

STRUCTURE OF GROUP C^* -ALGEBRAS OF THE GENERALIZED DIXMIER GROUPS

須藤 隆洋 (SUDO TAKAHIRO)

琉球大学理学部

この講演の内容は次のとおりである：

- §1. Dixmier 群の C^* -群環の構造.
- §2. Generalized Dixmier 群の C^* -群環の構造.
- §3. 多重対角作用をもつリー半直積の場合.
- §4. 対角作用をもつリー半直積の場合.

§1. DIXMIER 群の C^* -群環の構造

まず最初に、実 3 次元 Heisenberg 群の C^* -群環の構造について復習する。
実 3 次元 Heisenberg 群 H_3 は、次の行列全体からなる単連結リー群である：

$$g = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (c, b, a), \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

そして、 H_3 はリー半直積 $\mathbb{R}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ に同型である。ただし、作用は、 $\alpha_a(c, b) = (c + ab, b)$ 。
このとき、 H_3 の C^* -群環 $C^*(H_3)$ は、接合積の定義とフーリエ変換により次に同型である：

$$C^*(H_3) \cong C^*(\mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R} \cong C_0(\mathbb{R}^2) \rtimes_{\hat{\alpha}} \mathbb{R}.$$

ただし、 $\hat{\alpha}$ は、 $\mathbb{R}^2$ の双対群 $\mathbb{R}^2$ 上の作用で、 $\hat{\alpha}_a(l, m) = (l, m + al)$, $(l, m) \in \mathbb{R}^2$ 。このとき、 $\{0\} \times \mathbb{R}$ は、 $\hat{\alpha}$ で不動で、 $\mathbb{R}^2$ で閉なので、次の完全列がえられる：

$$0 \rightarrow C_0((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R} \rightarrow C_0(\mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R} \rightarrow C_0(\mathbb{R}^2) \rightarrow 0.$$

さらに、 $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ 上の作用 $\hat{\alpha}$ は、自由かつ遊走的 (wandering) なので、次をえる [Gr1; Corollary 15]：

$$C_0((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R} \cong C_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \otimes \mathbb{K}$$

ただし、 $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ の $\hat{\alpha}$ による軌道空間が $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ に同相である。

次に、実 7 次元 Dixmier 群の C^* -群環の構造を考察する。

定義. 実 7 次元 Dixmier 群 D_7 は、半直積 $\mathbb{C}^2 \rtimes_{\beta} H_3$ で定義される。ただし、

$$\begin{aligned}\beta_g(z_1, z_2) &= (e^{ia}z_1, e^{ib}z_2), \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}, g = (c, b, a) \in H_3 \\ \beta_g &= \begin{pmatrix} e^{ia} & 0 \\ 0 & e^{ib} \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}).\end{aligned}$$

D_7 は I 型でない単連結可解リー群である [Dx1]. そして、

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\pi k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

とおくと、商群 D_7/Γ は I 型連結可解リー群で、リー半直積 $\mathbb{C}^2 \rtimes (H_3/\Gamma)$ に同型である。ただし、 $H_3/\Gamma \cong (\mathbb{T} \times \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}$.

接合積の定義とフーリエ変換により

$$C^*(D_7) \cong C^*(\mathbb{C}^2) \rtimes_{\beta} H_3 \cong C_0(\mathbb{C}^2) \rtimes_{\hat{\beta}} H_3.$$

ただし、 $\hat{\beta}_g(w_1, w_2) = (e^{-ia}w_1, e^{-ib}w_2)$, $(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$. $\mathbb{C}^2$ の原点 0_2 は、 $\hat{\beta}$ で不動なので、次の完全列がえられる：

$$0 \rightarrow C_0(\mathbb{C}^2 \setminus \{0_2\}) \rtimes H_3 \rightarrow C_0(\mathbb{C}^2) \rtimes H_3 \rightarrow C^*(H_3) \rightarrow 0.$$

さらに、 $(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \{0\}$ と $\{0\} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})$ は、 $\hat{\beta}$ 不変で、 $\mathbb{C}^2 \setminus \{0_2\}$ で閉なので、次は完全である：

$$0 \rightarrow C_0((\mathbb{C} \setminus \{0\})^2) \rtimes H_3 \rightarrow C_0(\mathbb{C}^2 \setminus \{0_2\}) \rtimes H_3 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^2 C_0(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \rtimes_{\hat{\beta}_i} H_3 \rightarrow 0.$$

ただし、 $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ は、それぞれ $\hat{\beta}$ の $(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \{0\}$, $\{0\} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})$ への制限である。

各作用 $\hat{\beta}_i$ は、各 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上で回転なので、

$$C_0(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \rtimes_{\hat{\beta}_i} H_3 \cong C_0(\mathbb{R}_+) \otimes (C(\mathbb{T}) \rtimes H_3).$$

そして、 H_3 のトーラス $\mathbb{T}$ 上の作用は推移的で、 $w_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ の固定群 $(H_3)_{w_i}$ による商空間 $H_3/(H_3)_{w_i}$ は $\mathbb{T}$ に同相で、作用 β と両立するので、

$$C(\mathbb{T}) \rtimes H_3 \cong C(H_3/(H_3)_{w_i}) \rtimes H_3.$$

Green の imprimitivity 定理 [Gr2; Corollary 2.10] より、

$$C(H_3/(H_3)_{w_i}) \rtimes H_3 \cong C^*((H_3)_{w_i}) \otimes \mathbb{K}(L^2(\mathbb{T})).$$

一方、次がわかる：

$$(H_3)_{w_1} = \mathbb{R}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}, \quad (H_3)_{w_2} = (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}.$$

接合積の定義とフーリエ変換により、

$$C^*((H_3)_{w_1}) \cong C^*(\mathbb{R}^2) \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z} \cong C_0(\mathbb{R}^2) \rtimes_{\hat{\alpha}} \mathbb{Z},$$

$$\hat{\alpha}_a(l, m) = (l, m + al), \quad (l, m) \in \mathbb{R}^2, a \in \mathbb{Z}.$$

$\{0\} \times \mathbb{R}$ は、 $\hat{\alpha}$ で不動なので、次の完全列がえられる：

$$0 \rightarrow C_0((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z} \rightarrow C_0(\mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{Z} \rightarrow C_0(\mathbb{R}) \otimes C^*(\mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

$(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ 上の $\mathbb{Z}$ の作用は、自由かつ遊走的であることに注意する。上のイデアルに対しては Green の結果 [Gr1]、quotient についてはフーリエ変換より、

$$\begin{cases} C_0((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z} \cong C_0((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{T}) \otimes \mathbb{K}(l^2(\mathbb{Z})), \\ C_0(\mathbb{R}) \otimes C^*(\mathbb{Z}) \cong C_0(\mathbb{R}) \otimes C(\mathbb{T}) \cong C_0(\mathbb{R} \times \mathbb{T}) \end{cases}$$

ただし、 $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ の $\mathbb{Z}$ による商空間が $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{T}$ に同相である。
同様にして、

$$C^*((H_3)_{w_2}) = C^*(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \rtimes_{\alpha} \mathbb{R} \cong C_0(\mathbb{R} \times \mathbb{T}) \rtimes_{\hat{\alpha}} \mathbb{R}$$

$$\hat{\alpha}_a(l, e^{im}) = (l, e^{i(m+al)}), \quad (l, e^{im}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}.$$

$\{0\} \times \mathbb{T}$ は、 $\hat{\alpha}$ で不動で、 $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ で閉なので、

$$0 \rightarrow C_0((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{T}) \rtimes \mathbb{R} \rightarrow C_0(\mathbb{R} \times \mathbb{T}) \rtimes \mathbb{R} \rightarrow C_0(\mathbb{T} \times \mathbb{R}) \rightarrow 0.$$

さらに、イデアルは直和に分解する。

$$C_0((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{T}) \rtimes \mathbb{R} \cong \oplus^2 (C_0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}) \rtimes \mathbb{R}).$$

そして、各直和因子は、 $\mathbb{R}_+$ 上の連続場の C^* -環とみなせて、 $C_0(\mathbb{R}_+, \cup_{\mathbb{R}_+} C(\mathbb{T}) \rtimes \mathbb{R})$ とかく。ただし、各ファイバーが $C(\mathbb{T}) \rtimes \mathbb{R}$ である。 $\mathbb{R}$ の $\mathbb{T}$ 上の作用は回転なので、

$$C(\mathbb{T}) \rtimes \mathbb{R} \cong C(\mathbb{R}/\mathbb{R}_1) \rtimes \mathbb{R}$$

$$\cong C^*(\mathbb{R}_1) \otimes \mathbb{K}(L^2(\mathbb{T})) \cong C(\mathbb{T}) \otimes \mathbb{K}.$$

ただし、 $\mathbb{R}_1$ は $1 \in \mathbb{T}$ の固定群で、 $\mathbb{Z}$ に同型である。コホモロジー群 $H^3(\mathbb{R}, \mathbb{Z})$ が消えていることから、Dixmier-Douady の結果 (cf.[Dx2]) より、

$$C_0(\mathbb{R}_+, \cup_{\mathbb{R}_+} C(\mathbb{T}) \rtimes \mathbb{R}) \cong C_0(\mathbb{R} \times \mathbb{T}) \otimes \mathbb{K}.$$

次に、接合積 $C_0((\mathbb{C} \setminus \{0\})^2) \rtimes H_3$ の構造を解析する。 H_3 の $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$ 上の作用は、多重回転なので、

$$C_0((\mathbb{C} \setminus \{0\})^2) \rtimes H_3 \cong C_0(\mathbb{R}_+^2) \otimes (C(\mathbb{T}^2) \rtimes H_3).$$

さらに、 H_3 の $\mathbb{T}^2$ 上の作用は推移的なので、

$$C(\mathbb{T}^2) \rtimes H \cong C(H_3/(H_3)_{1_2}) \rtimes H_3.$$

ただし、 $(H_3)_{1_2}$ は $1_2 = (1, 1) \in \mathbb{T}^2$ の固定群である。次に Green の imprimitivity 定理より、

$$C(H_3/(H_3)_{1_2}) \rtimes H_3 \cong C^*((H_3)_{1_2}) \otimes \mathbb{K}(L^2(\mathbb{T}^2)).$$

そして、 $(H_3)_{1_2} = (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ がわかる。ゆえに、

$$\begin{aligned} C^*((H_3)_{1_2}) &\cong C^*(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z} \cong C_0(\mathbb{R} \times \mathbb{T}) \rtimes_{\hat{\alpha}} \mathbb{Z} \\ \hat{\alpha}_a(l, e^{im}) &= (l, e^{i(m+al)}), \quad (l, e^{im}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}, a \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$\{0\} \times \mathbb{T}$ は $\hat{\alpha}$ で不動で、 $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ で閉なので、

$$0 \rightarrow C_0((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{T}) \rtimes \mathbb{Z} \rightarrow C_0(\mathbb{R} \times \mathbb{T}) \rtimes \mathbb{Z} \rightarrow C(\mathbb{T}) \otimes C^*(\mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

そして、イデアルは直和に分解する：

$$C_0((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{T}) \rtimes \mathbb{Z} \cong \oplus^2 (C_0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}) \rtimes \mathbb{Z}).$$

さらに、各直和因子は、 $\mathbb{R}_+$ 上の連続場の C^* -環とみなせて、次のようにかく：

$$C_0(\mathbb{R}_+, \cup_{\theta \in \mathbb{R}_+} C(\mathbb{T}) \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}) \cong C_0(\mathbb{R}_+, \cup_{\theta \in \mathbb{R}_+} \mathfrak{A}_{\theta}).$$

ただし、各ファイバーは、 $\theta \in \mathbb{R}_+$ により無理数か有理数回転環 $\mathfrak{A}_{\theta} = C(\mathbb{T}) \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}$ であり、 $\theta_a(e^{im}) = e^{i(m+a\theta)}$, $e^{im} \in \mathbb{T}, a \in \mathbb{Z}$.

以上をまとめると、次がなりたつ：

定理 1.1. D_7 を実 7 次元 Dixmier 群とする。このとき、 $C^*(D_7)$ は有限組成列

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_3 &= C^*(D_7), \\ \mathfrak{I}_2 &= C_0(\mathbb{C}^2 \setminus \{0_2\}) \rtimes H_3, \\ \mathfrak{I}_1 &= C_0((\mathbb{C} \setminus \{0\})^2) \rtimes H_3 \end{aligned}$$

をもち、各 subquotient は次に同型である：

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_3/\mathfrak{I}_2 &\cong C^*(H_3) = C^*((H_3)_{0_2}), \\ \mathfrak{I}_2/\mathfrak{I}_1 &\cong \oplus_{i=1}^2 (C_0(\mathbb{R}_+) \otimes C^*((H_3)_{w_i}) \otimes \mathbb{K}) \\ \mathfrak{I}_1 &\cong C_0(\mathbb{R}_+^2) \otimes C^*((H_3)_{1_2}) \otimes \mathbb{K}. \end{aligned}$$

さらに、固定群の C^* -群環の構造は次であたえられる：

$$\begin{cases} 0 \rightarrow C_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \otimes \mathbb{K} \rightarrow C^*(H_3) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^2) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow C_0((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{T}) \otimes \mathbb{K} \rightarrow C^*((H_3)_{w_i}) \rightarrow C_0(\mathbb{R} \times \mathbb{T}) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \oplus^2 C_0(\mathbb{R}_+, \cup_{\theta \in \mathbb{R}_+} \mathfrak{A}_{\theta}) \rightarrow C^*((H_3)_{1_2}) \rightarrow C(\mathbb{T}^2) \rightarrow 0. \end{cases}$$

注. H_3 を H_3/Γ で置き換えると、各固定群の C^* -群環の構造は次で与えられる：

$$\begin{cases} C^*(H_3/\Gamma) \cong (\oplus_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}} \mathbb{K}) \oplus C_0(\mathbb{R}^2) \\ C^*((H_3/\Gamma)_{w_i}) \cong (\oplus_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}} C(\mathbb{T}) \otimes \mathbb{K}) \oplus C_0(\mathbb{R} \times \mathbb{T}) \\ C^*((H_3/\Gamma)_{1_2}) \cong C_0(\mathbb{Z} \times \mathbb{T}) \rtimes \mathbb{Z} \cong \oplus_{\mathbb{Z}} C(\mathbb{T}^2). \end{cases}$$

ただし、 $C(\mathbb{T}) \rtimes_{2\pi k} \mathbb{Z} \cong C(\mathbb{T}^2)$ for $k \in \mathbb{Z}$.

上の定理で、 H_3 の各固定群の C^* -群環は $\mathbb{R}$ 上の連続場の C^* -環とみなせて、各ファイバー $\{\mathfrak{B}_\theta\}_{\theta \in \mathbb{R}}$ はそれぞれ次であたえられる：

$$\mathfrak{B}_\theta \cong \begin{cases} C_0(\mathbb{R}^2) & \begin{cases} C_0(\mathbb{R} \times \mathbb{T}) & \theta = 0 \\ C(\mathbb{T}) \otimes \mathbb{K} & \theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases} \\ \mathbb{K} & \begin{cases} C(\mathbb{T}^2) & \theta = 0 \\ \mathfrak{A}_\theta & \theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases} \end{cases}$$

上の定理と注から次がわかる：

系 1.2. D_7 を実 7 次元 Dixmier 群とすると、 $C^*(D_7)$ は次の連続場の C^* -環の拡大を繰り返してえられる：

$$\begin{cases} C_0(\mathbb{R}, \cup_{\theta \in \mathbb{R}} \mathfrak{B}_\theta) \\ \oplus^2 C_0(\mathbb{R}, \cup_{\theta \in \mathbb{R}} (C_0(\mathbb{R}_+) \otimes \mathfrak{B}_\theta \otimes \mathbb{K})) \\ C_0(\mathbb{R}, \cup_{\theta \in \mathbb{R}} (C_0(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathfrak{B}_\theta \otimes \mathbb{K})) \end{cases}$$

ただし、各ファイバー $\mathfrak{B}_\theta$ は上の注であたえられる。

定理 1.1 の組成列の細分をとり、次がえられる：

定理 1.3. D_7 を実 7 次元 Dixmier 群とする。このとき、 $C^*(D_7)$ の有限組成列 $\{\mathfrak{D}_j\}_{j=1}^{11}$ が存在して、次がいえる：

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_j / \mathfrak{D}_{j-1} &\cong \begin{cases} C_0(\mathbb{R}^2), & j = 11 \\ C_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \otimes \mathbb{K}, & j = 10 \end{cases} \\ \mathfrak{D}_j / \mathfrak{D}_{j-1} &\cong C_0(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}) \otimes \mathbb{K}, \quad 4 \leq j \leq 9 \\ \mathfrak{D}_j / \mathfrak{D}_{j-1} &\cong \begin{cases} C_0(\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{T}^2) \otimes \mathbb{K}, & j = 3 \\ C_0(\mathbb{R}_+^2) \otimes \mathbb{K} \otimes C_0(\mathbb{R}_+, \cup_{\theta \in \mathbb{R}_+} \mathfrak{A}_\theta), & j = 1, 2. \end{cases} \end{aligned}$$

定理 1.3 の有限組成列に、stable rank と connected stable rank の基本公式を適用して次がえられる：

系 1.4. D_7 を実 7 次元 Dixmier 群とする。このとき、

$$\begin{cases} \text{sr}(C^*(D_7)) = 2 = \dim_{\mathbb{C}}(D_7)_1^\wedge \\ \text{csr}(C^*(D_7)) = 2. \end{cases}$$

ただし、

$$\dim_{\mathbb{C}}(D_7)_1^\wedge = [\dim(D_7)_1^\wedge / 2] + 1.$$

ここで、 $(D_7)_1^\wedge$ は、 D_7 の 1 次元表現全体のなす空間、 $[\cdot]$ はガウス記号をそれぞれ意味する。

証明. 定理 1.3 より、 $(D_7)_1^\wedge$ は、 $\mathbb{R}^2$ に同相であることに注意する。

定理 1.3 より、subquotients $\mathfrak{D}_j / \mathfrak{D}_{j-1}$ ($1 \leq j \leq 10$) は stable である。ゆえに、

$$\text{sr}(\mathfrak{D}_j / \mathfrak{D}_{j-1}) \leq 2, \quad \text{csr}(\mathfrak{D}_j / \mathfrak{D}_{j-1}) \leq 2, \quad (1 \leq j \leq 10).$$

C^* -環の完全列に対する stable rank と connected stable rank の評価式 ([Rf],[Sh],[Ns]) を帰納的に用いて、次がわかる：

$$\text{sr}(\mathfrak{D}_j) \leq 2, \quad \text{csr}(\mathfrak{D}_j) \leq 2, \quad (1 \leq j \leq 10).$$

したがって、

$$2 = \text{sr}(C_0(\mathbb{R}^2)) \leq \text{sr}(C^*(D_7)) \leq 2 \vee \text{sr}(C_0(\mathbb{R}^2)) \vee \text{csr}(C_0(\mathbb{R}^2)) = 2,$$

$$\text{csr}(C^*(D_7)) \leq 2 \vee \text{csr}(C_0(\mathbb{R}^2)) = 2.$$

一方、次の同型が成り立つことに注意する：

$$D_7 = \mathbb{C}^2 \rtimes H_3 \cong ((\mathbb{R}^4) \rtimes \mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R}.$$

ゆえに、 $C^*(D_7) \cong (C_0(\mathbb{R}^4) \rtimes \mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{R}$. C^* -環の K -群についての Connes の Thom 同型 (cf.[Cn],[Wo]) を繰り返し用いると、

$$K_1(C^*(D_7)) \cong K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}.$$

Hassan の結果 [Hs] より、 $\text{csr}(C^*(D_7)) \geq 2$. $\square$

定理 1.3 のもう一つの応用として、次が簡単にわかる：

系 1.5. D_7 を実 7 次元 Dixmier 群とすると、 $C^*(D_7)$ は自明でない射影元をもたない。

証明. もし自明でない射影元が、ある C^* -環に存在するならば、任意の商 C^* -環でのその像は自明でない射影元か、零である。一方、 $C^*(D_7)$ の各 subquotient は自明でない射影元をもたない。なぜなら、各 subquotient ($j \neq 10$) と subquotient ($j = 10$) の各直和因子はコンパクトでない連結空間上の可換 C^* -環をテンソル因子としてもつからである。 $\square$

§2. GENERALIZED DIXMIER 群の C^* -群環の構造

まず始めに一般 Heisenberg 群の定義を復習する。実 $(2n+1)$ 次元一般 Heisenberg 群 H_{2n+1} は、次の行列：

$$g = (c, b, a) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_n & c \\ & \ddots & & 0 & b_1 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & b_n \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$c \in \mathbb{R}$, $b = (b_1, \dots, b_n)$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, 全体からなる単連結巾零リー群である。

次に generalized Dixmier 群の定義をする。

定義. 実 $(6n+1)$ 次元一般 (generalized) Dixmier 群 D_{6n+1} は、半直積 $\mathbb{C}^{2n} \rtimes_{\beta} H_{2n+1}$ で定義される。ただし、作用 β を次で定義する：

$$\beta_g(z, z') = ((e^{ia_i} z_i), (e^{ib_i} z_{n+i})), \quad z = (z_i), z' = (z_{n+i}) \in \mathbb{C}^n, g \in H_{2n+1}$$

$$\beta_g = \begin{pmatrix} e^{ia_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{ia_n} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} e^{ib_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{ib_n} \end{pmatrix} \in GL_{2n}(\mathbb{C}).$$

§1 と同様の考察をさらに押しすすめることにより、次がえられる：

定理 2.1. D_{6n+1} を実 $(6n+1)$ 次元 *generalized Dixmier* 群とする。このとき、 $C^*(D_{6n+1})$ の有限組成列 $\{\mathfrak{I}_j\}_{j=1}^{2n+1}$ が存在して、各 *subquotient* $\mathfrak{I}_{2n+1-k}/\mathfrak{I}_{2n-k}$ は次に同型である：

$$\begin{cases} C^*(H_{2n+1}) = C^*((H_{2n+1})_{1_0}) & k = 0 \\ \oplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq 2n} C_0(\mathbb{R}_+^k) \otimes C^*((H_{2n+1})_{1_k}) \otimes \mathbb{K}(L^2(\mathbb{T}^k)) & 1 \leq k \leq 2n. \end{cases}$$

ただし、 $(H_{2n+1})_{1_k}$ は双対作用 $\hat{\beta}$ における $1_0 = 0_{2n} \in \mathbb{C}^{2n}$ または $1_k = (1, \dots, 1) \in \mathbb{T}^k \subset \mathbb{C}^{2n}$ の固定群である。さらに、次がえられる：

$$0 \rightarrow \mathfrak{L}_k \rightarrow C^*((H_{2n+1})_{1_k}) \rightarrow C(\mathbb{T}^k) \otimes C_0(\mathbb{R}^{2n-k}) \rightarrow 0$$

$0 \leq k \leq 2n$, そして、 $\mathfrak{L}_k$ は次に同型である：

$$\begin{cases} C_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \otimes \mathbb{K} & k = 0 \\ C_0((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{T}) \otimes \mathbb{K}, & k = 1 \\ C_0((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{T}^k) \otimes \mathbb{K} \quad \text{or} & \\ C_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cup_{\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} ((\otimes^{s_1} \mathfrak{A}_\theta) \otimes C(\mathbb{T}^{s_2}) \otimes \mathbb{K})) & 2 \leq k \leq n \\ C_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cup_{\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} ((\otimes^{s_1} \mathfrak{A}_\theta) \otimes C(\mathbb{T}^{s_2}) \otimes \mathbb{K})) & n+1 \leq k \leq 2n-1 \\ C_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cup_{\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \otimes^n \mathfrak{A}_\theta) & k = 2n \end{cases}$$

$s_1 \geq 1, s_2 \geq 0, 2s_1 + s_2 = k$. ただし、4, 5 と 6 番目は、それぞれ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上の連続場の C^* -環を意味し、各ファイバーは C^* -テンソル積 $(\otimes^{s_1} \mathfrak{A}_\theta) \otimes C(\mathbb{T}^{s_2}) \otimes \mathbb{K}$ と $\otimes^n \mathfrak{A}_\theta$ であり、そして、 $\mathfrak{A}_\theta$ は θ により無理数か有理数回転環である。

上の定理は次のように言い換えられる：

系 2.2. D_{6n+1} を実 $(6n+1)$ 次元 *generalized Dixmier* 群とすると、 $C^*(D_{6n+1})$ は次の連続場の C^* -環による拡大を繰り返してえられる：

$$\begin{cases} C_0(\mathbb{R}, \cup_{\theta_0 \in \mathbb{R}} \mathfrak{B}_{\theta_0}) & k = 0 \\ \oplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq 2n} C_0(\mathbb{R}, \cup_{\theta_k \in \mathbb{R}} C_0(\mathbb{R}_+^k) \otimes \mathfrak{B}_{\theta_k} \otimes \mathbb{K}(L^2(\mathbb{T}^k))) & 1 \leq k \leq 2n, \end{cases}$$

ただし、各ファイバーの各テンソル因子 $\mathfrak{B}_{\theta_k}$ はそれぞれ次で与えられる：

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{\theta_0} &\cong \begin{cases} C_0(\mathbb{R}^{2n}) & \theta_0 = 0 \\ \mathbb{K} & \theta_0 \neq 0 \end{cases} & \mathfrak{B}_{\theta_1} &\cong \begin{cases} C_0(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^{2n-1}) & \theta_1 = 0 \\ C(\mathbb{T}) \otimes \mathbb{K} & \theta_1 \neq 0 \end{cases} \\ \mathfrak{B}_{\theta_k} &\cong \begin{cases} C_0(\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{2n-k}) \\ C(\mathbb{T}^k) \otimes \mathbb{K} \end{cases} & \text{or} & \begin{cases} C_0(\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{2n-k}) & \theta_k = 0 \\ (\otimes^{s_1} \mathfrak{A}_{\theta_k}) \otimes C(\mathbb{T}^{s_2}) \otimes \mathbb{K} & \theta_k \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

for $2 \leq k \leq 2n$ with $s_1 \geq 1, s_2 \geq 0, k = 2s_1 + s_2$.

さらに、定理 2.1 の組成列の細分をとり、次がえられる：

定理 2.3. D_{6n+1} を実 $(6n+1)$ 次元 *generalized Dixmier* 群とすると、 $C^*(D_{6n+1})$ の有限組成列 $\{\mathfrak{K}_j\}_{j=1}^K$ が存在して、各 *subquotient* $\mathfrak{K}_j/\mathfrak{K}_{j-1}$ は次に同型である：

$$\begin{cases} C_0(\mathbb{R}^{2n}) & j = K \\ C_0(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{K} & \text{or} \\ C_0(\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{2n}) \otimes \mathbb{K} & \text{or} \\ C_0(\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{k+1}) \otimes \mathbb{K} & \text{or} \\ C_0(\mathbb{R}_+^k) \otimes \mathbb{K} \otimes C_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cup_{\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} ((\otimes^{s_1} \mathfrak{A}_\theta) \otimes C(\mathbb{T}^{s_2}) \otimes \mathbb{K})) \end{cases}$$

for $1 \leq j \leq K-1$ with $1 \leq k \leq 2n$, $s_1 \geq 1$, $s_2 \geq 0$, $2s_1 + s_2 = k$.

注. 5 番目の場合で、 C^* -テンソル積 $(\otimes^{s_1} \mathfrak{A}_\theta) \otimes C(\mathbb{T}^{s_2})$ は、非可換トーラスの特別な場合 $C(\mathbb{T}^{s_1} \times \mathbb{T}^{s_2}) \rtimes \mathbb{Z}^{s_1}$ に同型である。

Stable rank と connected stable rank の基本公式を定理 2.3 の組成列に帰納的に適用して、次がえられる：

系 2.4. D_{6n+1} を実 $(6n+1)$ 次元 *generalized Dixmier* 群とすると、

$$\begin{cases} \text{sr}(C^*(D_{6n+1})) = n+1 = \dim_{\mathbb{C}}(D_{6n+1})_1^\wedge \\ \text{csr}(C^*(D_{6n+1})) \leq n+1. \end{cases}$$

証明は、系 1.4 のそれと同様である。

定理 2.3 の組成列をもちいて、系 1.5 と同じ理由から次がえられる：

系 2.5. D_{6n+1} を実 $(6n+1)$ 次元 *generalized Dixmier* 群とすると、 $C^*(D_{6n+1})$ は自明でない射影元を持たない。

§3. 多重対角作用をもつリー半直積の場合

N を連結リー群とし、 G を半直積 $\mathbb{C}^n \rtimes_\alpha N$ で定義される連結リー群とする。このとき、次の図式は可換である：

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\alpha} & GL_n(\mathbb{C}) \\ \exp \uparrow & & \exp \uparrow \\ \mathfrak{N} & \xrightarrow{d\alpha} & M_n(\mathbb{C}) \end{array}$$

ただし、 $\mathfrak{N}$ は N のリー環で、 $d\alpha$ は α の微分、 $\exp$ は指数写像である。さらに、作用 α は次の可換図式から誘導されると仮定する：

$$\begin{array}{ccccc} N & \longrightarrow & N/[N, N] & \xrightarrow{\alpha} & GL_n(\mathbb{C}) \\ \exp \uparrow & & \exp \uparrow & & \exp \uparrow \\ \mathfrak{N} & \longrightarrow & \mathfrak{N}/[\mathfrak{N}, \mathfrak{N}] & \xrightarrow{d\alpha} & M_n(\mathbb{C}) \end{array}$$

ただし、 $[N, N]$, $[\mathfrak{N}, \mathfrak{N}]$ は、それぞれ N , $\mathfrak{N}$ の交換子である。このとき、

$$N/[N, N] \cong \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{T}^m, \quad \mathfrak{N}/[\mathfrak{N}, \mathfrak{N}] \cong \mathbb{R}^n$$

for some $n \geq 0$ and $0 \leq m \leq n$. 従って、次の可換図式を考えれば十分である：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{T}^m & \xrightarrow{\alpha} & GL_n(\mathbb{C}) \\ \uparrow & & \exp \uparrow \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{d\alpha} & M_n(\mathbb{C}). \end{array}$$

さらに、作用 α は次の形の複素 1 次元、多重対角作用であると仮定する：

$$\alpha_t = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t_n} \end{pmatrix}$$

with $t = ((t_i)_{i=1}^{n-m}, (e^{it_j})_{j=n-m+1}^n) \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{T}^m$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ($1 \leq i \leq n-m$), $\lambda_j \in i\mathbb{R}$ ($n-m+1 \leq j \leq n$). このとき、次が成り立つ：

定理 3.1. $G = \mathbb{C}^n \rtimes_{\alpha} N$, ただし、 N は連結リー群で、 α は複素 1 次元、多重対角作用とする。このとき、 $C^*(G)$ は有限組成列 $\{\mathfrak{I}_j\}_{j=1}^{n+1}$ をもち、各 *subquotients* $\mathfrak{I}_{n-n_0-k+1}/\mathfrak{I}_{n-n_0-k}$ は次に同型である：

$$\begin{cases} C_0(\mathbb{C}^{n_0}) \otimes C^*(N) & k = 0 \\ \oplus_{n_0+1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \begin{cases} C_0(\mathbb{C}^{n_0} \times \mathbb{T}^k) \otimes \mathbb{K} \\ C_0(\mathbb{C}^{n_0} \times \mathbb{T}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}) \otimes C^*(N_{1_k}) \otimes \mathbb{K} \end{cases} & 1 \leq k \leq n - n_0 \end{cases}$$

with $0 \leq n_0 \leq n$ and $k_2 \geq 1$, $k = k_1 + k_2$. ただし、 $\mathbb{C}^{n_0}$ は N の作用による $\mathbb{C}^n$ の不動点部分空間であり、また、二者択一の最初の場合は、 $\mathbb{C}^n$ の不変部分空間 $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^k$ 上の N の作用が自由かつ遊走的であることに対応する。

注. N が半単純のとき、 $N = [N, N]$ なので、 $C^*(G) \cong C_0(\mathbb{C}^n) \otimes C^*(N)$.

特に、 $N = H_{2n+1}$ の場合は、次が成り立つ：

定理 3.2. G をリー半直積 $\mathbb{C}^{2n} \rtimes_{\beta} H_{2n+1}$, β は複素 1 次元、多重対角作用とする。このとき、 $C^*(G)$ は有限組成列 $\{\mathfrak{I}_j\}_{j=1}^K$ をもち、各 *subquotients* $\mathfrak{I}_j/\mathfrak{I}_{j-1}$ は次に同型である：

$$\begin{cases} \begin{cases} C_0(\mathbb{C}^{n_0} \times \mathbb{R}^{2n}) & j = K \\ C_0(\mathbb{C}^{n_0} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})) \otimes \mathbb{K} & j = K - 1 \end{cases} \\ \begin{cases} C_0(\mathbb{C}^{n_0} \times \mathbb{T}^k) \otimes \mathbb{K} \\ C_0(\mathbb{C}^{n_0} \times \mathbb{T}^{k_1+m_2+l_2} \times \mathbb{R}^{2n-k_1}) \otimes \mathbb{K} & \text{otherwise} \\ C_0(\mathbb{C}^{n_0} \times \mathbb{T}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}) \otimes \mathbb{K} \otimes C_0(\mathbb{R}_+, \cup_{\theta \in \mathbb{R}_+} (C(\mathbb{T}^p) \otimes (\otimes^q \mathfrak{A}_{\theta}) \otimes \mathbb{K})) \end{cases} \end{cases}$$

for $1 \leq k \leq n - n_0$ with $0 \leq n_0 \leq n$ and $k_2 \geq 1$, $k = k_1 + k_2$.

系として、

系 3.3. 定理 3.2 と同じ仮定のもとで、次がなりたつ：

$$\begin{cases} \text{sr}(C^*(G)) = n_0 + n + 1 = \dim_{\mathbb{C}} \hat{G}_1, \\ \text{csr}(C^*(G)) \leq n_0 + n + 1. \end{cases}$$

さらに一般の場合は、

系 3.4. 定理 3.1 で、 N が巾零、またはリー半直積 $\mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}$ ならば、

$$\begin{cases} \text{sr}(C^*(G)) = \dim_{\mathbb{C}} \hat{G}_1 & \text{if } \dim \hat{G}_1 \text{ is even} \\ \dim_{\mathbb{C}} \hat{G}_1 \leq \text{sr}(C^*(G)) \leq \dim_{\mathbb{C}} \hat{G}_1 + 1 & \text{if } \dim \hat{G}_1 \text{ is odd} \end{cases}$$

$$\text{csr}(C^*(G)) \leq 2 \vee \text{csr}(C_0(\hat{G}_1)) = [(\dim \hat{G}_1 + 1)/2] + 1.$$

次に、 $G = \mathbb{C}^s \rtimes_{\alpha} (\mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{T}^m)$ で、 α が直和 $\mathbb{C}^s = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}^{s_i}$ 上の複素多重次元、多重対角作用、すなわち、

$$\alpha_t = (\bigoplus_{i=1}^{n-m} \alpha_i(t_i)) \oplus (\bigoplus_{j=n-m+1}^n \alpha_j(e^{it_j})) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n(e^{it_n}) \end{pmatrix}$$

with $t = ((t_i)_{i=1}^{n-m}, (e^{it_j})_{j=n-m+1}^n) \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{T}^m$, とする。ただし、各 α_i ($1 \leq i \leq n-m$), α_i ($n-m+1 \leq i \leq n$) はそれぞれ $\mathbb{C}^{s_i}$ 上の $\mathbb{R}, \mathbb{T}$ のリー作用である。このとき、次が成り立つ：

定理 3.5. G をリー半直積 $\mathbb{C}^s \rtimes_{\alpha} (\mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{T}^m)$ で、 α は複素多重次元、多重対角作用とする。このとき、 $C^*(G)$ の有限組成列 $\{\mathcal{I}_j\}_{j=1}^K$ が存在して、各 subquotients $\mathcal{I}_j/\mathcal{I}_{j-1}$ は次に同型である：

$$\begin{cases} C_0(\mathbb{R}^{2u+n-m} \times \mathbb{Z}^m) = C_0(\hat{G}_1) & j = K, \\ \begin{cases} C_0(\mathbb{R}^{2u_j+v_j} \times \mathbb{T}^{w_j}) \otimes \mathbb{K} & \text{or} \\ C_0(\mathbb{R}^{2u_j+v_j} \times \mathbb{T}^{w_j}) \otimes \mathbb{K} \otimes (\bigotimes_{l=1}^{k_j} \mathfrak{A}_{\Theta_l}) & \text{or} \\ C_0(\mathbb{R}^{2u_j+v_j}) \otimes \mathbb{K} \otimes (\bigotimes_{l=1}^n \mathfrak{A}_{\Theta_l}) \end{cases} & 1 \leq j \leq K-1 \end{cases}$$

with $u, u_j, v_j, w_j \geq 0$, $1 \leq k_j \leq n-1$. ただし、 $\mathfrak{A}_{\Theta_l}$ は非可換トーラスの特別な場合 $C(\mathbb{T}^{t_l}) \rtimes \mathbb{Z}$ を意味する。

さらに、群がより一般の場合に、次の rank の評価式がえられる：

定理 3.6. G はリー半直積 $\mathbb{C}^s \rtimes N$ で、 N は連結巾零リー群か、リー半直積 $\mathbb{R}^m \rtimes \mathbb{R}$, さらに、 N の作用は $N/[N, N]$ の複素多重次元、多重対角作用から誘導されているとする。このとき、次がなりたつ：

$$\begin{cases} \text{sr}(C^*(G)) = \dim_{\mathbb{C}} \hat{G}_1 & \text{if } \dim \hat{G}_1 \text{ is even,} \\ \dim_{\mathbb{C}} \hat{G}_1 \leq \text{sr}(C^*(G)) \leq \dim_{\mathbb{C}} \hat{G}_1 + 1 & \text{if } \dim \hat{G}_1 \text{ is odd,} \end{cases}$$

$$\text{csr}(C^*(G)) \leq \text{csr}(C_0(\hat{G}_1)) = [(\dim \hat{G}_1 + 1)/2] + 1.$$

§4. 対角作用をもつリー半直積の場合

この章では、 G はリー半直積 $(\mathbb{R}^u \times \mathbb{C}^v) \rtimes_{\alpha} (\mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{T}^m)$ で、 α は対角作用とする。すなわち、 $\alpha_g, g = ((g_i)_{i=1}^{n-m}, (e^{ig_j})_{j=n-m+1}^n) \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{T}^m$ は次の行列の対角和で定義される：

$$\begin{pmatrix} e^{(\sum_{j=1}^{p_1} g_{i_{1j}})} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{(\sum_{j=1}^{p_u} g_{i_{uj}})} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} e^{(\sum_{j=1}^{q_1} w_{i_{1j}} g_{i_{1j}})} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{(\sum_{j=1}^{q_v} w_{i_{vj}} g_{i_{vj}})} \end{pmatrix}$$

with $g_{i_{kj}} \in \{g_i\}_{i=1}^{n-m}$ for $0 \leq j \leq p_k \leq n-m$ ($1 \leq k \leq u$), and $w_{i_{kj}} \in \mathbb{C}$, $g_{i_{kj}} \in \{g_i\}_{i=1}^n$ for $0 \leq j \leq q_k \leq n$ ($1 \leq k \leq v$). もし $g_{i_{kj}} \in \{g_i\}_{i=n-m+1}^n$ ならば、 $w_{i_{kj}} = i$.

定理 4.1. G をリー半直積 $(\mathbb{R}^u \times \mathbb{C}^v) \rtimes_{\alpha} (\mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{T}^m)$ とし、 α は対角作用とする。このとき、 $C^*(G)$ は有限組成列 $\{\mathcal{I}_j\}_{j=1}^K$ をもち、次がなりたつ：

$$\mathcal{I}_j/\mathcal{I}_{j-1} \cong \begin{cases} C_0(\mathbb{R}^{u_0+n-m} \times \mathbb{C}^{v_0} \times \mathbb{Z}^m) & j = K \\ C_0(\mathbb{R}^{p_j} \times \mathbb{T}^{q_j} \times \mathbb{Z}^{r_j} \times \Omega_j) \otimes \mathbb{K}, & \text{or} \\ C_0(\mathbb{R}^{p_j} \times \mathbb{T}^{q_j} \times \mathbb{Z}^{r_j}) \otimes \mathfrak{A}_{\Theta_j} \otimes \mathbb{K} & 1 \leq j \leq K-1 \end{cases}$$

with $p_j, q_j, r_j \geq 0$. ただし、 $\hat{\alpha}$ による不動点空間は $\mathbb{R}^{u_0} \times \mathbb{C}^{v_0}$ に同相で、各 Ω_j は軌道部分空間で、 $\hat{\alpha}$ はその上で遊走的である。また、 $\mathfrak{A}_{\Theta_j}$ は高次元非可換トーラスである。

さらに、より一般の場合に、次が成り立つ：

定理 4.2. G を $\mathbb{R}^u \times \mathbb{C}^v$ の連結リー群 N によるリー半直積で、対角作用をもつとする。このとき、 $C^*(G)$ の有限組成列 $\{\mathcal{I}_j\}_{j=1}^K$ が存在して、次がなりたつ：

$$\mathcal{I}_j/\mathcal{I}_{j-1} \cong \begin{cases} C_0(\mathbb{R}^{u_0} \times \mathbb{C}^{v_0}) \otimes C^*(N) & j = K \\ C_0(\mathbb{R}^{p_j} \times \mathbb{T}^{q_j} \times \mathbb{Z}^{r_j} \times \Omega_j) \otimes C^*(N_{z_j}) \otimes \mathbb{K} & \text{or} \\ C_0(\mathbb{R}^{p_j} \times \mathbb{T}^{q_j} \times \mathbb{Z}^{r_j}) \otimes C_r^*(W_j) \otimes \mathbb{K} & 1 \leq j \leq K-1 \end{cases}$$

with $p_j, q_j, r_j \geq 0$. ただし、 $\mathbb{R}^{u_0} \times \mathbb{C}^{v_0}$ は N の双対作用による不動点部分空間で、各 Ω_j は軌道部分空間で、 N のその上の双対作用は遊走的である。 N_{z_j} は $\mathbb{R}^u \times \mathbb{C}^v$ の N -不変部分空間の点 z_j の固定群で、 $C_r^*(W_j)$ は N -不変なトーラス上の軌道に関する *reduced* 亜群 W_j の *reduced* C^* -環である。

さらに、次がいえる：

系 4.3. 定理 4.2 で、 N が連結可零リー群か、リー半直積 $\mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}$ ならば、次が成り立つ：

$$\begin{cases} \text{sr}(C^*(G)) = \dim_{\mathbb{C}} \hat{G}_1 & \text{if } \dim \hat{G}_1 \text{ is even,} \\ \dim_{\mathbb{C}} \hat{G}_1 \leq \text{sr}(C^*(G)) \leq \dim_{\mathbb{C}} \hat{G}_1 + 1 & \text{if } \dim \hat{G}_1 \text{ is odd,} \\ \text{csr}(C^*(G)) \leq \text{csr}(C_0(\hat{G}_1)) = [(\dim \hat{G}_1 + 1)/2] + 1. \end{cases}$$