンベルグ代数を

$$U(b) = U(b_-) \otimes U(b_+) \hat{\otimes} U(b_0)$$

として $U(b)$ の元 P をこの順序で書いたものを正規順序積といい

$$: P :$$

で表す。

例 4-1

$$: b[n]b[m] := \begin{cases} b[n]b[m] & n \leq m \\ b[m]b[n] & m \leq n \end{cases}$$

ここで $\beta \in \mathbb{C}$ に対し、左 $U(b)$ 加群 $F_\beta \ni u_\beta$ と右 $U(b)$ 加群 $F_\beta^\vee \ni \varphi_\beta$ を次で定義される $U(b)$ 加群とし、それぞれ最高ウェイト β を持つ左フォック加群、右フォック加群と呼ぶ。

$$\begin{aligned} F_\beta \ni u_\beta : b[n]u_\beta &= 0 \quad (n \geq 1) \\ b[0]u_\beta &= \beta u_\beta \end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned} U(b_-) &\xrightarrow{\simeq} F_\beta \\ P &\mapsto Pu_\beta \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} F_\beta^\vee \ni \varphi_\beta : \varphi_\beta b[-n] &= 0 \quad (n \geq 1) \\ \varphi_\beta b[0] &= \varphi_\beta \beta \end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned} U(b_+) &\xrightarrow{\simeq} F_\beta^\vee \\ Q &\mapsto \varphi_\beta Q \end{aligned}$$

である。また、次の canonical pairing

$$\langle | \rangle : F_\beta^\vee \times F_\beta \longrightarrow \mathbb{C}$$

が、

$$\langle \varphi_\beta | u_\beta \rangle = 1, \quad \langle \varphi P | u \rangle = \langle \varphi | Pu \rangle$$

を満たすようにただ一つ決まる。

ここで文字 $\hat{b}$ を用意し

$$[b[n], \hat{b}] = \delta_{n,0} \hat{b}$$

を満たすとする。

このとき $\beta \in \mathbb{C}$ に対し、左 $U(b)$ - module map

$$e^{\beta \hat{b}} : F_{\beta_1} \rightarrow F_{\beta_1 + \beta} \quad \text{が} \quad e^{\beta \hat{b}} u_{\beta_1} = u_{\beta_1 + \beta}$$

を満たすように唯一つ定まる。同様に、右 $U(b)$ - module map

$$e^{\beta\hat{b}} : F_{\beta_1}^\vee \rightarrow F_{\beta_1-\beta}^\vee \quad \text{が} \quad \varphi_{\beta_1} e^{\beta\hat{b}} = \varphi_{\beta_1-\beta}$$

のように唯一つ定まる。

正規積は、 $e^{\beta\hat{b}}$ を $P \in U(b)$ の右側に持ってくることで決める。

例 4-2 : $e^{\beta\hat{b}}P := Pe^{\beta\hat{b}} = e^\beta P \quad (P \in U(b))$

今 $\beta \in \mathbb{C}$ に対して、形式的に

$$\varphi_\beta(z) = \hat{b}_\beta + b_\beta[0] \log z - \sum_{n \neq 0} \frac{b_\beta[n]}{n} z^{-n}$$

とおく。ここに $\hat{b}_\beta = \beta\hat{b}, b_\beta[n] = \beta b[n]$ とする。

さらに

$$\varphi_\beta^\pm(z) = \mp \sum_{n \geq 1} \frac{b_\beta[n]}{n} z^{-n}$$

とおくと

$$\varphi(z) = \hat{b}_\beta + b_\beta[0] \log z + \varphi_\beta^-(z) + \varphi_\beta^+(z)$$

が成立する。

$$b_\beta(z) = \frac{d}{dz} \varphi_\beta(z) = \sum_n b_\beta[n] z^{-n-1}$$

とおく。次が成立する。

$$\begin{aligned} \varphi_{\beta_1}(z) \varphi_{\beta_2}(w) &\sim \log(z-w) \\ b_{\beta_1}(z) b_{\beta_2}(w) &\sim \frac{\beta_1 \beta_2}{(z-w)^2} id. \end{aligned}$$

今

$$\begin{aligned} V_\beta(z) &=: e^{\varphi_\beta(z)} : \\ &= e^{\hat{b}_\beta} z^{b_\beta[0]} e^{\varphi_\beta^-(z)} e^{\varphi_\beta^+(z)} \end{aligned}$$

とおく。

$$\bar{V}_\beta(z) = e^{\varphi_\beta^-(z)} e^{\varphi_\beta^+(z)} \in U(\bar{b})[[z, z^{-1}]]$$

である。このとき

$$V_\beta(z) : F_{\beta_1} \rightarrow F_{\beta_1+\beta}[[z, z^{-1}]] z^{\beta\beta_1}$$

が成立する。

今 $\kappa_+, \kappa_- \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$, $\kappa_+ \kappa_- = 1$ を固定し、

$$X = X_{\kappa_+, \kappa_-} = \mathbb{Z} \frac{\alpha_+}{2} + \mathbb{Z} \frac{\alpha_-}{2}$$

を考える。 $\rho_0 = \frac{\alpha_+}{2} + \frac{\alpha_-}{2} \in X_{\kappa_+, \kappa_-}$ とおき ($\rho_0 = \frac{\alpha_0}{2}$, $\alpha_0 = \alpha_+ + \alpha_-$)、

$$\begin{aligned} T(z; \rho_0) &= \frac{1}{2} : b(z)^2 : + \partial_z b_{\rho_0}(z) \\ &= \sum_n T[n; \rho_0] z^{-n-2} \end{aligned}$$

を考える。 κ_+, κ_- を固定して考えているときは、 ρ_0 を省略し $T(z)$ と表す。

命題 4-1 (1) $c_{\rho_0} = 13 - 6(\kappa_+ + \kappa_-)$ として

$$T(z)T(w) \sim \frac{\frac{1}{2}c_{\rho_0}}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}\partial_w T(w)$$

(2) $h_\beta = \frac{1}{2}\beta\beta - \beta_0\beta \in \mathbb{C}$ として

$$T(z)V_\beta(w) \sim \frac{h_\beta}{(z-w)}V_\beta(w) + \frac{1}{(z-w)}\partial_w V_\beta(w)$$

(3) $\beta_1, \dots, \beta_N \in \mathbb{C}$ として

$$\begin{aligned} V_{\beta_1}(z_1) \cdots V_{\beta_N}(z_N) &= e^{\hat{b}_{\beta_1} + \cdots + \hat{b}_{\beta_N}} \prod_{j=1}^N z_j^{b_{\beta_j}[0]} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (z_i - z_j)^{\beta_i \beta_j} \\ &\quad \times : \overline{V_{\beta_1}}(z_1) \cdots \overline{V_{\beta_N}}(z_N) : \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} : \overline{V_{\beta_1}}(z_1) \cdots \overline{V_{\beta_N}}(z_N) : &:= e^{\sum_{a=1}^N \varphi_{\beta_a}^-(z_a)} e^{\sum_{a=1}^N \varphi_{\beta_a}^+(z_a)} \\ &\in U(\bar{b})[[z_1^{\pm 1}, \dots, z_N^{\pm 1}]] \end{aligned}$$

である。

§ 4.3. ボゾン頂点作用素代数 Π_{κ_+, κ_-}

まず 0 でない複素数の組 (κ_+, κ_-) で $\kappa_+ \kappa_- = 1$ となるものを固定する。このとき中心荷電は $c_{\kappa_+, \kappa_-} = 13 - 6(\kappa_+ + \kappa_-)$ である。さらに (α_+, α_-) を $\alpha_+ \alpha_- = -2$, かつ

$\alpha_+^2/2 = \kappa_+$, $\alpha_-^2/2 = \kappa_-$ となるものを取り固定する。 $\alpha_- = -2/\alpha_+$ である。 $\alpha_0 = \alpha_+ + \alpha_-$ とおくと、 $c_{\kappa_+, \kappa_-} = 1 - 3\alpha_0^2$ である。

このパラメータの組 (κ_+, κ_-) に対し、レベル (κ_+, κ_-) を持つボゾン頂点作用素代数 Π_{κ_+, κ_-} を次で定義する。中心荷電は $c_{\kappa_+, \kappa_-} = 13 - 6(\kappa_+ + \kappa_-)$ である。

定義 4-3 (頂点作用素代数 $\Pi_{\kappa_+, \kappa_-} = (\Pi_{\kappa_+, \kappa_-}, |0\rangle, T, Y)$)

(1) $U(b)$ 加群 Π_{κ_+, κ_-} は、ベクトル空間としては $\Pi_{\kappa_+, \kappa_-} = F_0$ ($F_0 \ni |0\rangle$) である。

(2) Virasoro 元 T は

$$T = \frac{1}{2}b[-1]^2|0\rangle - \frac{\alpha_0}{2}b[-2]|0\rangle \in \Pi_{\kappa_+, \kappa_-}$$

である。

$$T(z) = \frac{1}{2} : b(z)^2 : + \frac{\alpha_0}{2} \partial b(z) \in \text{End}^f(\Pi_{\kappa_+, \kappa_-})[[z, z^{-1}]]$$

とおく。このとき前章の結果により、 Π_{κ_+, κ_-} には次を満たすような頂点作用素代数の構造が入る：

$$Y : \Pi_{\kappa_+, \kappa_-} \longrightarrow \text{End}^f(\Pi_{\kappa_+, \kappa_-})[[z, z^{-1}]]$$

$$Y(|0\rangle; z) = id, \quad Y(b[-1]|0\rangle, z) = b(z), \quad Y(T, z) = T(z)$$

とするとき

$$T(z)T(w) \sim \frac{\frac{1}{2}c_{\kappa_+, \kappa_-}}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}\partial_w T(w)$$

であり、中心荷電は c_{κ_+, κ_-} である。

注意 4-3 • $\mathbb{Z}$ -graded 位相環として、 $U(b) \simeq U(\Pi_{\kappa_+, \kappa_-})$ が成立する。また

$$L[0] = \frac{1}{2}b[0]^2 - \frac{\alpha_0}{2}b[0] + \sum_{n \geq 1} b[-n]b[n]$$

である。

• $\beta \in \mathbb{C}$ について、 $U(b)$ 加群 $F_\beta \ni |\beta\rangle$ は Π_{κ_+, κ_-} 加群であり、

$$L[n]|\beta\rangle = 0 \quad (n \geq 1), \quad L[0]|\beta\rangle = h_\beta|\beta\rangle$$

が成立する。ここに $h_\beta = \frac{1}{2}\beta^2 - \frac{1}{2}\alpha_0\beta = \frac{1}{2}(\beta - \frac{1}{2}\alpha_0)^2 - \frac{1}{8}\alpha_0^2$ である。

• $\beta \in \mathbb{C}$ について、 $\beta^\vee = \alpha_0 - \beta$ とおくと $h_\beta = h_{\beta^\vee}$ が成立する。

命題 4-2 $\Pi_{\kappa_+, \kappa_-}\text{-Mod}$ は半単純アーベル圏であり、その単純対象たちは $\{F_\beta; \beta \in \mathbb{C}\}$ である。

ところで頂点作用素代数 V について、その普遍展開環 $U(V)$ には、連続な anti-algebra isomorphism $\sigma : U(V) \rightarrow U(V)$ で $\sigma^2 = id$ をみたすものが次で定められた：

$$\sigma(A[n]) = (-1)^{\Delta} Y(e^{L(1)} A)[-n] \quad (A \in V[\Delta]).$$

これより $\sigma(U(V)[d]) = U(V)[-d]$ である。この σ を Π_{κ_+, κ_-} で考えると、 $\sigma : U(\Pi_{\kappa_+, \kappa_-}) \rightarrow U(\Pi_{\kappa_+, \kappa_-})$ は次で定まる。

$$\sigma(b[n]) = -b[-n] + \delta_{n,0} \alpha_0 id, \quad \sigma(L[n]) = L[-n].$$

今 $M \in \Pi_{\kappa_+, \kappa_-}\text{-Mod}$ について、その contragradient 双対 $M^* \in \Pi_{\kappa_+, \kappa_-}\text{-Mod}$ を $M^* = \bigoplus_h \text{Hom}_{\mathbb{C}}(M[h], \mathbb{C})$ とおき、 $u \in M, \phi \in M^*, P \in U(\Pi_{\kappa_+, \kappa_-})$ について

$$\langle P\phi, u \rangle = \langle \phi, \sigma(P)u \rangle$$

と定める。このとき次が成立する：

$$\beta \in \mathbb{C} \text{ に対し、} F_{\beta}^* = F_{\beta^{\vee}} \text{ as } \Pi_{\kappa_+, \kappa_-}\text{-module.}$$

今アーベル群 $X_{\kappa_+, \kappa_-} = \mathbb{Z} \frac{\alpha_+}{2} + \mathbb{Z} \frac{\alpha_-}{2} \subset \mathbb{C}$ を考え、 $(r, s) \in \mathbb{Z}^2$ に対し

$$\beta_{r,s} = \frac{1-r}{2} \alpha_+ + \frac{1-s}{2} \alpha_- \in X_{\kappa_+, \kappa_-}$$

とおく。 $\beta_{r,s}^{\vee} = \beta_{-r,-s}$ である。

$$h_{\beta_{r,s}} = h_{r,s} = \frac{r^2-1}{4} \kappa_+ - \frac{rs-1}{2} + \frac{s^2-1}{4} \kappa_-$$

が成立する。 $h_{r,s} = h_{-r,-s}$ である。 $H_{\kappa_+, \kappa_-} = \{h_{r,s}; r, s \in \mathbb{Z}\}$ とおく。

注意 4-4 (1) $\kappa_+, \kappa_- \notin \mathbb{Q}$ のとき

X_{κ_+, κ_-} は階数 2 の自由アーベル群であり、 $\{\beta_{r,s}; (r, s) \in \mathbb{Z}^2\}$ の元はすべて相異なる元よりなる。

(2) $\kappa_+, \kappa_- \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ のとき

X_{κ_+, κ_-} は階数 1 の自由アーベル群であり、 $\{\beta_{r,s}; (r, s) \in \mathbb{Z}^2\}$ の元の間には関係がある。

定義 4-4 $\Pi_{\kappa_+, \kappa_-}\text{-Mod}$ の fully faithful 部分アーベル圏 $\Pi_{\kappa_+, \kappa_-}\text{-mod}$ を次で導入する：

$$\begin{aligned} & M \in \Pi_{\kappa_+, \kappa_-}\text{-Mod} \text{ が } \Pi_{\kappa_+, \kappa_-}\text{-mod} \text{ に属する} \\ \iff & M = \sum_{h \in H(M)} M[h] \text{ とおいたとき } H(M) \subset H_{\kappa_+, \kappa_-} + \mathbb{Z}_{\geq 0}. \end{aligned}$$

§ 4.4. 格子頂点作用素代数 V_{p_+, p_-}

我々が扱いたいのは $\kappa_+ = \frac{p_-}{p_+}, \kappa_- = \frac{p_+}{p_-}, p_+, p_- \geq 2, (p_+, p_-) = 1, (p_+, p_-) \neq (2, 3)$ の場合である。

この場合、 Π_{κ_+, κ_-} は次で定義される格子頂点作用素代数 V_{p_+, p_-} の部分頂点作用素代数となる。

$$\alpha = p_+ \alpha_+ = -p_- \alpha_- = \sqrt{2p_+ p_-} = \sqrt{2p}, \quad p = p_+ p_- \quad \text{とおき}$$

$$X_{p_+, p_-} = \mathbb{Z} \frac{\alpha_+}{2} + \mathbb{Z} \frac{\alpha_-}{2}, \quad Y_{p_+, p_-} = \mathbb{Z} \alpha \subset X_{p_+, p_-}$$

とおく。 Y_{p_+, p_-} は $(\alpha_+, \alpha_-) = 2p$ より階数 1 の even integral lattice であり、 $X_{p_+, p_-} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(Y_{p_+, p_-}, \mathbb{Z})$ である。

$$V_{p_+, p_-} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_{n\alpha}$$

とおく。 $\alpha_0 = \alpha_+ + \alpha_-$ として

$$V_{p_+, p_-} \ni |0\rangle, \quad T = \frac{1}{2} b[-1]^2 |0\rangle - \frac{1}{2} \alpha_0 b[-2] |0\rangle, \quad |n\alpha\rangle \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad b[-1] |0\rangle$$

である。

命題 4-3 V_{p_+, p_-} は次で定義される頂点作用素代数の構造を持つ。

$$\begin{aligned} Y : V_{p_+, p_-} &\longrightarrow \text{End}^f(V_{p_+, p_-})[[z, z^{-1}]] \\ Y(|0\rangle, z) &= id, \quad Y(b[-1]|0\rangle, z) = b(z), \\ Y(T, z) &= T(z), \quad Y(|n\alpha\rangle, z) = V_{n\alpha}(z), \\ T(z) &= \frac{1}{2} : b(z)^2 : + \frac{1}{2} \alpha_0 \partial b(z). \end{aligned}$$

$[\beta] \in X_{p_+, p_-} / Y_{p_+, p_-}$ について、 $\mathcal{V}_{[\beta]} = \sum_{\beta \in [\beta]} F_{\beta}$ とおく。

§ 5. ヴィラゾロ頂点作用素代数の自由場表示

ここでは $\kappa_+, \kappa_- \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$, $\kappa_+ \kappa_- = 1$ を固定する。

$$X_{\kappa_+, \kappa_-} = X = \{\beta_{r,s} \mid r, s \in \mathbb{Z}\}$$

であった。

§ 5.1. ヴィラゾロ頂点作用素代数 Vir_{p_+, p_-}

以下、 Π_{κ_+, κ_-} -mod で考えよう。

$\beta \in X_{\kappa_+, \kappa_-}$ に対し $V_\beta(z)$ を考える。 $\beta_1 \in X_{\kappa_+, \kappa_-}$ とすれば

$$V_\beta(z) : F_{\beta_1} \rightarrow F_{\beta+\beta_1}[[z, z^{-1}]]z^{\beta\beta_1}$$

であった。

$$T(z)V_\beta(w) \sim \frac{h_\beta}{(z-w)^2}V_\beta(w) + \frac{1}{z-w}\partial_w V_\beta(w)$$

となり、 $V_\beta(z)$ は共形次元 h_β の primary 場である。

$h_{\alpha_\pm} = 1$ であるので、 $S_\pm(z) = V_{\alpha_\pm}(z)$ とおくと $S_\pm(z)$ は共形次元 1 の primary 場であり、これを screening 作用素と言う。

$$\begin{aligned} T(z)S_\pm(w) &\sim \frac{1}{(z-w)^2}S_\pm(w) + \frac{1}{z-w}\partial_w S_\pm(w) \\ &= \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{1}{z-w}S_\pm(w) \right) \end{aligned}$$

と、 $T(z)S_\pm(w)$ は変数 w について全微分で表される。これが screening 作用素の性質である。

このことより

$$S_\pm = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int S_\pm(z)dz : \Pi_{\kappa_+, \kappa_-} \rightarrow F_{\alpha_\pm}$$

は well-defined な線型作用素で、Virasoro 代数の元と交換する。すなわち Virasoro 代数の intertwining 作用素である。

$$W_{[\kappa_+, \kappa_-]} = \bigcap_{\varepsilon=\pm} \text{Ker} S_\varepsilon \subset \Pi_{\kappa_+, \kappa_-}$$

とおくと $|0\rangle, T \in W_{[\kappa_+, \kappa_-]}$ であり、 $W_{[\kappa_+, \kappa_-]} = (W_{[\kappa_+, \kappa_-]}, |0\rangle, T, Y)$ は T を Virasoro 元とする Π_{κ_+, κ_-} の部分頂点作用素代数である。

$W_{[\kappa_+, \kappa_-]}$ はレベル (κ_+, κ_-) をもつ $sl_2(\mathbb{C})$ 型の W 代数と呼ばれる。次が成立する。

命題 5-1 (1) $\kappa_+, \kappa_- \notin \mathbb{Q}$ のとき

$Vir_{c_{\kappa_+, \kappa_-}} \longrightarrow W_{[\kappa_+, \kappa_-]}; T \mapsto T$ は頂点作用素代数の同型を与え、更に

$$W_{[\kappa_+, \kappa_-]} = \text{Ker} S_+ = \text{Ker} S_-$$

が成立する。

(2) $\kappa_+, \kappa_- \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ のとき

$0 \rightarrow \text{Vir}_{c\kappa_+, \kappa_-} \rightarrow W_{[\kappa_+, \kappa_-]}$ は injection であるが同型とはならない。また

$$\text{Ker} S_+ \neq \text{Ker} S_-, \quad \text{Ker} S_{\pm} \neq W_{[\kappa_+, \kappa_-]}$$

である。

§ 5.2. 拡大 W 代数 M_{p_+, p_-}

命題 5-2 (1) $\mathcal{V}_{[\beta]}$ は既約 V_{p_+, p_-} -module.

(2) $V_{p_+, p_-}\text{-Mod} = V_{p_+, p_-}\text{-mod}$ が成立し、アーベル圏として半単純,

$$S_{\pm} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int S_{\pm}(z)dz : V_{p_+, p_-} \rightarrow \mathcal{V}_{[\alpha_{\pm}]}$$

は well-defined な Virasoro intertwining 作用素である。

$$M_{p_+, p_-} = \text{Ker} S_+ \cap \text{Ker} S_- \subset V_{p_+, p_-} \text{ とおく。}$$

命題 5-3 (1) $M_{p_+, p_-} \ni |0\rangle, T$ であり、 $M_{p_+, p_-} = (M_{p_+, p_-}, |0\rangle, T, Y)$ は V_{p_+, p_-} の部分頂点作用素代数である。

(2) $M_{p_+, p_-} \supset W_{[\kappa_+, \kappa_-]}$ である。このことから、 M_{p_+, p_-} は拡大 W 代数と呼ばれる。

(3) $\text{Ker} S_+ \neq \text{Ker} S_- \subset \Pi_{\kappa_+, \kappa_-}$.

(4) $0 \rightarrow \text{Vir}_{c\kappa_+, \kappa_-} \rightarrow \text{Ker} S_{\pm}$ は全射ではない。

我々の目的はこの頂点作用素代数 M_{p_+, p_-} を調べることである。 M_{p_+, p_-} を sl_2 型のレベル (p_+, p_-) の拡大 W 代数とよぶ。今までの Virasoro 代数の表現論の記述により、 M_{p_+, p_-} は極めて複雑な構造を持っていることが想像される。

$\kappa_+, \kappa_- \notin \mathbb{Q}$ の場合に頂点作用素代数 $\Pi_{\kappa_+, \kappa_-} \supset W_{[\kappa_+, \kappa_-]}$ の構造を調べておく。方法は、screening 作用素の積の積分によって得られる intertwining 作用素の性質を調べることである。

$r \geq 1, s \in \mathbb{Z}$ とする。

$$\begin{aligned} & S_+(z_1) \cdots S_+(z_r) dz_1 \cdots dz_r : F_{r,s} \longrightarrow F_{-r,s} \\ &= e^{r\alpha_+ \hat{b}} \prod_{1 \leq i \neq j \leq r} (z_i - z_j)^{\kappa_+} \prod_{j=1}^r z_j^{(1-r)\kappa_+ - (1-s)} : \bar{S}_+(z_1) \cdots \bar{S}_+(z_r) : dz_1 \cdots dz_r, \\ & : \bar{S}_+(z_1) \cdots \bar{S}_+(z_r) : \in U(\bar{b}) \hat{\otimes} \mathbb{C}[z_1, z_1^{-1}, \dots, z_r, z_r^{-1}]^{S_r} \end{aligned}$$

であった。

$X_r = \{(z_1, \dots, z_r) \in (\mathbb{C}^*)^r ; z_i \neq z_j\}$ とおく。

$$U_r(\kappa_+) = U_r(z_1, \dots, z_r; \kappa_+) = \prod_{1 \leq i \neq j \leq r} (z_i - z_j)^{\kappa_+} \prod_{j=1}^r z_j^{(1-r)\kappa_+}$$

とおくと、 $U_r(\kappa_+)$ は X_r 上の多価正則関数であり、 $\deg z_j = 1$ としたとき $U_r(\kappa_+)$ の total degree は 0 である。

$$\begin{aligned} \omega_r(\kappa_+) &= d \log U_r(\kappa_+) \\ &= \kappa_+ \sum_{1 \leq i \neq j \leq r} \frac{d(z_i - z_j)}{z_i - z_j} + (1-r)\kappa_+ \sum_{j=1}^r \frac{dz_j}{z_j} \end{aligned}$$

とおく。 X_r 上の正則関数値 de Rham 複体

$$\Omega^\bullet(X_r) = \sum_{p=0}^r \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq r} H^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}) dz_{j_1} \cdots dz_{j_p}$$

を考える。 $\nabla_{\omega_r} = d + \omega_r \wedge$ とおくと、 $(\Omega^\bullet(X_r), \nabla_{\omega_r})$ は複体をなし、twisted de Rham cohomology 群 $H^*(X_r, \nabla_{\omega_r})$ が定義される。 $H^*(X_r, \nabla_{\omega_r})$ には対称群 S_r が作用している。 $H^*(X_r, \nabla_{\omega_r})^{S_r, -}$ を S_r の作用に関する反対称部分とする。

後の議論により、 $\dim_{\mathbb{C}} H^r(X_r, \nabla_{\omega_r})^{S_r, -} = 1$ であり、コホモロジー類 $[\frac{dz_1}{z_1} \cdots \frac{dz_r}{z_r}]$ は $H^r(X_r, \nabla_{\omega_r})^{S_r, -} \simeq \mathbb{C}$ の生成元である。またコホモロジー類 $[S_+(z_1) \cdots S_+(z_r) dz_1 \cdots dz_r]$ は $H^r(X_r, \nabla_{\omega_r})^{S_r, -} \otimes \text{Hom}_{\mathbb{C}}(F_{r,s}, F_{-r,s})$ に属する。

$U_r(z_1, \dots, z_r; \kappa_+)$ の monodromy 群の定義する X_r 上の局所系を $\mathcal{L}_r(\kappa_+)$ とおき、その双対局所系を $\mathcal{L}_r^\vee(\kappa_+)$ とおく。twisted de Rham 理論により

$$H^*(X_r, \nabla_{\omega_r}) \simeq H^*(X_r, \mathcal{L}_r(\kappa_+))$$

であり

$$\int : H_r(X_r, \mathcal{L}_r^\vee(\kappa_+)) \otimes H^r(X_r, \mathcal{L}_r(\kappa_+)) \longrightarrow \mathbb{C}$$

は完全な pairing である。

そこで $[\Gamma] \in H_r(X_r, \mathcal{L}_r^\vee(\kappa_+))$ を取ると

$$S_+^{[r]}(\Gamma) = \int_{\Gamma} S_+(z_1) \cdots S_+(z_r) dz_1 \cdots dz_r : F_{r,s} \rightarrow F_{-r,s}$$

という Virasoro intertwining 作用素が定義できる。具体的に $[\Gamma] \in H_r(X_r, \mathcal{L}_r^\vee(\kappa_+))$ を決定し、 $S_+^{[r]}(\Gamma) : F_{r,s} \rightarrow F_{-r,s}$ を計算する。これは $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_r]^{S_r}$ なる対称多項式環の直交多項式である、パラメータ κ_+ を持つ Jack 多項式を使って完全に記述される。

次章で $[\Gamma] \in H_r(X_r, \mathcal{L}_r(\kappa_+))$ を定義する。以下の de Rham 理論については、[青本-喜多], [Var] を参照のこと。

上で述べたことは $\kappa_+, \kappa_- \notin \mathbb{Q}$ の場合であり、次節で述べるように理論は簡単である。しかし我々の目的は $\kappa_+ = \frac{p_-}{p_+}$, $\kappa_- = \frac{p_+}{p_-}$, $p_+, p_- \geq 2$ で p_+, p_- が互いに素な場合に調べることである。この場合、ホモロジー群 $H_r(X_r, \mathcal{L}_r^\vee(\kappa_+))$, コホモロジー群 $H^r(X_r, \mathcal{L}_r(\kappa_+))$ の挙動は極めて複雑となる。次章では $\kappa_+ = \frac{p_-}{p_+}$ を discrete valuation ring $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[\varepsilon]]$ に持ち上げ、さらに $\mathcal{K} = \mathbb{C}((\varepsilon))$ を考えて表現論を $(\mathcal{K}, \mathcal{O})$ 上の modular 系の理論と考える。また、ホモロジー、コホモロジー群を $\text{Spec } \mathcal{O}$ 上の双対ホモロジー論と考える、いわゆる隣接輪体の理論の考え方を援用する。

S_- についても、同様の考え方で行う。

§ 6. 離散付値環上への持ち上げ

§ 6.1. ねじれたド・ラーム理論とくりこまれたサイクル

以下 $p_+, p_- \geq 2, (p_+, p_-) = 1$ を取り固定する。 $\kappa_+ = \frac{p_-}{p_+}, \kappa_- = \frac{p_+}{p_-}$ とおく。 $c_{\kappa_+, \kappa_-} = 0$ を避けるため $(p_+, p_-) \neq (3, 2), (2, 3)$ とする。

$$\alpha_+ = \sqrt{\frac{2p_-}{p_+}}, \quad \alpha_- = -\sqrt{\frac{2p_+}{p_-}} = -\frac{2}{\alpha_+}$$

とおく。 $\alpha_+ \alpha_- = -2$ となる。 $\alpha_0 = \alpha_+ + \alpha_-$ とおく。 $c_{\kappa_+, \kappa_-} = 1 - 3\alpha_0^2$ が成立する。

discrete valuation ring $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[\varepsilon]]$ とその商体 $\mathcal{K} = \mathbb{C}((\varepsilon))$ を考える。

$$\alpha_+(\varepsilon) = \alpha_+^{(0)} + \alpha_+^{(1)}\varepsilon + \cdots \in \mathcal{O} \text{ を}$$

$$\alpha_+^{(0)} = \alpha_+, \quad \alpha_+^{(1)} \neq 0$$

となるよう固定し、 $\alpha_-(\varepsilon) = -\alpha_+(\varepsilon)^{-1} = \alpha_-^{(0)} + \alpha_-^{(1)}\varepsilon + \cdots$ とおく。 $\alpha_+(\varepsilon)\alpha_-(\varepsilon) = -2$ である。 $\alpha_0(\varepsilon) = \alpha_+(\varepsilon) + \alpha_-(\varepsilon)$ とおき

$$\kappa_+(\varepsilon) = \frac{1}{2}\alpha_+(\varepsilon)^2, \quad \kappa_-(\varepsilon) = \frac{1}{2}\alpha_-(\varepsilon)^2$$

とおく。 $\kappa_+(\varepsilon)\kappa_-(\varepsilon) = 1$ である。

$$c_{p_+, p_-}(\varepsilon) = c_{\kappa_+(\varepsilon), \kappa_-(\varepsilon)} = 13 - 6(\kappa_+(\varepsilon) + \kappa_-(\varepsilon))$$

とおく。

$$\begin{aligned} X_{p_+, p_-}(\varepsilon) &= \mathbb{Z} \frac{1}{2} \alpha_+(\varepsilon) + \mathbb{Z} \frac{1}{2} \alpha_-(\varepsilon) \subset \mathcal{O} \\ \beta_{r,s}(\varepsilon) &= \frac{1-r}{2} \alpha_+(\varepsilon) + \frac{1-s}{2} \alpha_-(\varepsilon) \in X_{p_+, p_-}(\varepsilon) \end{aligned}$$

とおく。 $X_{p_+, p_-}(\varepsilon)$ は階数 2 の自由アーベル群である。

$$h_{r,s}(\varepsilon) = h_{\beta_{r,s}(\varepsilon)} = \frac{r^2-1}{4} \kappa_+(\varepsilon) - \frac{rs-1}{2} + \frac{s^2-1}{4} \kappa_-(\varepsilon)$$

とおく。 $h_{r,s}(\varepsilon) = h_{-r,-s}(\varepsilon)$ である。

$$H_{p_+, p_-}(\varepsilon) = \{h_{r,s}(\varepsilon); r, s \in \mathbb{Z}\}$$

とおく。 $\mathbb{C}$ 上の $\mathbb{Z}$ -graded $\mathbb{C}$ -algebra $U(b)$ を係数拡大して

$$\begin{aligned} \kappa U(b) &= U(b) \widehat{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathcal{K} \supset \circ U(b) = U(b) \widehat{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}, \\ \kappa U(\bar{b}) &= U(\bar{b}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathcal{K} \supset \circ U(\bar{b}) = U(\bar{b}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathcal{O} \end{aligned}$$

を考えることができる。

$\mathbb{Z}$ -graded topological algebra の組 $(\kappa U(b), \circ U(b))$ を考え、各 $M \in \kappa U(b)\text{-Mod}$ について、 M の $\circ U(b)$ 不変 lattice $\circ M$ を考える。すなわち $\circ U(b)(\circ M) \subset \circ M$ かつ $\circ M \otimes_{\circ} \mathcal{K} = \kappa M$ が成立する。考察の対象は $(\kappa M, \circ M)$ である。すなわち、 $(\kappa U(b), \circ U(b))$ に関する、表現論における modular 系を考える。この一般論は重要であるが、ここでは取りあえず必要最低限の話をする。この考え方の下で、頂点作用素代数の組 $(\kappa \Pi_{\kappa_+(\varepsilon), \kappa_-(\varepsilon)}, \circ \Pi_{\kappa_+(\varepsilon), \kappa_-(\varepsilon)})$ が得られる。これを定義しよう：

$\kappa \Pi_{\kappa_+(\varepsilon), \kappa_-(\varepsilon)}$ は $\kappa U(b)$ -module $\kappa F_0, \ni |0\rangle$, をベクトル空間として持ち

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{1}{2} b[-1]^2 - \frac{1}{2} \alpha_0(\varepsilon) b[-2] \right) |0\rangle \in \kappa \Pi_{\kappa_+(\varepsilon), \kappa_-(\varepsilon)}, \\ T(z) &= \frac{1}{2} : b(z)^2 : + \frac{1}{2} \alpha_0(\varepsilon) \partial b(z) \in \text{End}_{\mathcal{K}}^f(\kappa \Pi_{\kappa_+(\varepsilon), \kappa_-(\varepsilon)})[[z, z^{-1}]] \end{aligned}$$

である。

するとアーベル圏 $\kappa \Pi_{\kappa_+(\varepsilon), \kappa_-(\varepsilon)}\text{-mod}$ が考えられる。これは単純対象として

$$\kappa F_{r,s}(\varepsilon) = \kappa F_{\beta_{r,s}(\varepsilon)} \ni |\beta_{r,s}(\varepsilon)\rangle, (r, s) \in \mathbb{Z}^2$$

を持つ、半単純アーベル圏となる。

体 $\mathcal{K}$ 上の頂点作用素代数 ${}_{\mathcal{K}}\Pi_{\kappa_+(\varepsilon), \kappa_-(\varepsilon)}$ はその $\mathcal{O}$ 上の頂点作用素代数 ${}_{\mathcal{O}}\Pi_{\kappa_+(\varepsilon), \kappa_-(\varepsilon)} = ({}_{\mathcal{O}}\Pi_{\kappa_+(\varepsilon), \kappa_-(\varepsilon)}, |0\rangle, T, Y)$ を持つ。 ${}_{\mathcal{O}}\Pi_{\kappa_+(\varepsilon), \kappa_-(\varepsilon)}$ は、 ${}_{\mathcal{O}}U(b)$ 加群として

$${}_{\mathcal{O}}\Pi_{\kappa_+(\varepsilon), \kappa_-(\varepsilon)} = {}_{\mathcal{O}}U(b)|0\rangle = {}_{\mathcal{O}}F_0$$

である。すると加法圏

$$({}_{\mathcal{K}}\Pi_{\kappa_+(\varepsilon), \kappa_-(\varepsilon)}, {}_{\mathcal{O}}\Pi_{\kappa_+(\varepsilon), \kappa_-(\varepsilon)})\text{-mod}$$

と、加法圏 ${}_{\mathcal{O}}\Pi_{\kappa_+(\varepsilon), \kappa_-(\varepsilon)}\text{-mod}$ を考えることができる。

${}_{\mathcal{O}}\Pi_{\kappa_+(\varepsilon), \kappa_-(\varepsilon)}\text{-mod}$ は ${}_{\mathcal{O}}F_{r,s} = {}_{\mathcal{O}}F_{\beta_{r,s}}$ を持つが、その他に ${}_{\mathcal{K}}F_{r,s}$ は多くの ${}_{\mathcal{O}}\Pi_{\kappa_+(\varepsilon), \kappa_-(\varepsilon)}\text{-mod}$ 不変な $\mathcal{O}$ -lattice を持つ。この加法圏 $({}_{\mathcal{K}}\Pi_{\kappa_+(\varepsilon), \kappa_-(\varepsilon)}, {}_{\mathcal{O}}\Pi_{\kappa_+(\varepsilon), \kappa_-(\varepsilon)})\text{-mod}$ をきちんと調べることは重大な問題である。ここでは $\mathbb{C}$ 上の頂点作用素代数 M_{p_+, p_-} に関連するところのみを調べることにし、一般論は将来の課題として先を急ぐ。

考え方は、まず ${}_{\mathcal{K}}\Pi_{\kappa_+(\varepsilon), \kappa_-(\varepsilon)}\text{-mod}$ を考え、この上で screening 作用素 S_+, S_- を考える。このとき各 $r \geq 1$ について X_r 上の $\mathcal{K}$ 値多価正則関数

$${}_{\mathcal{K}}U_r(z_1, \dots, z_r; \kappa_+(\varepsilon)) = \prod_{1 \leq i \neq j \leq r} (z_i - z_j)^{\kappa_+(\varepsilon)} \prod_{j=1}^r z_j^{(1-r)\kappa_+(\varepsilon)}$$

と、その monodromy の定義する $\mathcal{K}$ 値局所系 ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{L}_r(\kappa_+(\varepsilon))$, およびその双対局所系 ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{L}_r^\vee(\kappa_+(\varepsilon))$ が考えられる。

ホモロジー群 $H_r(X_r, {}_{\mathcal{K}}\mathcal{L}_r^\vee(\kappa_+(\varepsilon)))$ の元 $[\Gamma_r(\kappa_+(\varepsilon))]$ を構成しよう。

$r = 1$ のとき、 $X_1 = \mathbb{C}^*$, $\mathcal{L}_1^\vee(\varepsilon) = \mathcal{K}$ であるので、以下 $r \geq 2$ とする。

$$Y_{r-1} = \{(y_1, \dots, y_{r-1}) \in \mathbb{C}^{r-1}; y_i \neq y_j (i \neq j), y_i \neq 0, 1\}$$

とおく。 $\mathbb{C}^*$ の作用と可換な正則同型

$$X_r \rightarrow \mathbb{C}^* \times Y_{r-1} : (z_1, \dots, z_r) \mapsto (z, y_1, \dots, y_{r-1})$$

を、 $z = z_1$, $y_j = z_{j+1}/z_1$ ($j = 1, \dots, r-1$) と定義する。この写像は、 $\mathbb{C}^*$ を X_r および $\mathbb{C}^* \times Y_{r-1}$ に、それぞれ diagonal 作用および第 1 成分への作用させるとき、 $\mathbb{C}^*$ 作用と可換である。このとき X_r 上の $\mathcal{K}$ 値多価正則関数 U_r は、 $\mathbb{C}^* \times Y_{r-1}$ 上 $z \in \mathbb{C}^*$ によらず、

$$U_r(z_1, \dots, z_r; \kappa_+(\varepsilon)) = \bar{U}_{r-1}(y_1, \dots, y_{r-1}; \kappa_+(\varepsilon))$$

と表される。ここに

$$\bar{U}_{r-1}(y_1, \dots, y_{r-1}; \kappa_+(\varepsilon)) = \prod_{1 \leq i \neq j \leq r-1} (y_i - y_j)^{\kappa_+(\varepsilon)} \prod_{j=1}^{r-1} y_j^{(1-r)\kappa_+(\varepsilon)} (1 - y_j)^{2\kappa_+(\varepsilon)}.$$

$\bar{U}_{r-1}(y_1, \dots, y_{r-1}; \kappa_+(\varepsilon))$ の monodromy が定義する、 Y_{r-1} 上の $\mathcal{K}$ を fiber とする局所系を $\overline{\mathcal{L}_{r-1}}(\kappa_+(\varepsilon))$ とし、 $\overline{\mathcal{L}_{r-1}}^\vee(\kappa_+(\varepsilon))$ をその双対とする。

今 $H_p^{l.f.}(Y_{r-1}, \overline{\mathcal{L}_{r-1}}^\vee(\kappa_+(\varepsilon)))$ を、局所有限チェーンを使った局所係数ホモロジー群とする。次の結果が知られている。

命題 6-1 [[青本-喜多] 参照] (1) $p \in \mathbb{Z}$ に対し

$$H_p(Y_{r-1}, \overline{\mathcal{L}_{r-1}}^\vee(\kappa_+(\varepsilon))) \xrightarrow{\cong} H_p^{l.f.}(Y_{r-1}, \overline{\mathcal{L}_{r-1}}^\vee(\kappa_+(\varepsilon))).$$

$$(2) \quad H_p^{l.f.}(Y_{r-1}, \overline{\mathcal{L}_{r-1}}^\vee(\kappa_+(\varepsilon))) = 0 \quad (p \neq r-1),$$

$$\dim_{\mathcal{K}} H_{r-1}^{l.f.}(Y_{r-1}, \overline{\mathcal{L}_{r-1}}^\vee(\kappa_+(\varepsilon))) = (r-1)!.$$

$$(3) \quad H_{r-1}^{l.f.}(Y_{r-1}, \overline{\mathcal{L}_{r-1}}^\vee(\kappa_+(\varepsilon))) \text{ の } \mathcal{K} \text{ 上の basis として}$$

$$[\overline{\Delta_{r-1}}(\sigma), \varphi_\sigma], \quad \sigma \in S_{r-1}$$

がとれる。ここに

$$\overline{\Delta_{r-1}} = \{1 > y_{\sigma(1)} > \dots > y_{\sigma(r-1)} > 0\} \subset Y_{r-1},$$

$$\varphi_\sigma : \overline{U_{r-1}}(\overline{\mathcal{L}_{r-1}}(\kappa_+(\varepsilon))) \text{ の } \overline{\Delta_{r-1}} \text{ 上の固定した branch.}$$

(1) の具体的な同型は、 Y_{r-1} の blow-up を具体的に構成することにより [TK] で行われた。

今、 $c_{r-1}(\kappa_+(\varepsilon)) = \int_{[\overline{\Delta_{r-1}}]} \bar{U}_{r-1}(y_1, \dots, y_{r-1}; \kappa_+(\varepsilon)) \frac{dy_1}{y_1} \dots \frac{dy_{r-1}}{y_{r-1}}$ とおく。 $c_{r-1}(\kappa_+(\varepsilon))$ は下に述べる Selberg の積分公式の特別な場合で、次で与えられる。

$$c_{r-1}(\kappa_+(\varepsilon)) = \frac{1}{(r-1)!} \prod_{j=1}^{r-1} \frac{\Gamma((j-r)\kappa_+(\varepsilon))\Gamma(1+(j+1)\kappa_+(\varepsilon))}{\Gamma(1+\kappa_+(\varepsilon))}.$$

命題 6-2 (Selberg の積分公式、[青本-喜多], [Var] 参照) $m \geq 2$ とし、 $a, b, c \in \mathbb{C}$ は一般の位置にあるとする。 Y_m 上の $\mathbb{C}$ 値多価正則関数

$$U_m(a, b, c) = U_m(y_1, \dots, y_m; a, b, c) = \prod_{j=1}^m y_j^a (1-y_j)^b \prod_{1 \leq i \neq j \leq m} (y_i - y_j)^c$$

とおく。このとき

$$S_m(a, b, c) = \int \dots \int_{\overline{\Delta_m}} U_m(a, b, c) \frac{dy_1}{y_1} \dots \frac{dy_m}{y_m}$$

とおくとき

$$S_m(a, b, c) = \frac{1}{m!} \prod_{j=1}^m \frac{\Gamma(1+jc)\Gamma(a+(j-1)c)\Gamma(1+b+(j-1)c)}{\Gamma(1+c)\Gamma(1+a+b+(m+j-2)c)}.$$

そこで

$$[\overline{\Gamma_{r-1}}(\kappa_+(\varepsilon))] = \frac{1}{c_{r-1}(\kappa_+(\varepsilon))} [\overline{\Delta_{r-1}}, \varphi] \in H_{r-1}(Y_{r-1}, \overline{\mathcal{L}_{r-1}}^\vee(\kappa_+(\varepsilon)))$$

とおけば

$$[\Gamma_r(\kappa_+(\varepsilon))] = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} [\gamma_1] \otimes [\overline{\Gamma_{r-1}}(\kappa_+(\varepsilon))] \in H_r(X_r, \mathcal{L}_r^\vee(\kappa_+(\varepsilon)))$$

となる。ここに、 $[\gamma_1] \in H_1(\mathbb{C}^*, \mathbb{C})$ は $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{[\gamma_1]} \frac{dz}{z} = 1$ で定義される canonical な生成元である。このとき

$$\int_{[\Gamma_r(\kappa_+(\varepsilon))]} U_r(\kappa_+(\varepsilon)) \frac{dz_1}{z_1} \cdots \frac{dz_r}{z_r} = 1$$

が成立する。そして

$$S_+^{[r]} = \int_{[\Gamma_r(\kappa_+(\varepsilon))]} S_+(z_1) \cdots S_+(z_r) dz_1 \cdots dz_r \in \text{Hom}_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}F_{r,s}, \mathcal{K}F_{-r,s})$$

は Virasoro intertwining operator となる。

同様に、 $s \geq 1, r \in \mathbb{Z}$ について、

$$S_-^{[r]} = \int_{[\Gamma_r(\kappa_-(\varepsilon))]} S_-(z_1) \cdots S_-(z_r) dz_1 \cdots dz_r \in \text{Hom}_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}F_{r,s}, \mathcal{K}F_{r,-s})$$

なる Virasoro intertwining operator が定義される。

ここで intertwining 作用素 $S_+^{[r]}, S_-^{[r]}$ の性質を再現しておく。

命題 6-3 (1)(a) $r \geq 1, s \geq 1$ に対し

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}L_{h_{r,s}(\varepsilon)} \longrightarrow \mathcal{K}F_{r,s} \xrightarrow{S_+^{[r]}} \mathcal{K}F_{-r,s} \longrightarrow 0 \quad : \text{exact},$$

$\mathcal{K}F_{-r,s}$ は既約 $\mathfrak{L}$ 加群。

(b) $r \geq 1, s = 0$ に対し

$$\mathcal{K}F_{r,0} \xrightarrow{S_+^{[r]}} \mathcal{K}F_{-r,0} \quad : \text{既約 } \mathfrak{L}\text{-加群の同型}$$

(c) $r \geq 1, s \geq 1$ に対し

$$0 \longrightarrow \kappa F_{r,-s} \xrightarrow{S_+^{[r]}} \kappa F_{-r,-s} \longrightarrow \kappa L_{h_{r,s}(\varepsilon)} \longrightarrow 0 \quad : \text{exact},$$

$\kappa F_{r,-s}$ は既約 $\mathfrak{L}$ 加群。

(2)(a) $r \geq 1, s \geq 1$ に対し

$$0 \longrightarrow \kappa L_{h_{r,s}(\varepsilon)} \longrightarrow \kappa F_{r,s} \xrightarrow{S_-^{[s]}} \kappa F_{r,-s} \longrightarrow 0 \quad : \text{exact},$$

$\kappa F_{r,-s}$ は既約 $\mathfrak{L}$ 加群。

(b) $r = 0, s \geq 1$ に対し

$$\kappa F_{0,s} \xrightarrow{S_-^{[s]}} \kappa F_{0,-s} \quad : \text{既約 } \mathfrak{L}\text{-加群の同型。}$$

(c) $r \geq 1, s \geq 1$ に対し

$$0 \longrightarrow \kappa F_{-r,s} \xrightarrow{S_-^{[s]}} \kappa F_{-r,-s} \longrightarrow \kappa L_{h_{r,s}(\varepsilon)} \longrightarrow 0 \quad : \text{exact},$$

$\kappa F_{-r,s}$ は既約 $\mathfrak{L}$ 加群。

注意 6-1 $\kappa F_{-r,-s} \simeq \kappa F_{r,s}^*$ であった。

命題 6-4 $r \geq 1, s \geq 1$ とする。次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} \kappa F_{r,s} & \xrightarrow{S_+^{[r]}} & \kappa F_{-r,s} \\ S_+^{[s]} \downarrow & & \downarrow S_-^{[s]} \\ \kappa F_{r,-s} & \xrightarrow{S_+^{[r]}} & \kappa F_{-r,-s} \end{array}$$

§ 6.2. セルバーグ積分の $\mathcal{O}$ 整値性

問題は、

$$S_+^{[r]} \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O} F_{r,s}, \mathcal{O} F_{-r,s}) \quad r \geq 1$$

$$S_-^{[s]} \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O} F_{r,s}, \mathcal{O} F_{r,-s}) \quad s \geq 1$$

を示すことである。これは以下に示すように Macdonald の本第 6 章の最後にある Jack 多項式について

$$P_\lambda(x; \kappa_\pm(\epsilon)) \in {}_{\mathcal{O}}\Lambda = \mathcal{O}[p_1, p_2, \dots]$$

を示すことにより証明される。

命題 6-4 より、問題は

$$\begin{aligned} \langle \cdot \rangle_{\kappa_+(\epsilon)}^r &: \mathcal{K}[z_1, z_1^{-1}, \dots, z_r, z_r^{-1}]^{S_r} \longrightarrow \mathcal{K}, \\ \langle f \rangle_{\kappa_+(\epsilon)}^r &= \int_{[\Gamma_r(\kappa_+(\epsilon))]} f U_r(\kappa_+(\epsilon)) \frac{dz_1}{z_1} \cdots \frac{dz_r}{z_r} \end{aligned}$$

($f \in \mathcal{K}[z_1, z_1^{-1}, \dots, z_r, z_r^{-1}]^{S_r}$) を計算することに帰着された。

文字を変えて $N \geq 1$ とし、

$$\begin{aligned} \langle \cdot \rangle_{\kappa_+(\epsilon)}^N &: \mathcal{K}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_N, x_N^{-1}]^{S_N} \longrightarrow \mathcal{K}, \\ \langle f \rangle_{\kappa_+(\epsilon)}^N &= \int_{[\Gamma_N(\kappa_+(\epsilon))]} f U_N(\kappa_+(\epsilon)) \frac{dx_1}{x_1} \cdots \frac{dx_N}{x_N} \end{aligned}$$

とする。以下の性質は、ホモロジー論・コホモロジー論の性質を使って容易にわかる。

命題 6-5 $\mathcal{K}$ -linear map $\langle \cdot \rangle_{\kappa_+(\epsilon)}^N : \mathcal{K}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_N, x_N^{-1}]^{S_N} \longrightarrow \mathcal{K}$ は次を満たす。

- (1) $\langle 1 \rangle_{\kappa_+(\epsilon)}^N = 1$
- (2) $\langle f \rangle_{\kappa_+(\epsilon)}^N = 0$ if $\deg f \neq 0$. (ただし $\deg x_j = 1$ とした)
- (3) $\langle \bar{f} \rangle_{\kappa_+(\epsilon)}^N = \langle f \rangle_{\kappa_+(\epsilon)}^N$. ここに $\bar{f}(x_1, \dots, x_N) := f(x_1^{-1}, \dots, x_N^{-1})$.

今 ${}_{\mathcal{K}}\Lambda_N = \mathcal{K}[x_1, \dots, x_N]^{S_N}$, $\deg x_j = 1$ とおく。上の命題より、

$$(\cdot, \cdot)_{\kappa_+(\epsilon)}^N : {}_{\mathcal{K}}\Lambda_N \otimes {}_{\mathcal{K}}\Lambda_N \rightarrow \mathcal{K}$$

なる symmetric bilinear map を

$$(P, Q)_{\kappa_+(\epsilon)}^N = \langle \bar{P} Q \rangle_{\kappa_+(\epsilon)}^N$$

で定義する。このとき

$$(1, 1)_{\kappa_+(\epsilon)}^N = 1, \quad (P, Q)_{\kappa_+(\epsilon)}^N = 0 \text{ if } \deg P \neq \deg Q$$

が成り立つ。さらに、この $(\cdot, \cdot)_{\kappa_+(\epsilon)}^N$ が Jack 多項式の理論で計算できるのである。

対称多項式の空間 $\kappa\Lambda = \lim_{\leftarrow} \kappa\Lambda_N$ を導入する。 $n = 1, 2, \dots$ について

$$p_n(x) = p_n(x_1, x_2, \dots) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^n \in \kappa\Lambda \quad (\deg p_n = n)$$

とおく。このとき

$$\kappa\Lambda = \mathcal{K}[p_1, p_2, \dots]$$

($\mathcal{K}$ 上の $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -graded ring として同型) である。全射環準同型

$$\rho_N : \kappa\Lambda \rightarrow \kappa\Lambda_N$$

を、 $\rho_N(x_j) = x_j$ ($1 \leq j \leq N$), $\rho_N(x_j) = 0$ ($j \geq N$) として定義する。また

$$\mathcal{O}\Lambda = \mathcal{O}[p_1, p_2, \dots], \quad \mathcal{O}\Lambda_N = \mathcal{O}[x_1, \dots, x_N]^{S_N}$$

とおく。すると $\rho_N : \mathcal{O}\Lambda \rightarrow \mathcal{O}\Lambda_N$ も全射である。

ここで分割 (partition, ヤング図形) について思い出しておく。分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0$ に対し、 $|\lambda| = \sum_i \lambda_i < \infty$ を λ の degree と呼んだ。 $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots)$ を分割 λ の転置とする。 $l_\lambda = \#\{i; \lambda_i > 0\}$ を λ の深さと呼んだ。ヤング図形 λ の content $s = (i, j)$ ($1 \leq i \leq l_\lambda, 1 \leq j \leq \lambda_i$) について、非負整数を次のようにおいた。

$$a_\lambda(s) = \lambda_i - j, \quad a'_\lambda(s) = j - 1 \quad (\text{arm length, dual arm length})$$

$$\ell_\lambda(s) = \lambda'_i - i, \quad \ell'_\lambda(s) = i - 1 \quad (\text{leg length, dual leg length})$$

また $i = 1, 2, \dots$ について $m_i(\lambda) = \#\{j; \lambda_j = i\}$ とおき、 $\lambda = (1^{m_1(\lambda)}, 2^{m_2(\lambda)}, \dots)$ と書く。分割の全体を $\mathcal{P}$ で表す。

$\mathcal{P}$ における、dominant order とよばれる partial order $\lambda \geq \mu$ が

$$\lambda \geq \mu \iff \sum_{i=1}^n \lambda_i \geq \sum_{i=1}^n \mu_i, \quad n = 1, 2, \dots$$

で定まる。各 $n = 1, 2, \dots$ について、 $p_n(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^n \in \mathcal{O}\Lambda$, $\deg p_n = n$ であり、 $\lambda \in \mathcal{P}$ について

$$p_\lambda(x) = p_{\lambda_1}(x)p_{\lambda_2}(x)\cdots \in \mathcal{O}\Lambda$$

とおけば $\deg p_\lambda(x) = |\lambda|$ である。 $\mathcal{O}\Lambda[n] = (\text{degree } n \text{ 部分空間}) \subset \mathcal{O}\Lambda$ とおくと、 p_λ が basis を与え、

$$\mathcal{O}\Lambda = \sum_{n \geq 0} \mathcal{O}\Lambda[n], \quad \mathcal{O}\Lambda[n] = \sum_{\lambda, |\lambda|=n} \mathcal{O}p_\lambda$$

となる。 $\lambda \in \mathcal{P}$ について、 $m_\lambda(x) \in \mathcal{O}\Lambda[n], n = |\lambda|$ を

$$m_\lambda(x) = \sum_{\sigma} \sum_{i \geq 1} x_{\sigma(i)}^{\lambda_i}$$

とおいた。ここに $\sigma \in S_\infty$ の和は、 $\sum_{i \geq 1} x_{\sigma(i)}^{\lambda_i}$ が異なるものの代表元の集まりをわたる。このとき

$$\mathcal{O}\Lambda[n] = \sum_{|\lambda|=n} \mathcal{O}m_\lambda(x)$$

を考える。射影 $\rho_N : \mathcal{O}\Lambda \rightarrow \mathcal{O}\Lambda_N$ により

$$\begin{cases} \rho_N(m_\lambda) = m_\lambda^{(N)} & : l_\lambda \leq N \\ \rho_N(m_\lambda) = 0 & : N > l_\lambda \end{cases}$$

であり、 $\mathcal{O}\Lambda_N = \sum_{l_\lambda \leq N} \mathcal{O}m_\lambda^{(N)}$ が成立する。なお、 $\rho_N(p_\lambda) = 0$ ($l_\lambda > N$) は一般に成立しない。

$\lambda \in \mathcal{P}$ について、 $z_\lambda = \prod_{i \geq 1} i^{m_i(\lambda)} m_i(\lambda)! \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ と定義する。

$\kappa \in \mathcal{O}^*, \kappa = \kappa^{(0)} + \kappa^{(1)}\varepsilon + \dots$ を、 $\kappa^{(0)} \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}, \kappa^{(1)} \neq 0$ のように一つ取って固定する。

$\mathcal{K}$ 上の対称 2 次形式 $(\ , \)_\kappa : \mathcal{K}\Lambda \otimes \mathcal{K}\Lambda \rightarrow \mathcal{K}$ を

$$(p_\lambda, p_\mu)_\kappa = \delta_{\lambda, \mu} z_\lambda \kappa^{l_\lambda}$$

とおく。これは

$$(\ , \)_\kappa : \mathcal{O}\Lambda \otimes \mathcal{O}\Lambda \rightarrow \mathcal{O}$$

を引き起こし、

$$\begin{cases} \mathcal{O}\Lambda[n_1] \perp \mathcal{O}\Lambda[n_2] & : n_1 \neq n_2, \\ (\ , \)_\kappa & : \mathcal{O}\Lambda[n] \otimes \mathcal{O}\Lambda[n] \rightarrow \mathcal{O} \text{ は complete pairing} \end{cases}$$

である。次の定理は、Stanley に始まる直交多項式の基本定理である。

定理 6-1 [Macdonald 参照] 上の記号の下に、各 $\lambda \in \mathcal{P}$ について、 $P_\lambda(x; \kappa) \in \mathcal{O}\Lambda$ で次の性質を満たすものが唯一存在する。

- (1) $(P_\lambda(x; \kappa), P_\mu(x; \kappa))_\kappa = 0$ if $\lambda \neq \mu$,
- (2) $P_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} u_{\lambda, \mu}(\kappa) m_\mu, u_{\lambda, \mu} \in \mathcal{O}.$

この $P_\lambda(x, \kappa)$ をパラメータ κ を持つ Jack 多項式と呼ぶ。定義より

$$\circ\Lambda = \sum_{\lambda} \mathcal{O}P_\lambda(x; \kappa)$$

であることが分かる。また、 $b_\lambda(\kappa) = (P_\lambda(\kappa), P_\lambda(\kappa))_\kappa^{-1} \in \mathcal{O}$ とおくと、

$$b_\lambda(\kappa) = \prod_{s \in \lambda} \frac{\kappa a_\lambda(s) + \ell_\lambda(s) + 1}{\kappa a_\lambda(s) + \ell_\lambda(s) + \kappa} \in \mathcal{O}$$

が成立する。

注意 6-2 $\kappa = \kappa^{(0)} + \kappa^{(1)}\varepsilon + \cdots, \kappa^{(0)} \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$ より、 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b_\lambda(\kappa) = b_\lambda(\kappa^{(0)}) \in \mathbb{C}^*$ となることが分かる。 $Q_\lambda(\kappa) = b_\lambda(\kappa)P_\lambda(\kappa)$ とおくと、 $(P_\lambda(\kappa), Q_\lambda(\kappa))_\kappa = \delta_{\lambda, \mu}$ が成立する。

各 $\beta \in \mathcal{O}^*$ について、 $\mathcal{O}$ 上の代数準同型

$$w_\beta : \circ\Lambda \rightarrow \circ\Lambda \quad \text{を} \quad w_\beta(p_n) = (-1)^{n-1} \beta p_n$$

で定める。また $X \in \mathcal{O}$ について、代数準同型

$$\Sigma_X : \circ\Lambda \rightarrow \mathcal{O} \quad \text{を} \quad \Sigma_X(p_n) = X$$

として定義する。すると次が成立する。

命題 6-5 [Macdonald 参照]

$$\begin{aligned} (1) \quad \prod_{i,j \geq 1} (1 - x_i y_j)^{-1/\kappa} &= \exp \left(\frac{1}{\kappa} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} p_n(x) p_n(y) \right) \\ &= \sum_{\lambda} P_\lambda(x; \kappa) Q_\lambda(y; \kappa) \in \circ\Lambda \hat{\otimes} \circ\Lambda. \end{aligned}$$

$$(2) \quad w_\kappa(P_\lambda(x; \kappa)) = Q_{\lambda'}(x; \kappa^{-1}).$$

$$(3) \quad \Sigma_X(Q_\lambda(x; \kappa)) = \prod_{s \in \lambda} \frac{X + \kappa a'_\lambda(s) - l'_{\lambda(s)}}{\kappa a_\lambda(s) + \ell_\lambda(s) + \kappa} \in \mathcal{O},$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{X,x} \left(\prod_{i,j \geq 1} (1 - x_i y_j)^{-1/\kappa} \right) &= \prod_{n \geq 1} e^{\frac{X}{\kappa n} p_n(y)} = \prod_{i \geq 1} (1 - y_i)^{-\frac{X}{\kappa}} \\ &= \sum_{\lambda} P_\lambda(y, \kappa) \sigma_X(Q_\lambda(x, \kappa)). \end{aligned}$$

さらに

命題 6-6 $\rho_N : \mathcal{O}\Lambda \rightarrow \mathcal{O}\Lambda_N$ について次が成立する。

$$(1) \quad \rho_N(P_\lambda(x; \kappa)) = \begin{cases} P_\lambda^{(N)}(x_1, \dots, x_N; \kappa) & (l_\lambda \leq N) \\ 0 & (l_\lambda > N) \end{cases} \quad \text{であり、}$$

$$\mathcal{O}\Lambda_N = \sum_{l_\lambda \leq 0} \mathcal{O}P_\lambda^{(N)}(x; \kappa).$$

(2) $\lambda = (m, \dots, m)$, $l_\lambda = N$ について

$$P_\lambda^{(N)}(x; \kappa) = \prod_{i=1}^N x_i^m = m_\lambda(x)$$

(3) $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$, $l_\lambda \leq N$ とし、 $m \geq 0$ について $\lambda + m = (\lambda_1 + m, \dots, \lambda_N + m)$ とおくと

$$P_{\lambda+m}^{(N)}(x; \kappa) = P_\lambda^{(N)}(x; \kappa) \prod_{i=1}^N x_i^m \in \mathcal{O}\Lambda_N.$$

次が、積分によって定義された内積 $(\cdot, \cdot)_\kappa^N$ と、Jack 多項式を定義する $\mathcal{O}\Lambda$ 上の内積 $(\cdot, \cdot)_\kappa$ を比較する重要な性質である。

命題 6-7 $N \geq 1$ を固定する。 $l_\lambda, l_\mu \leq N$ とすれば

$$(P_\lambda^{(N)}(\kappa), Q_\mu^{(N)}(\kappa))_\kappa^N = \delta_{\lambda, \mu} b_\lambda^{(N)}, \quad b_\lambda^{(N)} = \prod_{s \in \lambda} \frac{N + \kappa a'_\lambda(s) - l'_\lambda(s)}{N + \kappa(a'_\lambda(s) + 1) - l'_\lambda(s) - 1},$$

これと条件 $\kappa = \kappa^{(0)} + \kappa^{(1)}\varepsilon + \dots \in \mathcal{O}$, $\kappa^{(0)} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{\leq 0}$ より、

$$b_\lambda^{(N)}(\kappa) \in \mathcal{O}, \quad b_\lambda^{(N)}(\kappa^{(0)}) \in \mathbb{C}^*$$

が成立する。

$M, N \geq 1$, $\lambda_{M,N} = (M, M, \dots, M)$, $l_{\lambda_{M,N}} = N$ とおく。このとき次の等式が成立する。

$$b_{\lambda_{M,N}}^{(N)}(\kappa) = b_{\lambda_{M,N}}(\kappa).$$

これは著しい等式である。

§ 6.3. 絡作用素の $\mathcal{O}$ - 整値性

記号を N から元の r, s に戻すと、上の命題により、 $(\cdot, \cdot)_\kappa^r : \mathcal{K}\Lambda_r^{\otimes 2} \rightarrow \mathcal{K}$ は $(\cdot, \cdot)_\kappa^r : \mathcal{O}\Lambda_r^{\otimes 2} \rightarrow \mathcal{O}$ を定義する。これより以下の定理を得る。

定理 6-2

$$\begin{aligned} r \geq 1, s \in \mathbb{Z} \text{ のとき、 } S_+^{[r]} &\in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}F_{r,s}, \mathcal{O}F_{-r,s}), \\ s \geq 1, r \in \mathbb{Z} \text{ のとき、 } S_-^{[s]} &\in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}F_{r,s}, \mathcal{O}F_{r,-s}) \end{aligned}$$

であり、 $S_+^{[r]}, S_-^{[s]}$ は $\mathcal{O}$ 上 Virasoro intertwining operators である。

次節 §7 では、定義できた $\mathcal{O}$ 上の理論に $\otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{C}$ をして $\mathbb{C}$ 上の定義を得る。

§ 7. 頂点作用素代数 $Vir_{c_{p_+, p_-}}$ および W_{p_+, p_-} の表現論

前章で示した $\mathcal{O}$ 上でのヴィラゾロ加群としての準同型

$$\begin{aligned} S_+^{[r]} : \mathcal{O}F_{r,s} &\rightarrow \mathcal{O}F_{-r,s}, \quad r \geq 1 \\ S_-^{[s]} : \mathcal{O}F_{r,s} &\rightarrow \mathcal{O}F_{r,-s}, \quad s \geq 1 \end{aligned}$$

の性質を用いて、 $Vir_{c_{p_+, p_-}}$ -加群、 W_{p_+, p_-} -加群の性質を調べることができる。

そこで $\kappa_+ = \frac{p_-}{p_+}, \kappa_- = \frac{p_+}{p_-}$ の場合を考える。

$$H_r(X_r, \mathcal{O}\mathcal{L}_r^\vee(\kappa_+(\varepsilon))) \xrightarrow{\otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{C}} H_r(X_r, \mathcal{L}_r^\vee(\kappa_+))$$

なる写像を考え

$$[\Gamma_r(\kappa_+)] = [\Gamma_r(\kappa_+(\varepsilon))] \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{C} \in H_r(X_r, \mathcal{L}_r^\vee(\kappa_+))$$

とおく。 $[\Gamma_s(\kappa_-)] \in H_s(X_s, \mathcal{L}_s^\vee(\kappa_-))$ も同様に考える。これらは一種の隣接輪体である。

$[\Gamma_r(\kappa_+)], [\Gamma_s(\kappa_-)]$ を renormalized (繰り込まれた) cycles と呼ぶ。

$$\int_{[\Gamma_r(\kappa_+)]} U_r(\kappa_+) \frac{dz_1}{z_1} \cdots \frac{dz_r}{z_r} = 1, \quad \int_{[\Gamma_s(\kappa_-)]} U_s(\kappa_-) \frac{dz_1}{z_1} \cdots \frac{dz_s}{z_s} = 1$$

なる規格化条件を満たしていることに注意しておく。

§ 7.1. ヴィラゾロ絡作用素

これにより目標であった Virasoro intertwining operators が定まる。

(1) $r \geq 1, s \in \mathbb{Z}$:

$$S_+^{[r]} = \int_{[\Gamma_r(\kappa_+)]} S_+(z_1) \cdots S_+(z_r) dz_1 \cdots dz_r \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(F_{r,s}, F_{-r,s})$$

(2) $s \geq 1, r \in \mathbb{Z}$:

$$S_-^{[s]} = \int_{[\Gamma_s(\kappa_-)]} S_-(z_1) \cdots S_-(z_s) dz_1 \cdots dz_s \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(F_{r,s}, F_{r,-s})$$

階数 1 の自由アーベル群

$$X_{p_+, p_-} = \mathbb{Z} \frac{\alpha_+}{2} + \mathbb{Z} \frac{\alpha_-}{2}$$

と $r, s, n \in \mathbb{Z}$ について、

$$\beta_{r,s,n} = \beta_{r-np_+, s} = \beta_{r, s+np_-} \in X_{p_+, p_-}$$

とおくと $\beta_{r-p_+, s, n} = \beta_{r, s+p_-, n} = \beta_{r, s, n+1}$ であり

$$\{ \beta_{r,s,n}; 1 \leq r \leq p_+, 1 \leq s \leq p_-, n \in \mathbb{Z} \}$$

が X_{p_+, p_-} の完全代表系となった。

$\beta \in X_{p_+, p_-}$ に対し $h_\beta = \frac{1}{2}\beta^2 - \frac{1}{2}\alpha_0\beta$ とおく。また $\beta^\vee = \alpha_0 - \beta$ とおく。 $h_\beta = h_{\beta^\vee}$ であった。さらに $\beta = \beta_{r,s,n}$ に対し、 $h_\beta = h_{r,s,n}$ とおく。

$H_{p_+, p_-} = \{h_\beta; \beta \in X_{p_+, p_-}\}$ とおくと、 H_{p_+, p_-} の代表元として

$$\{h_{r,s,n}; 1 \leq r \leq p_+, 1 \leq s \leq p_-, n \geq 0\}$$

がとれる。ただし $h_{r,s} = h_{r,s,0}$ とすれば $h_{r,s} = h_{p_+-r, p_--s}$ ($1 \leq r \leq p_+ - 1, 1 \leq s \leq p_- - 1$) なる関係が H_{p_+, p_-} の中で成立している。

格子頂点作用素代数 V_{p_+, p_-} とその部分頂点作用素代数 $V_{p_+, p_-} \supset \Pi_{\kappa_+, \kappa_-}$ を思い出そう。格子頂点作用素代数 V_{p_+, p_-} は $2p_+p_-$ 個の既約加群 $\mathcal{V}_{[r,s]}^\pm$, $1 \leq r \leq p_-, 1 \leq s \leq p_+, \varepsilon = \pm$ よりなる。ここに

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{[r,s]}^+ &= \sum_n F_{r,s,2n}, \\ \mathcal{V}_{[r,s]}^- &= \sum_n F_{r,s,2n+1}, \\ F_{r,s,k} &= F_{\beta_{r,s,k}} \end{aligned}$$

このとき $S_+^{[r]}, S_-^{[s]}$ は次の $\mathcal{V}_{r,s}^\varepsilon$ 達の間、Virasoro 加群と Virasoro 準同型よりなる複体を導く。これは Felder 複体とよばれる。

[1] $1 \leq r \leq p_+ - 1, 1 \leq s \leq p_- - 1$ とすると

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \mathcal{V}_{[r,s]}^\pm &\xrightarrow{S_+^{[r]}} \mathcal{V}_{[p_+-r,s]}^\mp \xrightarrow{S_+^{[p_+-r]}} \mathcal{V}_{[r,s]}^\pm, \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow \mathcal{V}_{[r,s]}^\pm &\xrightarrow{S_-^{[s]}} \mathcal{V}_{[r,p_--s]}^\mp \xrightarrow{S_-^{[p_--s]}} \mathcal{V}_{[r,s]}^\pm \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

[2] $1 \leq r \leq p_+ - 1, s = p_-$ とすると

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{V}_{[r,p_-]}^\pm \xrightarrow{S_+^{[r]}} \mathcal{V}_{[p_+-r,p_-]}^\mp \xrightarrow{S_+^{[p_+-r]}} \mathcal{V}_{[r,p_-]}^\pm \longrightarrow \cdots$$

[3] $r = p_+, 1 \leq s \leq p_- - 1$ とすると

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{V}_{[p_+,s]}^\pm \xrightarrow{S_-^{[s]}} \mathcal{V}_{[p_+,p_--s]}^\mp \xrightarrow{S_-^{[p_--s]}} \mathcal{V}_{[p_+,s]}^\pm \longrightarrow \cdots$$

ここで $\mathfrak{L}_{c_{p_+,p_-}}$ -加群 $\mathcal{K}_{[r,s]}^\pm \supset \mathcal{X}_{[r,s]}^\pm$ ($1 \leq r \leq p_+, 1 \leq s \leq p_-$) を以下で定義する。

[1] $1 \leq r \leq p_+ - 1, 1 \leq s \leq p_- - 1$ に対し

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{[r,s]}^\pm &= \text{Ker} S_+^{[r]} \cap \text{Ker} S_-^{[s]} \subset \mathcal{V}_{[r,s]}^\pm \\ \mathcal{X}_{[r,s]}^\pm &= \text{Im} S_+^{[p_+-r]} \cap \text{Im} S_-^{[p_--s]} \subset \mathcal{K}_{[r,s]}^\pm \end{aligned}$$

[2] $1 \leq r \leq p_+ - 1, s = p_-$ に対し

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{[r,p_-]}^\pm &= \text{Ker} S_+^{[r]} \subset \mathcal{V}_{[r,p_-]}^\pm \\ \mathcal{X}_{[r,p_-]}^\pm &= \text{Im} S_+^{[p_+-r]} \subset \mathcal{K}_{[r,p_-]}^\pm \end{aligned}$$

[3] $r = p_+, 1 \leq s \leq p_- - 1$ に対し

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{[p_+,s]}^\pm &= \text{Ker} S_-^{[s]} \subset \mathcal{V}_{[p_+,s]}^\pm \\ \mathcal{X}_{[p_+,s]}^\pm &= \text{Im} S_-^{[p_--s]} \subset \mathcal{K}_{[p_+,s]}^\pm \end{aligned}$$

[4] $r = p_+, s = p_-$ に対し

$$\mathcal{K}_{[p_+,p_-]}^\pm = \mathcal{X}_{[p_+,p_-]}^\pm = \mathcal{V}_{[p_+,p_-]}^\pm$$

我々の拡大 W 代数 M_{p_+,p_-} は、Virasoro 加群としては

$$M_{p_+,p_-} = \mathcal{K}_{[1,1]}^+$$

であることに注意しておく。このとき $\mathfrak{L}_{c_{p_+, p_-}}$ -mod の元として次が成り立つ。

命題 7-1 [Felder] (1) $1 \leq r \leq p_+ - 1, 1 \leq s \leq p_- - 1$ とするとき

$$0 \rightarrow \mathcal{X}_{[r, s]}^+ \rightarrow \mathcal{K}_{[r, s]}^+ \rightarrow L_{h_{r, s}} \rightarrow 0 : \text{exact}, \quad \mathcal{X}_{[r, s]}^- = \mathcal{K}_{[r, s]}^-.$$

(2) 上以外の場合、 $\mathcal{K}_{[r, s]}^\pm = \mathcal{X}_{[r, s]}^\pm$.

§ 7.2. $Vir_{c_{p_+, p_-}}$ - 加群の構成

そこで $\mathfrak{L}_{c_{p_+, p_-}}$ -mod の元としての $\mathcal{X}_{[r, s]}^\pm, 1 \leq r \leq p_+, 1 \leq s \leq p_-$ が問題となる。記述のため次の記号を導入する。

(1) $1 \leq r \leq p_+ - 1, 1 \leq s \leq p_- - 1$ のとき

$$\Delta_{r, s} = \Delta_{p_+ - r, p_- - s} = h_{r, s} \quad \text{とおく。}$$

(2) $1 \leq r \leq p_+, 1 \leq s \leq p_-, n \geq 0$ のとき。

$$\Delta_{r, s, n}^+ = \begin{cases} h_{p_+ - r, s, -2n-1} & r \neq p_+ \\ h_{p_+, -s, -2n} & r = p_+ \end{cases}$$

とおく。また

$$\Delta_{r, s, n}^- = \begin{cases} h_{p_+ - r, s, -2n-2} & r \neq p_+ \\ h_{p_+, s, -2n-1} & r = p_+ \end{cases}$$

とおく。

このとき、 $\{\Delta_{r, s} = \Delta_{p_+ - r, p_- - s}\} \cup \{\Delta_{r, s, n}^\pm\} = H_{p_+, p_-}$ となる。

定義 7-1 $V[\mathcal{X}_{[r, s]}^\pm] = \{u \in \mathcal{X}_{[r, s]}^\pm; L[n]u = 0, n \geq 1\}$ とおく。

定理 7-1 次が成り立つ。

- (1) $V[\mathcal{X}_{[r, s]}^\pm] = \sum_{n \geq 0} V_n[\mathcal{X}_{[r, s]}^\pm]$, ただし $V_n[\mathcal{X}_{[r, s]}^\pm] = \{u \in V[\mathcal{X}_{[r, s]}^\pm]; L[0]u = \Delta_{r, s, n}^\pm u\}$.
- (2) $\dim_{\mathbb{C}} V_n(\mathcal{X}_{[r, s]}^+) = 2n + 1, \quad \dim_{\mathbb{C}} V_n(\mathcal{X}_{[r, s]}^-) = 2n + 2$.

定理 7-2 (1) $0 \neq u \in V_n[\mathcal{X}_{[r, s]}^\pm]$ のとき、 $\mathcal{U}_{c_{p_+, p_-}}[\mathfrak{L}]u \simeq L_{\Delta_{r, s}^\pm}$ in $\mathfrak{L}_{c_{p_+, p_-}}$ -mod.

(2) $\mathcal{X}_{[r, s]}^\pm = \bigoplus_{n \geq 0} V_n[\mathcal{X}_{[r, s]}^\pm] \otimes_{\mathbb{C}} L_{\Delta_{r, s, n}^\pm}$ in $\mathfrak{L}_{c_{p_+, p_-}}$ -mod.

次に $V_n[\mathcal{X}_{[r, s]}^\pm]$ の元を intertwining operator を使って表示しよう。

命題 7-2 次が成立する。

(1) $n \geq 0$ とすれば、 $V_n(\mathcal{X}_{[r,s]}^+)$ は $\sum_{m=-n}^n \mathbb{C}u_{n,m}^+[r,s]$, ここに

$$u_{n,m}^+[r,s] := \begin{cases} S_+^{[(n+m+1)p_+-r]} |\beta_{p_+-r,s,-2n-1}\rangle & r \neq p_+ \\ S_+^{[(n+m)p_+-r]} |\beta_{p_+,s,-2n}\rangle & r = p_+ \end{cases}$$

さらに, $\text{Const.} \neq 0$ として

$$u_{n,m}^+[r,s] = \begin{cases} \text{Const.} \cdot S_-^{[(n-m+1)p_--s]} |\beta_{r,p_--s,2n+1}\rangle & s \neq p_- \\ \text{Const.} \cdot S_-^{[(n-m)p_--]} |\beta_{r,p_-,2n}\rangle & s = p_- \end{cases}$$

が成り立つ。

(2) $n \geq 0$ とすれば、 $V_n(\mathcal{X}_{[r,s]}^-)$ は $\sum_{m=-n}^{n+1} \mathbb{C}u_{n,m}^-[r,s]$, ここに

$$u_{n,m}^-[r,s] = \begin{cases} S_+^{[(n+m+1)p_+-r]} |\beta_{p_+-r,s,-2n-2}\rangle & r \neq p_+ \\ S_+^{[(n+m)p_+]} |\beta_{p_+,s,-2n-1}\rangle & r = p_+ \end{cases}$$

さらに, $\text{Const.} \neq 0$ として

$$u_{n,m}^-[r,s] = \begin{cases} \text{Const.} \cdot S_-^{[(n-m+2)p_--s]} |\beta_{r,p_--s,2n+2}\rangle & s \neq p_- \\ \text{Const.} \cdot S_-^{[(n-m+1)p_--]} |\beta_{r,p_-,2n+1}\rangle & s = p_- \end{cases}$$

が成り立つ。

これで $\mathcal{X}_{[r,s]}^\pm$ の $\mathfrak{L}_{c_{p_+,p_-}}$ 加群としての性質は完全に分かったことになる。

ここで拡大代数 M_{p_+,p_-} と、レベル (κ_+, κ_-) の W 代数 $W_{[\kappa_+, \kappa_-]} \subset M_{p_+,p_-}$ の、 $\mathfrak{L}_{c_{p_+,p_-}}$ -module としての構造を改めて書いておく。

記号. $n \geq 0, -n \leq m \leq n$ について $W_{n,m} = u_{n,m}^+[1,1]$ とおく。 $n \geq 0$ について

$$\Delta_n = ((n+1)p_+ - 1)((n+1)p_- - 1)$$

とおく。 $\Delta_n = \Delta_n^+[1,1]$ である。

定理 7-3 (1) $0 \rightarrow X_{[1,1]}^+ \rightarrow W_{[\kappa_+, \kappa_-]} \rightarrow \text{MinVir}_{c_{p_+,p_-}} \rightarrow 0$: exact as Virasoro modules.

ここに

$$X_{[1,1]}^+ = \mathcal{X}_{[1,1]}^+ \cap W_{[\kappa_+, \kappa_-]} = \sum_{n \geq 0} L_{\Delta_n}[1,1] \otimes \mathbb{C}W_{n,0}.$$

(2) $\mathcal{U}(\mathfrak{L})|0\rangle = \text{Vir}_{c_{p_+, p_-}} \subset W_{[\kappa_+, \kappa_-]}$ as Virasoro modules,

$$0 \rightarrow L_{\Delta_n}[1, 1] = \mathcal{U}(\mathfrak{L})W_{0,0} \rightarrow \text{Vir}_{c_{p_+, p_-}} \rightarrow \text{MinVir}_{c_{p_+, p_-}} \rightarrow 0.$$

定理 7-4 $\mathcal{L}_{[\nabla, f]}$, $\mathcal{X}_{[r, s]}^\pm$ はすべて W_{p_+, p_-} の既約表現である。

注意 W_{p_+, p_-} を $W_{[\kappa_+, \kappa_-]}$ の意味でも使うが、文脈で判断されたい。

次章では、 M_{p_+, p_-} の頂点作用素代数の構造を述べる。

§ 8. 拡大 W 代数とその表現

§ 8.1. フロベニウス写像 E および F

互いに素な 2 以上の整数の組 (p_+, p_-) (ただし $(p_+, p_-) \neq (3, 2), (2, 3)$) に対し $c_{\kappa_+, \kappa_-} = 13 - 6(\kappa_+ + \kappa_-)$ であった。ここに、 $\kappa_+ = \frac{p_-}{p_+}, \kappa_- = \frac{p_+}{p_-}$ である。

前章までで、レベル (κ_+, κ_-) をもつ W 代数 $W_{[\kappa_+, \kappa_-]}$ とその頂点作用素代数としての拡大 M_{p_+, p_-} を定義した。この 2 つの頂点作用素代数は中心荷電 c_{κ_+, κ_-} を持った。このことより

$$\text{Vir}_{c_{p_+, p_-}} \hookrightarrow W_{[\kappa_+, \kappa_-]} \hookrightarrow M_{p_+, p_-}$$

となる頂点作用素代数の拡大を持っていた。

$$\begin{aligned} H_{c_{p_+, p_-}} &= \{\Delta_{(r, s)} = \Delta_{(p_+ - r, p_- - s)}; 1 \leq r \leq p_+ - 1, 1 \leq s \leq p_- - 1\} \\ &\sqcup \{\Delta_n^\varepsilon[r, s]; 1 \leq r \leq p_+, 1 \leq s \leq p_-, n \geq 0, \varepsilon = \pm\} \end{aligned}$$

とおくと、 $\mathfrak{L}_{c_{p_+, p_-}}\text{-mod}$ は単純対象 $L_\Delta, \Delta \in H_{c_{p_+, p_-}}$ を持っていた。

我々の目標は、拡大 W 代数 M_{p_+, p_-} の W 代数としての構造、および M_{p_+, p_-} の単純対象をすべて具体的に構成することである。

このため Frobenius 写像と称する線形写像

$$E, F \in \text{End}^f(\mathcal{X}_{[r, s]}^\pm), 1 \leq r \leq p_+, 1 \leq s \leq p_-$$

で、次の性質をもつものを構成する。

(i) $[L[n], E] = [L[n], F] = 0$ ($n \in \mathbb{Z}$),

(ii) $A \in M_{p_+, p_-}$ に対し

$$[E, Y(A; z)] = Y(EA; z), [F, Y(A; z)] = Y(FA; z) \text{ in } \text{End}^f(\mathcal{X}_{[r, s]}^\pm)[[z, z^{-1}]].$$

さらに、性質 (i) により

$$E, F \in \text{End}(V(\mathcal{X}_{[r,s]}^\pm)) \quad (1 \leq r \leq p_+, 1 \leq s \leq p_-)$$

であるが、この作用を具体的に analyze する。

E, F の構成は、Felder 複体の性質

$$S_+^{[r]} S_+^{[p_+-r]} = 0 \quad (1 \leq r \leq p_+ - 1), \quad S_-^{[s]} S_-^{[p_--s]} = 0 \quad (1 \leq s \leq p_- - 1)$$

を $\mathbb{C}$ 上より環 $\mathcal{O}$ に持ち上げるにより構成される。具体的には論文 [TW] に譲ることにして、結果を書いておこう。

定理 8-1 $1 \leq r \leq p_+, 1 \leq s \leq p_-$ とする。

(1) $E, F \in \text{End}^f(\mathcal{X}_{[r,s]}^\pm)$ で、性質 (i) を満たすものが具体的に構成でき、次を満たす。

$$[L[n], E] = [L[n], F] = 0 \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$A \in M_{p_+, p_-} \text{ について、} [E, Y(A; z)] = Y(EA; z), \quad [F, Y(A; z)] = Y(FA; z).$$

ただし $A \in U_{c_{p_+, p_-}}(\mathfrak{L})|0\rangle \subset M_{p_+, p_-}$ に対し、 $EA = FA = 0$ とした。

(2) 次が成り立つ。(すべて、 $\text{Const} \neq 0$ である。)

$$\begin{aligned} (+) \quad & \begin{cases} Eu_{n,m}^+[r, s] = \text{Const} \cdot u_{n,m+1}^+[r, s], & u_{n,n+1}^+[r, s] = 0, \\ Fu_{n,m}^+[r, s] = \text{Const} \cdot u_{n,m-1}^+[r, s], & u_{n,-n-1}^+[r, s] = 0. \end{cases} \\ (-) \quad & \begin{cases} Eu_{n,m}^-[r, s] = \text{Const} \cdot u_{n,m+1}^-[r, s], & u_{n,n+2}^-[r, s] = 0, \\ Fu_{n,m}^-[r, s] = \text{Const} \cdot u_{n,m-1}^-[r, s], & u_{n,-n-1}^-[r, s] = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

次に M_{p_+, p_-} の元 $W_{n,m}, n \geq 0, m = -n, -n+1, \dots, n$ について、

$$Y(W_{n,m}; z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} W_{n,m}[k] z^{-k-\Delta}, \quad \Delta = \Delta_{1,1,n}^+$$

達の作用素積展開の様子を知る必要がある。そこで小さい n, m について $Y(W_{n,m}; z)$ の性質を調べ、Frobenius 写像の性質 (ii) を用いて、作用素展開の様子を調べる。

命題 8-1 M_{p_+, p_-} の中で次が成立する。

(1) $n \geq 0$ とすると、 $a_n, b_n, c_n, d_n \neq 0$ があって

$$W_{1,1}[\Delta_n - \Delta_{n+1}]W_{n,n} = a_n W_{n+1,n+1}$$

$$W_{1,-1}[\Delta_n - \Delta_{n+1}]W_{n,-n} = b_n W_{n+1,-n+1}$$

$$W_{1,1}[\Delta_{n+1} - \Delta_n]W_{n+1,-n-1} = c_n W_{n,-n}$$

$$W_{1,-1}[\Delta_{n+1} - \Delta_n]W_{n+1,n+1} = d_n W_{n,n}$$

(2) $m > \Delta_1 - \Delta_0$ とすれば

$$W_{1,1}[m]W_{1,-1} = 0, \quad W_{1,-1}[m]W_{1,1} = 0.$$

これは4章の性質を使い、具体的に示す。

§ 8.2. 零モード代数の決定

この命題と Frobenius 写像の性質を使って、次が成り立つことが分かる。

定理 8-2 (1) M_{p_+, p_-} は頂点作用素代数として $T(z)$ および $W_{1,a}(z)$, $a = -1, 0, 1$ から頂点作用素代数として生成される。

(2) M_{p_+, p_-} は C_2 有限条件を満たす。これより $A_0(W_{p_+, p_-})$ は $[T[0]], [W_{1,a}[0]]$, $a = -1, 0, 1$ で $\mathbb{C}$ 代数として生成される。

定理 8-3 W 代数 $W_{[\kappa_+, \kappa_-]}$ は $T(z)$ および $W_{1,0}(z)$ から生成される。

さらに、零モード代数 $A_0(M_{p_+, p_-})$, $A_0(W_{[\kappa_+, \kappa_-]})$ の構造を調べる。このためには次の命題が基本的である。

まず E, F の性質により、 E, F は有限次元 $\mathbb{C}$ 代数 $A_0(M_{p_+, p_-})$ の derivation を induce することが分かる。また $A_0(M_{p_+, p_-})$ の中で $E[T[0]] = 0, F[T[0]] = 0$ であり、次が成立していた ($\text{Const} \neq 0$)。

$$\begin{cases} E[W_{1,a}[0]] = \text{Const.}[W_{1,a+1}[0]], & [W_{1,2}[0]] = 0, \\ F[W_{1,a}[0]] = \text{Const.}[W_{1,a-1}[0]], & [W_{1,-2}[0]] = 0. \end{cases}$$

$A_0(M_{p_+, p_-})$ は $[T[0]], [W_{1,a}[0]]$, $a = -1, 0, 1$ で $\mathbb{C}$ 代数として生成された。零モード代数 $A_0(W_{[\kappa_+, \kappa_-]})$ は $[T[0]], [W_{1,0}[0]]$ で生成された。また、 $\mathbb{C}$ 代数の写像 $A_0(W_{[\kappa_+, \kappa_-]}) \rightarrow A_0(M_{p_+, p_-})$ が存在していた。

まず $A_0(W_{[\kappa_+, \kappa_-]})$ の中で $[L[0]]$ と $[W_{m,0}[0]]$, $m = 0, 1, 2, \dots$ の間の関係を導こう。このため次の命題が基本的である。各 $\beta \in \mathbb{C}$ について $F_\beta \ni |\beta\rangle$ は M_{κ_+, κ_-} 加群である。 $\mathbb{C}|\beta\rangle$ は $A_0(W_{[\kappa_+, \kappa_-]})$ 加群となる:

$$[L[0]]|\beta\rangle = h_\beta|\beta\rangle, \quad h_\beta = \frac{1}{2} \left(\beta - \frac{\alpha_0}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \alpha_0^2.$$

そこで $W_{n,0}[0]|\beta\rangle = w_n(\beta)|\beta\rangle$ ($n = 0, 1, \dots$) とおく。簡単のため、 $A_0(M_{(\kappa_+, \kappa_-)})$ の元 $[L[0]], [W_{n,0}[0]]$ を $[T], [W_{n,0}]$ と書く。 $A_0(M_{p_+, p_-})$ においても $[L[0]], [W_{n,m}[0]]$ を $[T], [W_{n,m}]$ と書く: $|m| \geq n+1$ のとき $[W_{n,m}] = 0$ である。次が成立する。

命題 8-2 $n \geq 0$ とする。

$$(1) \quad w_n(\beta) = \text{Const.} \prod_{i=1}^{(n+1)p_+-1} \prod_{j=1}^{(n+1)p_--1} (\beta - \beta_{i,j}), \quad \text{Const} \neq 0$$

$$(2) \quad \text{ある } g_n(h) \in \mathbb{C}[h] \text{ が存在し、} \begin{cases} w_n(\beta) = g_n(h_\beta) & (n : \text{偶数}), \\ w_n(\beta)^2 = g_n(\beta) & (n : \text{奇数}). \end{cases}$$

ここで、 $h_\beta = \frac{1}{2}(\beta - \frac{\alpha_0}{2})^2 - \frac{1}{8}\alpha_0^2$ である。

このことより次が成り立つ。

命題 8-3 $A_0(W_{[\kappa_+, \kappa_-]}) = \mathbb{C}[[T], [W_{1,0}]]$ (可換環) であり、 $(\kappa_+, \kappa_-) \in (\mathbb{C}^*)^2, \kappa_+\kappa_- = 1$ について次の関係式が成立する。

$$[W_{n,0}] = g_n([T]) : n \geq 0, \text{ even}$$

$$[W_{n,0}]^2 = g_n([T]) : n \geq 1, \text{ odd}$$

さらに、 E と F が $A_0(M_{p_+, p_-})$ に $\mathbb{C}$ 代数としての derivation を導くことを用いて、次を得る。

定理 8-4 $A_0(M_{p_+, p_-})$ について以下が成り立つ。(1) $A_0(M_{p_+, p_-})$ は有限次元 $\mathbb{C}$ 代数であり、 $[T], [W_{1,a}], a = -1, 0, 1$ で生成される。

(2) 次の関係式が存在する。

$$[W_{0,0}] = g_0([T]), \quad [W_{1,0}]^2 = g_1([T]), \quad g_2([T]) = 0.$$

(3) $[W_{1,a}] (a = -1, 0, 1)$ の間に次の関係式が存在する。

	$[W_{1,-1}]$	$[W_{1,0}]$	$[W_{1,1}]$
$[W_{1,-1}]$	0	$-f([T])[W_{1,-1}]$	$-g_1([T]) - f([T])[W_{1,0}]$
$[W_{1,0}]$	$f([T])[W_{1,-1}]$	$g_1([T])$	$-f([T])[W_{1,1}]$
$[W_{1,1}]$	$-g_1([T]) + f([T])[W_{1,0}]$	$f([T])[W_{1,1}]$	0

(4) $[W_{1,a}] (a = -1, 0, 1)$ の間の交換関係は次のようである。

$$[[W_{1,0}], [W_{1,\pm 1}]] = \mp 2f([T])[W_{1,1}], \quad [[W_{1,1}], [W_{1,-1}]] = 2f([T])[W_{1,0}]$$

ここに $f(x) \in \mathbb{C}[x]$.

この章で明らかにしたこと及び Frobenius 写像の性質から、頂点作用素代数の写像

$$M_{p_+, p_-} \rightarrow \text{MinVir}_{c_{p_+, p_-}} \rightarrow 0$$

により $\text{MinVir}_{c_{p_+, p_-}}$ の単純対象

$$L_{[r, s]} = L_{[p_+ - r, p_- - s]}, \quad 1 \leq r \leq p_+ - 1, 1 \leq s \leq p_- - 1$$

は $M_{p_+, p_-}\text{-mod}$ における単純対象 (やはり $L_{[r, s]} = L_{[p_+ - r, p_- - s]}$ と記す) を定めることが分かるが、更に次が示される。

§ 8.3. $M_{p_+, p_-}\text{-mod}$ の構造

命題 8-4 $1 \leq r \leq p_+, 1 \leq s \leq p_-$ とする。 $\mathcal{K}_{[r, s]}^\pm$ は M_{p_+, p_-} -加群の構造をもち、さらに $\mathcal{X}_{[r, s]}^\pm \subset \mathcal{K}_{[r, s]}^\pm$ は部分 M_{p_+, p_-} -加群である。

$$\mathbb{C}|\Delta_{[r, s]}\rangle = \mathbb{C}|\Delta_{[p_+ - r, p_- - s]}\rangle \subset L_{\Delta_{r, s}} \quad \text{および} \quad V_0(\mathcal{X}_{[r, s]}^\pm) \subset \mathcal{X}_{[r, s]}^\pm$$

は $A_0(M_{p_+, p_-})$ -加群になる。

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}|\Delta_{[r, s]}\rangle = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}|\Delta_{[p_+ - r, p_- - s]}\rangle = 1, \quad \begin{cases} \dim_{\mathbb{C}} V_0(\mathcal{X}_{[r, s]}^+) = 1 \\ \dim_{\mathbb{C}} V_0(\mathcal{X}_{[r, s]}^-) = 2 \end{cases}$$

である。

これらは $A_0(M_{p_+, p_-})\text{-mod}$ における単純対象であることが分かる。更に $A_0(W_{p_+, p_-})$ の関係式を用いると、次が分かる。

命題 8-5 $A_0(M_{p_+, p_-})$ の単純対象は次の 1) 2) 3) で尽くされる。

$$\begin{cases} 1) & \mathbb{C}|\Delta_{[r, s]}\rangle = \mathbb{C}|\Delta_{[p_+ - r, p_- - s]}\rangle, \quad 1 \leq r \leq p_+ - 1, 1 \leq s \leq p_- - 1. \\ 2) & V_0(\mathcal{X}_{[r, s]}^+), \quad 1 \leq r \leq p_+, 1 \leq s \leq p_-. \quad (\dim_{\mathbb{C}} V_0(\mathcal{X}_{[r, s]}^+) = 1 \text{ である。}) \\ 3) & V_0(\mathcal{X}_{[r, s]}^-), \quad 1 \leq r \leq p_+, 1 \leq s \leq p_-. \quad (\dim_{\mathbb{C}} V_0(\mathcal{X}_{[r, s]}^-) = 2 \text{ である。}) \end{cases}$$

これより単純対象の数は、 $\frac{1}{2}(p_+ - 1)(p_- - 1) + 2p_+p_-$ 個である。

最終的に、次の定理を得る。

定理 8-5 M_{p_+, p_-} の単純対象は次の 1) 2) で尽くされる。

$$\begin{cases} 1) & L_{[r, s]} = L_{[p_+ - r, p_- - s]}, \quad 1 \leq r \leq p_+ - 1, 1 \leq s \leq p_- - 1. \\ 2) & \mathcal{X}_{[r, s]}^\varepsilon, \quad 1 \leq r \leq p_+, 1 \leq s \leq p_-, \varepsilon = \pm. \end{cases}$$

単純対象の数は、 $\frac{1}{2}(p_+ - 1)(p_- - 1) + 2p_+p_-$ 個である。

謝辞 この論考を読みやすくするにあたって、長谷川浩司氏と山田泰彦氏及びレフェリー氏に多大な助力をいただいた。ここに明記して深く感謝の意を表したい。

References

- [青本-喜多] K. Aomoto and M. Kita, Theory of hypergeometric functions, Springer, 2011
- [BPZ] A. A. Belavin, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory, *Nucl. Phys. B*, 241, 333-380 (1984)
- [FBZ] Edward Frenkel and David Ben-Zvi, *Vertex algebras and algebraic curves, Mathematical surveys and monographs, Amer. Math. Soc.*, 88 (2001)
- [FF1] Boris L. Feigin and Dimitry B. Fuchs, Verma modules over the Virasoro algebra. *Lect. Notes in Math.*, 1060, 230-245. (1984)
- [FF2] Boris L. Feigin and Dimitry B. Fuchs, Cohomologies of some nilpotent subalgebras of the Virasoro and Kac-Moody Lie algebras, *J. Geom. Phys.* 5, 209-235 (1988)
- [FF3] Boris L. Feigin and Dimitry B. Fuchs, Representation of the Virasoro algebra. *Representations of Lie Groups and Related topics, Adv. Stud. Contemp. Math., Gordon and Breach, New York*, 7 465-554. (1990)
- [FGST06] Boris L. Feigin, Azat. M. Gainutdinov, Alexei M. Semikhatov, Ilya Yu. Tipunin, Logarithmic extensions of minimal models: characters and modular transformations. *Nucl. Phys. B* 757, 303-343 (2006)
- [FGST07] Boris L. Feigin, Azat. M. Gainutdinov, Alexei M. Semikhatov, Ilya Yu. Tipunin, Kazhdan-Lusztig dual quantum group for logarithmic extensions of Virasoro minimal models. *J. Math. Phys.* 48, 032303 (2007)
- [FZ92] Igor B. Frenkel and Yongchang Zhu, Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras. *Duke Math. J.* 66, 123-168 (1992)
- [IK] K. Iohara and Y. Koga, *Representation theory of the Virasoro Algebra*, Springer 2010
- [Mac85] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*. Clarendon Press, Oxford 1995.
- [MNT] Atsushi Matsuo, Kiyokazu Nagatomo and Akihiro Tsuchiya, Quasi-finite algebras graded by Hamiltonian and vertex operator algebra. *London Math. Soc. Lect. note ser.* 372, 282-329 (2010)
- [TK] Akihiro Tsuchiya and Yukihiro Kanie, Fock space representations of the Virasoro algebra - Intertwining operators. *Publ. RIMS. Kyoto univ.* 22, 259-327 (1986)
- [TW] Akihiro Tsuchiya and Simon Wood, On the extended W-algebra of type sl_2 at positive rational level, arXiv: 1302.6435
- [Var] Alexander Varchenko, *Special functions, KZ type equations and representation theory*, Amer. Math. Soc. (2003)
- [Y] 山田泰彦, 共形場理論入門, 培風館 2006