

直交射影法による

非線形推定理論

(九州大学 工学部)

辻 節三 ・ 高田 等

§ I ・ 序 論

雑音の介在する制御系の最も重要な問題の一つは，非線形制御対象の雑音に埋れた状態変数をいかに合理的に推定するかということである。

これについてはすでに Cox,⁴⁾ Athans⁵⁾ および 辻⁹⁾ などの研究が報告されている。しかしこれらの推定理論はいずれも線形系に対する理論の拡張として考えられているため，後驗確率密度関数は正規分布と仮定されている。一般の非線形系に対し，後驗確率密度関数を正規分布と仮定することは非常に大きな仮定であり，非線形度がかなり高い場合には，その特性を十分に表わし得ない。

また Balakrishnan⁶⁾⁷⁾ は，一次元連続系の非線形推定問題に対し，二乗平均最小の意味で最適な推定値が，過去および現在のすべての観測情報の多項式 および ある非線形関数

で近似される場合についての非線形推定理論を，拡張された直交射影の概念を用いて研究している。これらの提案された推定式では，時刻の経過とともに逐次的に推定値を求めることができず，しかも各時刻において具体的に推定値を計算するためには最急降下法を用いなければならない煩わしさがある。

そこで 本稿において我々は，多次元離散値系の非線形推定問題に対し，二乗平均最小の意味で最適な推定値が過去および現在の全観測情報のべき級数で表わされる場合について，非線形にまで拡張された直交射影の概念を基にして考察した。結果として，時刻の経過につれ逐次的に推定値が定まり，しかも任意の次数の多項式で近似した場合，近似次数内で常に最適になつていくような推定式を得た。

次に我々は，上記の最適推定式を具体的に適用し，観測予測誤差の二次の項までを考慮した場合の非線形フィルタの計算アルゴリズムについて考察した。この際，力学系および観測系における非線形関数については，それぞれ状態推定値および状態予測値のまわりでテーラー展開し二次の項までを考慮した。こうして得られた非線形フィルタの特長は，

- その状態推定式および共分散式が，共に現時刻の観測情報の二次の項を含んだ非線形の形で 特性の改善を計つて

いること，すなわち

- 具体的に表示することはできないが，基本的には現時刻の観測情報に基づく後驗確率密度関数に関しては，非正規分布の立場にたつて 特性の改善を計っていることである。

最後に，本稿で提案したフィルタの方が，二次近似法フィルタよりも 非線形のある範囲で優れた特性を示すことをデジタルシミュレーションによる例題結果で報告する。

§ 2. 直交射影法による最適推定式の導出

2.1 本節では， n 次元状態確率ベクトル X_k が，次の(1)式

$$y_k = g(X_k) + w_k \quad (1)$$

によつて観測される系において，状態ベクトル X_k の関数である r 次元ベクトル $h(X_k)$ を，二乗平均最小の意味で最適に推定する問題について考察する。

ただし y_k : m 次元観測ベクトル

$g(\cdot)$: m 次元非線形ベクトル値関数

w_k : m 次元雑音ベクトル

2.2 さて，観測情報の集合 $F_k = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ が与えられたとき，我々は推定誤差の二乗平均

$$EJ = E\{ (h(X_k) - \hat{h}_{k|k})^T (h(X_k) - \hat{h}_{k|k}) | F_k \} \quad (2)$$

を最小にする条件付期待値

$$\hat{h}_{K|K} = E \{ h(X_K) | \mathcal{F}_K \} \quad (3)$$

をもつて $h(X_K)$ の最適推定値と定める。

本稿では，この条件付期待値が有界な値をもち，さらに次のべき級数で表わされる場合についてのみ考察する。

$$\hat{h}_{K|K} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i_1=1}^K \sum_{i_2=1}^K \cdots \sum_{i_j=1}^K A(i_1, i_2, \dots, i_j) Z(j: i_1, i_2, \dots, i_j) + A_0 \quad (4)$$

ただし

$$(i) \quad A_0 = \sum_{p=1}^K y_p a(p) \quad (a(p): \text{確定量の実数値係数}) \quad (5)$$

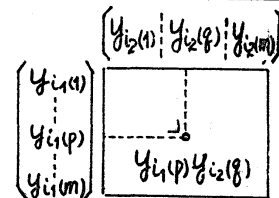
$$(ii) \quad Z(j: i_1, i_2, \dots, i_j) \quad (0 \leq j \leq \infty, 1 \leq i_1, i_2, \dots, i_j \leq K)$$

は K 時刻までの観測ベクトル y_l ($1 \leq l \leq K$) から構成されるものとする。

$$Z(1: i_1) = y_{i_1} \quad ([p] \text{ 要素に } y_{i_1(p)} \text{ をもつ一次元配列}) \quad (6)$$

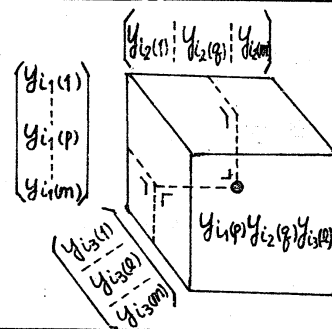
$$Z(2: i_1, i_2) = y_{i_1} y_{i_2}^T \quad (7)$$

($[p, q]$ 要素に $y_{i_1(p)} y_{i_2(q)}$)
をもつ二次元配列



$$Z(3: i_1, i_2, i_3) = \llbracket y_{i_1} y_{i_2}^T \rrbracket y_{i_3}^T \quad (8)$$

($[p, q, l]$ 要素に $y_{i_1(p)} y_{i_2(q)} y_{i_3(l)}$)
をもつ三次元配列



$$Z(j: i_1, i_2, \dots, i_j) = \llbracket \cdots \llbracket \llbracket y_{i_1} y_{i_2}^T \rrbracket y_{i_3}^T \rrbracket \cdots y_{i_{j-1}}^T \rrbracket y_{i_j}^T \quad (9)$$

($[p, q, \dots, l]$ 要素に $y_{i_1(p)} y_{i_2(q)} \cdots y_{i_j(l)}$ をもつ j 次

元配列)

(iii) $A(i_1, i_2, \dots, i_j)$ は $A(i_1, i_2, \dots, i_j) Z(j: i_1, i_2, \dots, i_j)$ のとき r 次元をもつベクトルを構成する演算子とする。

$$A(i_1) Z(1: i_1) = \sum_{p=1}^r \varphi_p \sum_{q=1}^m a(i_1, p, q) y_{i_1}(q) = A_{i_1} y_{i_1} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} A(i_1, i_2) Z(2: i_1, i_2) &= \sum_{p=1}^r \varphi_p \sum_{q, l=1}^m a(i_1, i_2, p, q, l) y_{i_1}(q) y_{i_2}(l) \\ &= \sum_{p=1}^r \varphi_p \operatorname{tr} [A_{i_1 i_2 p} (y_{i_1} y_{i_2}^T)] \end{aligned} \quad (11)$$

$$A(i_1, i_2, \dots, i_j) Z(j: i_1, i_2, \dots, i_j) = \sum_{p=1}^r \varphi_p \sum_{q, \dots, l=1}^m a(i_1, i_2, \dots, i_j, p, q, \dots, l) \underbrace{y_{i_1}(q) \cdots y_{i_j}(l)}_{j \text{ 個}} \quad (12)$$

ここで

φ_p : p 行のみ 1 で他はすべて零のベクトル

$y_{i_1}(q)$: y_{i_1} の q 行要素

$a(i_1, i_2, \dots, i_j, p, q, \dots, l)$: 確定量の実数値係数

A_{i_1} : $r \times m$ 行列, $A_{i_1 i_2 p}$: $m \times m$ 行列

2.3 まず $B(i_1, i_2, \dots, i_j)$ を $A(i_1, i_2, \dots, i_j)$ と同じ構造をもち各要素はすべて確定量実数値とし, さらに B_0 を A_0 と同じ構造をもち各要素はすべて確定量実数値とする。ここで確率変数の集合

$$\{ Z(j: i_1, i_2, \dots, i_j) : 1 \leq j \leq \infty, 1 \leq i_1, i_2, \dots, i_j \leq K \}$$

のすべての $B(i_1, i_2, \dots, i_j)$ およびすべての B_0 による線形結合

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i_1=1}^K \sum_{i_2=1}^K \cdots \sum_{i_j=1}^K B(i_1, i_2, \dots, i_j) Z(j: i_1, i_2, \dots, i_j) + B_0 \quad (13)$$

によつて張られる閉線形多様体⁸⁾を $\mathcal{Y}_{(K)}$ と定義する。

さて $\mathcal{Y}_{(K)}$ の任意の要素である $\hat{h} \in \mathcal{Y}_{(K)}$ は (4) 式と同じ記号を用いて次のように表わされる。

$$\hat{h} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i_1=1}^K \sum_{i_2=1}^K \cdots \sum_{i_j=1}^K A(i_1, i_2, \dots, i_j) Z(j; i_1, i_2, \dots, i_j) + A_0 \quad (14)$$

以下 (14) 式について考察する。

2.4 (14) 式を見かけ上 現時刻の観測情報 y_K についてのべき級数に記述しなおせば

$$\begin{aligned} \hat{h} = & \sum_{p=1}^r \psi_p \underline{a_K(p)} + \sum_{p=1}^r \psi_p \sum_{q=1}^m \underline{a(K, p, q)} y_K(q) \\ & + \sum_{p=1}^r \psi_p \sum_{q, l=1}^m \underline{a(K, K, p, q, l)} y_K(q) y_K(l) + \cdots \\ & + \sum_{p=1}^r \psi_p \sum_{q, \dots, l=1}^m \underline{a(K, \dots, K, p, q, \dots, l)} y_K(q) \cdots y_K(l) \quad (15) \\ & + \cdots \end{aligned}$$

となる。ただし

$$\begin{aligned} \underline{a_K(p)} &= a(p) + \sum_{i_1=1}^{K-1} \sum_{q=1}^m a(i_1, p, q) y_{i_1}(q) + \sum_{i_1=1}^{K-1} \sum_{i_2=1}^{K-1} \sum_{q, l=1}^m a(i_1, i_2, p, q, l) y_{i_1}(q) y_{i_2}(l) + \cdots \\ \underline{a(K, p, q)} &= a(K, p, q) + \sum_{i_1=1}^{K-1} \sum_{l=1}^m a(i_1, K, p, q, l) y_{i_1}(l) \\ &\quad + \sum_{i_2=1}^{K-1} \sum_{l=1}^m a(K, i_2, p, q, l) y_{i_2}(l) + \cdots \\ \underline{a(K, K, p, q, l)} &= a(K, K, p, q, l) + \cdots \end{aligned}$$

ここで

- (i) $\underline{A_K}$ をすべての要素が $K-1$ 時刻までの観測情報によつて定まる いわゆる $\mathcal{Y}_{(K-1)}$ 可測な関数 $\underline{a_K(p)}$ ($1 \leq p \leq r$) からなる r 次元ベクトル $\underline{A_K} = \sum_{p=1}^r \psi_p \underline{a_K(p)}$ と定義する。

(ii) $\underbrace{A(k, \dots, k)}_{\text{ℓ 個}} \quad (1 \leq \ell \leq \infty)$ を $\underbrace{A(k, \dots, k)}_{\text{ℓ 個}}$ と同じ構造をもつ演算子で，各要素は $\mathcal{Y}_{(k-1)}$ 可測な関数

$$\underbrace{A(k, \dots, k, p, q_1, \dots, q_\ell)}_{\text{ℓ 個}} \quad (1 \leq p \leq r, 1 \leq q_1, \dots, q_\ell \leq m)$$

からなるものと定義する。これらを用いれば (15) 式は

$$\begin{aligned} \hat{h} = & \underline{A}_k + \underline{A(k)} \underline{Z(1:k)} + \underline{A(k,k)} \underline{Z(2:k,k)} + \dots \\ & + \underbrace{\underline{A(k, \dots, k)}}_{\text{j 個}} \underline{Z(j:k, \dots, k)} + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

と記述することができる。

2.5 次に (16) 式の各項が $\mathcal{Y}_{(k-1)}$ の条件付のもとで互いに直交するように変形し， $\mathcal{Y}_{(k-1)}$ の条件付のもとでの直交基底を求める。このため $\mathcal{Y}_{(k-1)}$ 可測な関数 $d_k(\cdot)$ を，(15) 式に対し互いに相殺される次の形で導入する。ただし $d_k(\cdot)$ はいまは未知量であるけれども，直交化のための係数として後に定められる量である。

$$\begin{aligned} \hat{h} = & \sum_{p=1}^r \psi_p \left\{ \underline{a_k(p)} - \sum_{q_1=1}^m \frac{\underline{a'(k, p, q_1)}}{\text{j 個}} d_k(q_1:0) - \sum_{q_1, q_2=1}^m \frac{\underline{a'(k, k, p, q_1, q_2)}}{\text{j 個}} d_k(q_1, q_2:0) \right. \\ & \left. - \dots - \sum_{q_1, \dots, q_j=1}^m \frac{\underline{a'(k, \dots, k, p, q_1, \dots, q_j)}}{\text{j 個}} d_k(q_1, \dots, q_j:0) - \dots \right\} \\ & + \sum_{p=1}^r \psi_p \sum_{q_1=1}^m \frac{\underline{a'(k, p, q_1)}}{\text{j 個}} \left[\mathcal{Y}_k(q_1) + d_k(q_1:0) \right] \\ & + \sum_{p=1}^r \psi_p \sum_{q_1, q_2=1}^m \frac{\underline{a'(k, k, p, q_1, q_2)}}{\text{j 個}} \left[\mathcal{Y}_k(q_1) \mathcal{Y}_k(q_2) + \sum_{l_1=1}^m d_k(q_1, q_2: l_1) \mathcal{Y}_k(l_1) \right. \\ & \left. + d_k(q_1, q_2:0) \right] \\ & + \dots \\ & + \sum_{p=1}^r \psi_p \sum_{q_1, \dots, q_j=1}^m \frac{\underline{a'(k, \dots, k, p, q_1, \dots, q_j)}}{\text{j 個}} \left[\mathcal{Y}_k(q_1) \dots \mathcal{Y}_k(q_j) \right. \\ & \left. + \sum_{s=1}^{j-1} \sum_{l_1, \dots, l_s=1}^m d_k(q_1, \dots, q_j: l_1, \dots, l_s) \mathcal{Y}_k(l_1) \dots \mathcal{Y}_k(l_s) + d_k(q_1, \dots, q_j:0) \right]_{(17)} \\ & + \dots \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} \overbrace{a'(k, \dots, k, p, q_1, \dots, q_t)}^{t \text{ 個}} &= \overbrace{a(k, \dots, k, p, q_1, \dots, q_t)}^{t \text{ 個}} \\ &- \sum_{l_1, \dots, l_{t+1}=1}^m \overbrace{a'(k, \dots, k, p, l_1, \dots, l_{t+1})}^{t+1 \text{ 個}} d_K(l_1, \dots, l_{t+1}; q_1, \dots, q_t) \\ &- \dots - \sum_{l_1, \dots, l_j=1}^m \overbrace{a'(k, \dots, k, p, l_1, \dots, l_j)}^{j \text{ 個}} d_K(l_1, \dots, l_j; q_1, \dots, q_t) \\ &- \dots \end{aligned}$$

ここで

(i) $d_K(q_1, q_2, \dots, q_p; 0)$ ($1 \leq p \leq \infty$) を $(q_1, q_2, \dots, q_p)$ 要素にもつ P 次元配列を $D(p, K, 0)$ ($1 \leq p \leq \infty$) とする。

(ii) $\sum_{l_1, \dots, l_s=1}^m d_K(q_1, \dots, q_p; l_1, \dots, l_s) y_K(l_1) \dots y_K(l_s)$ ($1 \leq p \leq \infty, 1 \leq s \leq p-1$) を $(q_1, q_2, \dots, q_p)$ 要素にもつ P 次元配列 $D(p, K, S) Z(S; \overbrace{K, \dots, K}^{S \text{ 個}})$ を構成するような演算子を $D(p, K, S)$ とする。

(iii) (17) 式のオ一項括弧内を $\underline{a'_K(p)}$ とおきオ一項を

$$\underline{A'_K} = \sum_{p=1}^r \varphi_p \underline{a'_K(p)} \text{ とする。}$$

(iv) $\overbrace{A(k, \dots, k)}^{l \text{ 個}}$ ($1 \leq l \leq \infty$) と同じ構造をもち各要素は $y_{(K-1)}$ 可測な関数 $\overbrace{a'(k, \dots, k, p, q_1, \dots, q_l)}^{l \text{ 個}}$ ($1 \leq p \leq r, 1 \leq q_1, \dots, q_l \leq m$) からなる演算子を $\overbrace{A'(k, \dots, k)}^{l \text{ 個}}$ とする。

これらを用いれば (17) 式は次の (18) 式のようにになる。

$$\begin{aligned} \hat{h} &= \underline{A'_K} + \underline{A'(K)} [Z(1; K) + D(1, K, 0)] \\ &+ \underline{A'(K, K)} [Z(2; K, K) + D(2, K, 1) Z(1; K) + D(2, K, 0)] \\ &+ \dots + \overbrace{A'(K, \dots, K)}^{j \text{ 個}} [Z(j; \overbrace{K, \dots, K}^{j \text{ 個}}) + \sum_{s=1}^{j-1} D(j, K, S) Z(S; \overbrace{K, \dots, K}^{S \text{ 個}}) + D(j, K, 0)] \quad (18) \\ &+ \dots \end{aligned}$$

次に (18) 式の括弧内を

$$\xi(K, l) = Z(l; \overbrace{K, \dots, K}^{l \text{ 個}}) + \sum_{s=1}^{l-1} D(l, K, S) Z(S; \overbrace{K, \dots, K}^{S \text{ 個}}) + D(l, K, 0) \quad (19)$$

($1 \leq l \leq \infty$)

とおき, 次の (20), (21) 式の条件

$$E\{\xi_{(K,l)} \mid \mathcal{Y}_{(K-1)}\} = 0 \quad (1 \leq l \leq \infty) \quad (20)$$

$$E\{\xi_{(K,p)} \otimes \xi_{(K,q)} \mid \mathcal{Y}_{(K-1)}\} = 0 \quad (1 \leq p, q \leq \infty, p \neq q)^* \quad (21)$$

を満足するような $D(l, K, r)$ および $D(l, K, 0)$ を定める。従つてここで前に未知としておいた $d_K(\cdot)$ が定義 (i), (ii) により定まる。結局, $\mathcal{Y}_{(K-1)}$ の条件付のもとでは こうして求められた $\xi_{(K,l)} \quad (1 \leq l \leq \infty)$ と $\mathcal{Y}_{(K-1)}$ 可測な関数が直交基底をつくることになる。

次に 直交基底の (19) 式を (18) 式に代入すれば

$$\hat{h} = \underline{A}_K + \underline{A}'_{(K)} \xi_{(K,1)} + \underline{A}'_{(K,K)} \xi_{(K,2)} + \cdots + \underline{A}'_{(K,\dots,K)}^{\text{j 個}} \xi_{(K,j)} + \cdots \quad (22)$$

となる。さて ここで現在の時刻 K を固定して考える。

時刻 K を固定すれば K より前の時刻において得られた観測情報はすべて既知量である。そこで $\{y_1, y_2, \dots, y_{K-1}\}$ をここでは確定した量と考え, y_K すなわち $\{\xi_{(K,l)} : 1 \leq l \leq \infty\}$ のみを確率変数と考えることにすれば, $\mathcal{Y}_{(K-1)}$ 可測な関数はすべて確定量とみなして取り扱うことができる。

また $\underline{B}_{(K,l)}$ を $\underline{A}'_{(K,\dots,K)}^{\text{l 個}}$ と同じ構造をもち 各要素はすべて $\mathcal{Y}_{(K-1)}$ 可測な関数と考え, さらに $\underline{B}_K$ を $\underline{A}_K$ と同じ構造

* l 次元配列 $\xi_{(K,l)}$ の $(t_1, t_2, \dots, t_l)$ 要素を $\eta_K(t_1, t_2, \dots, t_l)$ と表わすならば $\xi_{(K,p)} \otimes \xi_{(K,q)}$ は $(t_1, t_2, \dots, t_p, t'_1, t'_2, \dots, t'_q)$ 要素が $\eta_K(t_1, t_2, \dots, t_p) \times \eta_K(t'_1, t'_2, \dots, t'_q)$ で表わされる $p+q$ 次元配列を意味する。

をもち各要素はすべて $\mathcal{Y}_{(K-1)}$ 可測な関数と考える。

よつてここで (22) 式に注目すれば (13) 式によつて張られた $\mathcal{Y}_{(K)}$ は見方を変えるならば 確率変数の集合 $\{\xi_{(K,l)} : 1 \leq l \leq \infty\}$ のすべての $\underline{B}_{(K,l)}$ および すべての $\underline{B}_K$ による線形結合 $\sum_{j=1}^{\infty} \underline{B}_{(K,j)} \xi_{(K,j)} + \underline{B}_K$ によつて張られる閉線形多様体と考えることができる。また各 $\xi_{(K,l)} (1 \leq l \leq \infty)$ に対しすべての $\underline{B}_{(K,l)} (1 \leq l \leq \infty)$ により形成される線形結合 $\underline{B}_{(K,l)} \xi_{(K,l)} (1 \leq l \leq \infty)$ によつて張られた閉線形多様体を $\mathcal{Z}_{(K)}^l (1 \leq l \leq \infty)$ と定義すれば, 閉線形多様体の性質により $\mathcal{Y}_{(K-1)}$ の条件付のもとで

$$\mathcal{Y}_{(K)} = \mathcal{Y}_{(K-1)} + \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{Z}_{(K)}^j \quad (23)$$

と表わすことができる。

さて, 我々の最適推定値に対する仮定 (4) 式と直交射影の性質により 求める最適推定式は, (23) 式で示される $\mathcal{Y}_{(K)}$ 上への $\hat{h}_{K|K}$ の直交射影

$$\hat{h}_{K|K} = \hat{h}_{K|K-1} + \sum_{j=1}^{\infty} C_{(K,j)} \xi_{(K,j)} \quad (24)$$

として表わされる。ただし $\hat{h}_{K|K-1}$ および $C_{(K,l)} (1 \leq l \leq \infty)$ はそれぞれ集合 $\{\underline{B}_K\}$ および $\{\underline{B}_{(K,l)}\} (1 \leq l \leq \infty)$ の要素のうち評価 (2) 式を最小にするものである。

この最適推定式 (24) は, 任意の有限次数 N の

$$\hat{h}_{K|K} = \hat{h}_{K|K-1} + \sum_{j=1}^N C_{(K,j)} \xi_{(K,j)} \quad (25)$$

で近似された場合においても，直交射影の性質により，常にその次数内で最適になつている。

§ 3. $N=2$ の場合の最適推定式

3.1 本節では (25) 式の最適推定式の具体的導出方法を明らかにするため，特に

(A. 1) $N=2$ で打ち切り

(A. 2) 観測予測誤差 $\varepsilon_{k|k-1} = y_k - \hat{y}_{k|k-1}$ の 1 次から 4 次までのモーメントが，それぞれ正規分布 $N(\varepsilon_{k|k-1}: 0, S_{k|k-1})^*$ のモーメントと一致する， $(\hat{y}_{k|k-1} = E(y_k | y_{(k-1)}), S_{k|k-1} = \text{Cov}(y_k y_k | y_{(k-1)}))$

場合について考察する。(25) 式より $N=2$ の場合は

$$\hat{h}_{k|k} = \hat{h}_{k|k-1} + \sum_{j=1}^2 C(k, j) \xi(k, j) \quad (26)$$

となる。ここで (26) 式より 2 項に対し，(17) 式の 2 項と (10) 式の右辺，および (17) 式の 3 項と (11) 式の右辺に注目すれば

$$\hat{h}_{k|k} = \hat{h}_{k|k-1} + \alpha_k \xi_{k1} + \sum_{i=1}^r \gamma_i \text{tr}(\beta_{ki} \xi_{k2}) \quad (27)$$

となる。ただし $\xi_{k1} = \xi(k, 1)$ ， $\xi_{k2} = \xi(k, 2)$ で

α_k : 各要素が $y_{(k-1)}$ 可測な関数の $r \times m$ 行列

β_{ki} : 各要素が $y_{(k-1)}$ 可測な関数の $m \times m$ 行列 ($1 \leq i \leq r$)

* $N(X:Y, Z)$ は確率変数 X が正規分布をし，その平均値が Y で，共分散が Z であることを示す。

3.2 ξ_{K1} と ξ_{K2} の具体的導出(i) (19) 式の $l=1$ と (6) 式より

$$\xi_{K1} = Z(1:K) + D(1,K,0) = y_K + D(1,K,0) \quad (28)$$

となる。(28) 式に (20) 式の条件を適用すれば (A.2) より

$$0 = E[\xi_{K1} | y_{(K-1)}] = \hat{y}_{K|K-1} + D(1,K,0) \quad \therefore D(1,K,0) = -\hat{y}_{K|K-1}$$

$$\text{となり} \quad \xi_{K1} = y_K - \hat{y}_{K|K-1} = \varepsilon_{K|K-1} \quad (29)$$

となる。

(ii) (19) 式の $l=2$ と (7) 式および (17) 式より

$$\begin{aligned} \xi_{K2} &= Z(2:K, K) + D(2,K,1) Z(1:K) + D(2,K,0) \\ &= y_K y_K^T + \sum_{i,j=1}^m \varphi_i \varphi_j^T \sum_{q=1}^m d_K(i,j;q) y_K(q) + D(2,K,0) \end{aligned} \quad (30)$$

となる。これを変形した

$$\xi_{K2} = \varepsilon_{K|K-1} \varepsilon_{K|K-1}^T + \sum_{i,j=1}^m \varphi_i \varphi_j^T \sum_{q=1}^m d'_K(i,j;q) \varepsilon_{K|K-1}(q) + D'(2,K,0) \quad (31)$$

に, (A.2) を用いて (20) 式の条件を適用すれば

$$0 = E[\xi_{K2} | y_{(K-1)}] = S_{K|K-1} + D'(2,K,0) \quad \therefore D'(2,K,0) = -S_{K|K-1} \quad (32)$$

となる。次に (31) 式の条件を適用すればすべての

 $\varepsilon_{K|K-1}(p)$ ($1 \leq p \leq m$) に対して

$$\begin{aligned} 0 &= E[\varepsilon_{K|K-1}(p) \xi_{K2} | y_{(K-1)}] = \sum_{i,j=1}^m \varphi_i \varphi_j^T \sum_{q=1}^m d'_K(i,j;q) S_{K|K-1}^{pq} \\ \therefore d'_K(i,j;q) &= 0 \quad (33) \quad (\text{ただし } S_{K|K-1}^{pq} \text{ は } S_{K|K-1} \text{ の } p \text{ 行 } q \text{ 列要素}) \end{aligned}$$

となる。ゆえに (32) 式と (33) 式より (31) 式は

$$\xi_{K2} = (y_K - \hat{y}_{K|K-1})(y_K - \hat{y}_{K|K-1})^T - S_{K|K-1} = \varepsilon_{K|K-1} \varepsilon_{K|K-1}^T - S_{K|K-1} \quad (34)$$

となる。

3.3 α_k と β_{ki} の具体的導出

評価 (2) 式に (27) 式を代入すれば次のようになる。

$$EJ = E \| h(x_k) - \hat{h}_{k|k-1} - \alpha_k \tilde{z}_{k1} - \sum_{i=1}^r \varphi_i \text{tr}(\beta_{ki} \tilde{z}_{k2}) \|^2 \quad (35)$$

$$= \sum_{i=1}^r E (h^i(x_k) - \hat{h}_{k|k-1}^i - \alpha_{ki} \tilde{z}_{k1} - \text{tr}(\beta_{ki} \tilde{z}_{k2}))^2 \quad (36)$$

ただし $h^i(x_k)$: ベクトル $h(x_k)$ の i 行要素

$\hat{h}_{k|k-1}^i$: ベクトル $\hat{h}_{k|k-1}$ の i 行要素

α_{ki} : 行列 α_k の i 行横ベクトル

(i) (35) 式を α_k で偏微分し零とおけば

$$\begin{aligned} \partial EJ / \partial \alpha_k &= -2 E [\{ h(x_k) - \hat{h}_{k|k-1} - \alpha_k \tilde{z}_{k1} - \sum_{i=1}^r \varphi_i \text{tr}(\beta_{ki} \tilde{z}_{k2}) \} \tilde{z}_{k1}^T] \\ &= -2 [E(h(x_k) \tilde{z}_{k1}^T) - \alpha_k E(\tilde{z}_{k1} \tilde{z}_{k1}^T)] = 0 \quad ((20), (21) \text{ 式使用}) \end{aligned}$$

となる。ここで (29) 式と (A. 2) を用いれば

$$\alpha_k = E(h(x_k) \tilde{z}_{k1}^T | \mathcal{Y}_{(k-1)}) S_{k|k-1}^{-1} \quad (37)$$

となる。

(ii) (36) 式を β_{ki} で偏微分し零とおけば

$$\begin{aligned} \partial EJ / \partial \beta_{ki} &= -2 E [\{ h^i(x_k) - \hat{h}_{k|k-1}^i - \alpha_{ki} \tilde{z}_{k1} - \text{tr}(\beta_{ki} \tilde{z}_{k2}) \} \tilde{z}_{k2}^T] \\ &= -2 [E(h^i(x_k) \tilde{z}_{k2}^T) - E(\text{tr}(\beta_{ki} \tilde{z}_{k2}) \tilde{z}_{k2}^T)] = 0 \quad ((20), (21) \text{ 式使用}) \end{aligned}$$

となる。ここで (34) 式と (A. 2) を用いれば (付 2) 式より

$$\beta_{ki} = 1/2 S_{k|k-1}^{-1} E[h^i(x_k) \tilde{z}_{k2} | \mathcal{Y}_{(k-1)}] S_{k|k-1}^{-1} \quad (1 \leq i \leq r) \quad (38)$$

となる。

ゆえに (A. 1) (A. 2) の場合の最適推定式は (27) 式に (29)

(34), (37), (38) 式を代入することにより具体的に定まる。

§ 4・直交射影法による非線形フィルタの導出

4・1 本節では次の非線形差分方程式で表わされる系について考察する。

$$\text{力学系} : X_{k+1} = f(X_k) + V_k \quad (n \text{ 次元ベクトル}) \quad (39)$$

$$\text{観測系} : y_k = g(X_k) + W_k \quad (m \text{ 次元ベクトル}) \quad (40)$$

ただし

$f(\cdot), g(\cdot)$: 各々, n, m 次元非線形ベクトル値関数

V_k, W_k : 各々, n, m 次元不規則雑音ベクトル

$$E V_k = 0, E W_k = 0, E V_k V_l^T = C_V(k) \delta_{kl}, E W_k W_l^T = C_W(k) \delta_{kl}$$

$$E V_k W_l^T = 0 \quad (V_k, W_k \text{ 共に状態値 } X_k \text{ には独立})$$

4・2 本節で行なう考慮および仮定

(A. 1) 力学系および観測系の非線形項については, 二次のテーラー展開近似法により近似する。

(A. 2) 状態推定値および推定共分散の計算については (25) 式の最適推定式に従い求めることにし, この際の観測情報については二次の項まで考慮する。

(A. 3) (A. 2) より状態推定誤差については非正規分布の立場にたっているが, 状態予測および観測予測の予測誤差については繰り返し計算の煩雑さを避けるため, 文献 (5), (9), (10)

に従つて次の正規分布を仮定する。

$$e_{k|k-1} = x_k - \hat{x}_{k|k-1} \sim \mathcal{N}(e_{k|k-1} : 0, P_{k|k-1}) \quad (41)$$

$$(\text{ただし } \hat{x}_{k|k-1} = E(x_k | y_{(k-1)}), P_{k|k-1} = \text{Cov}(x_k, x_k | y_{(k-1)}))$$

$$e_{k|k-1} = y_k - \hat{y}_{k|k-1} \sim \mathcal{N}(e_{k|k-1} : 0, S_{k|k-1}) \quad (42)$$

(A. 4)* 状態推定計算の際に現われる状態予測誤差については

4次モーメントまで考慮する。

4. 3 二次のテーラー展開近似法

(39) 式の $f(x_k)$ および (40) 式の $g(x_k)$ をそれぞれ $\hat{x}_{k|k} = E(x_k | y_{(k)})$ および $\hat{x}_{k|k-1}$ の近傍でテーラー展開し二次の項まで考慮すれば

$$x_{k+1} = A_k + B_k e_{k|k} + \sum_{i=1}^n \varphi_i e_{k|k}^T C_{ki} e_{k|k} + v_k \quad (\text{ただし } e_{k|k} = x_k - \hat{x}_{k|k}) \quad (43)$$

$$y_k = D_k + G_k e_{k|k-1} + \sum_{i=1}^m \varphi_i e_{k|k-1}^T H_{ki} e_{k|k-1} + w_k \quad (\text{ただし } e_{k|k-1} = x_k - \hat{x}_{k|k-1}) \quad (44)$$

ただし

$$A_k = f(x_k) \Big|_{x_k = \hat{x}_{k|k}} \quad B_k = \frac{\partial f(x_k)}{\partial x_k^T} \Big|_{x_k = \hat{x}_{k|k}} \quad C_{ki} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^i(x_k)}{\partial x_k \partial x_k^T} \Big|_{x_k = \hat{x}_{k|k}} \quad (1 \leq i \leq n) \quad (45)$$

$$D_k = g(x_k) \Big|_{x_k = \hat{x}_{k|k-1}} \quad G_k = \frac{\partial g(x_k)}{\partial x_k^T} \Big|_{x_k = \hat{x}_{k|k-1}} \quad H_{ki} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g^i(x_k)}{\partial x_k \partial x_k^T} \Big|_{x_k = \hat{x}_{k|k-1}} \quad (1 \leq i \leq m) \quad (46)$$

$$f^i(x_k), g^i(x_k) : \text{各々 } f(x_k), g(x_k) \text{ の } i \text{ 行要素} \quad (1 \leq i \leq m)$$

* (A. 1) から (A. 3) の近似を行なつているので非線形の程度が高い場合にはこの時点において綿密に計算アルゴリズムを組んでも、その際現われる高次モーメントは実際とはかなり違つた値を示すことになる。

4.4 計算アルゴリズム

本節における (A.2) の仮定と (A.3) の仮定の (42) 式は，それぞれ才3節の仮定 (A.1) と (A.2) に相当する。それゆえ本節における最適推定式としては，才3節で求められている結果そのものであり，以後これを用いる。（付録参照）

4.4.1 現在の時刻を K とする。状態予測分布は (A.3) より

$$p(x_k | y_{(k-1)}) = \mathcal{N}(x_k : \hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}) \quad (47)$$

の正規分布で与えられている。

4.4.2 観測予測値は (44) 式と (47) 式より

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k|k-1} &= E(y_k | y_{(k-1)}) = E[D_k + G_k e_{k|k-1} + \sum_{i=1}^m \psi_i e_{k|k-1}^T H_{ki} e_{k|k-1} + W_k | y_{(k-1)}] \\ &= D_k + \sum_{i=1}^m \psi_i \text{tr}(H_{ki} P_{k|k-1}) \end{aligned} \quad (48)$$

となる。観測予測誤差は (44) 式と (48) 式より

$$e_{k|k-1} = y_k - \hat{y}_{k|k-1} = G_k e_{k|k-1} + \sum_{i=1}^m \psi_i (e_{k|k-1}^T H_{ki} e_{k|k-1} - \text{tr}(H_{ki} P_{k|k-1})) + W_k \quad (49)$$

となる。観測予測共分散は (49) 式と (47) 式より

$$S_{k|k-1} = E(e_{k|k-1} e_{k|k-1}^T | y_{(k-1)}) = G_k P_{k|k-1} G_k^T + 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \psi_i \psi_j^T \text{tr}(H_{ki} P_{k|k-1} H_{kj} P_{k|k-1}) + Q_k \quad (50)$$

となる。よつて (A.3) より状態予測分布は

$$p(y_k | y_{(k-1)}) = \mathcal{N}(y_k : \hat{y}_{k|k-1}, S_{k|k-1}) \quad (51)$$

として定まる。

4.4.3 最適推定式 (27) を適用して状態推定値 $\hat{x}_{k|k}$ を決定するため

$$h(X_k) = X_k \quad (h^i(X_k) = x_k^i \quad (1 \leq i \leq n)) \quad (52)$$

とおく。

(i) (37) 式に (29) 式および (52) 式を代入すれば

$$\alpha_k = E[X_k E_{k|k-1}^T | \mathcal{Y}_{(k-1)}] S_{k|k-1}^{-1} \quad (53)$$

となる。ここで $E_{k|k-1}$ に (49) 式を代入し (47) 式を用いれば

$$\alpha_k = P_{k|k-1} G_k^T S_{k|k-1}^{-1} \quad (54)$$

となる。

(ii) (38) 式に (34) 式および (52) 式を代入すれば

$$\beta_{ki} = 1/2 S_{k|k-1}^{-1} E[x_k^i (E_{k|k-1} E_{k|k-1}^T - S_{k|k-1}) | \mathcal{Y}_{(k-1)}] S_{k|k-1}^{-1} \quad (55)$$

となる。ここで $E_{k|k-1}$ に (49) 式を代入し (47) 式を用いれば

$$\beta_{ki} = S_{k|k-1}^{-1} \left[\left(\sum_{j=1}^m \varphi_j \varphi_j^T P_{k|k-1} H_{kj} P_{k|k-1} G_k^T \right) + \left(\sum_{j=1}^m \varphi_j \varphi_j^T P_{k|k-1} H_{kj} P_{k|k-1} G_k^T \right)^T \right] S_{k|k-1}^{-1} \quad (56)$$

となる。ゆえに最適推定式は

$$\hat{X}_{k|k} = \hat{X}_{k|k-1} + P_{k|k-1} G_k^T S_{k|k-1}^{-1} (y_k - \hat{y}_{k|k-1}) + \sum_{i=1}^n \varphi_i \text{tr} \{ \beta_{ki} \{ (y_k - \hat{y}_{k|k-1})(y_k - \hat{y}_{k|k-1})^T - S_{k|k-1} \} \} \quad (57)$$

となる。ただし β_{ki} は (56) 式の値である。

4.4.4 最適推定式(57)を適用して推定共分散 $P_{k|k}$ を決定する。

このため

$$h(X_k) = x_k^i x_k^j \quad (58)$$

とおき，まず $E(x_k^i x_k^j | \mathcal{Y}_{(k)})$ を定める。

(i) (37) 式に (29) 式および (58) 式を代入すれば

$$\alpha_k^{[ij]} = E[x_k^i x_k^j E_{k|k-1}^T | \mathcal{Y}_{(k-1)}] S_{k|k-1}^{-1} \quad (59)$$

となる。ここで $E_{k|k-1}$ に (49) 式を代入し (47) 式を用いれば

$$\alpha_k^{[ij]} = (2 \sum_{l=1}^m \varphi_l^T [P_{k|k-1} H_{kl} P_{k|k-1}]_{ij} + (\hat{\chi}_{k|k-1}^i \varphi_j^T + \hat{\chi}_{k|k-1}^j \varphi_i^T) P_{k|k-1} \Gamma_k^T) S_{k|k-1}^{-1} * \quad (60)$$

となる。

(ii) (38) 式に (34) 式および (58) 式を代入すれば

$$\beta_k^{[ij]} = 1/2 S_{k|k-1}^{-1} E[\chi_k^i \chi_k^j (E_{k|k-1} E_{k|k-1}^T - S_{k|k-1}) | \mathcal{Y}_{(k-1)}] S_{k|k-1}^{-1} \quad (61)$$

となる。ここで $E_{k|k-1}$ に (49) 式を代入し (47) 式を用いれば

$$\begin{aligned} \beta_k^{[ij]} = 1/2 S_{k|k-1}^{-1} \{ \Gamma_k \{ P_{k|k-1}^i P_{k|k-1}^j + P_{k|k-1} (\varphi_i \varphi_j^T + \varphi_j \varphi_i^T) P_{k|k-1} \} \Gamma_k^T \\ + P_{k|k-1} (C_{W(k)} - S_{k|k-1}) + \hat{\chi}_{k|k-1}^i \Theta_{kj} + \hat{\chi}_{k|k-1}^j \Theta_{ki} \} S_{k|k-1}^{-1} \end{aligned} \quad (62)$$

となる。ただし

$$\Theta_{kl} = 2 \left[\sum_{g=1}^m \varphi_g \varphi_g^T P_{k|k-1} H_{kg} P_{k|k-1} \Gamma_k^T \right]^T + 2 \left[\sum_{g=1}^m \varphi_g \varphi_g^T P_{k|k-1} H_{kg} P_{k|k-1} \Gamma_k^T \right] \quad (63)$$

$$(iii) \hat{h}_{k|k-1}^{[ij]} \triangleq E[\chi_k^i \chi_k^j | \mathcal{Y}_{(k-1)}] = P_{k|k-1}^{ij} + \hat{\chi}_{k|k-1}^i \hat{\chi}_{k|k-1}^j$$

(iv) (i), (ii), (iii) により (27) 式に従って

$$\begin{aligned} \hat{h}_{k|k}^{[ij]} &\triangleq E[\chi_k^i \chi_k^j | \mathcal{Y}_{(k)}] \\ &= \hat{h}_{k|k-1}^{[ij]} + \alpha_k^{[ij]} \bar{z}_{k1} + \text{tr}(\beta_k^{[ij]} \bar{z}_{k2}) \end{aligned} \quad (64)$$

が定まる。ここで共分散の定義式

$$P_{k|k}^{ij} = E[\chi_k^i \chi_k^j | \mathcal{Y}_{(k)}] - \hat{\chi}_{k|k}^i \hat{\chi}_{k|k}^j \quad (65)$$

に (64) 式を代入すれば、求める $P_{k|k}$ は

$$\begin{aligned} P_{k|k}^{ij} &= P_{k|k-1}^{ij} + \hat{\chi}_{k|k-1}^i \hat{\chi}_{k|k-1}^j + \alpha_k^{[ij]} (\mathcal{Y}_k - \hat{\mathcal{Y}}_{k|k-1}) \\ &\quad + \text{tr}[\beta_k^{[ij]} \{ (\mathcal{Y}_k - \hat{\mathcal{Y}}_{k|k-1})(\mathcal{Y}_k - \hat{\mathcal{Y}}_{k|k-1})^T - S_{k|k-1} \}] - \hat{\chi}_{k|k}^i \hat{\chi}_{k|k}^j \end{aligned} \quad (66)$$

を i 行 j 列にもつ行列として定まる。

ただし $\hat{\chi}_{k|k}^i \hat{\chi}_{k|k}^j$ は (57) 式の i 行と j 行の積のうち (A・2) の

* $[A]_{ij}$ は行列 A の i 行 j 列要素を示す。

仮定より観測情報の二次の項で打ち切られたものであり、
また $\alpha_k^{[ij]}$ および $\beta_k^{[ij]}$ はそれぞれ (60) 式および (62) 式の
値である。

4.4.5 逐次推定計算を可能ならしめるため $\hat{X}_{k+1|k}$ と $P_{k+1|k}$ を求め
る。この場合、 $P_{k+1|k}$ の計算に必要な状態推定誤差の高
次モーメントは (27) 式の最適推定式から求めることができ
る。しかしこの繰り返し計算の説明では煩雑さを避ける
ために $N(X_k: \hat{X}_{k|k}, P_{k|k})$ を仮定する。(43) 式に対し、

$$N(X_k: \hat{X}_{k|k}, P_{k|k})$$

を用いれば 4.4.2 の計算手順と全く同様にして

$$\hat{X}_{k+1|k} = A_k + \sum_{i=1}^n \varphi_i \operatorname{tr}(C_{ki} P_{k|k}) \quad (67)$$

$$P_{k+1|k} = B_k P_{k|k} B_k^T + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi_i \varphi_j^T \operatorname{tr}(C_{ki} P_{k|k} C_{kj} P_{k|k}) + C_v(k) \quad (68)$$

を得る。よつて (A.3) および (67), (68) 式より (47) 式に対
応する $K+1$ 時刻の状態予測分布

$$p(X_{k+1} | Y_{(k)}) = N(X_{k+1}: \hat{X}_{k+1|k}, P_{k+1|k}) \quad (69)$$

が定まる。かくして先験分布

$$p(X_1 | Y_{(0)}) = N(X_1: \hat{X}_{1|0}, P_{1|0}) \quad (70)$$

が与えられれば 4.4.1 から 4.4.5 に従い逐次推定計算がで
きることになる。Fig. 1 に逐次推定の流れ図を示す。

4・5 具体例 (非線形2次元系)

$$\begin{aligned} \text{力学系} \quad & \begin{cases} x_1(k+1) = 0.5x_1(k) + x_1^2(k) + x_1^3(k) + x_1^4(k) + 0.5x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{観測系} \quad & \begin{cases} y_1(k) = x_1(k) + x_1^2(k) + x_1^3(k) + x_1^4(k) + x_2(k) + w_1(k) \\ y_2(k) = x_2(k) + w_2(k) \end{cases} \end{aligned}$$

評価基準 (30回サンプルシーケンスの平均値)

$$J_k = \frac{1}{30} \sum_{i=1}^{30} [(X_{(k)} - \hat{X}_{(k|k)})^T (X_{(k)} - \hat{X}_{(k|k)})]_{(i)}$$

評価改善率 (10段階過程における評価 $\sum_{k=1}^{10} J_k$ の比較)

$$\eta = \frac{(\text{Athans の } \sum_{k=1}^{10} J_k) - (\text{Orthogonal の } \sum_{k=1}^{10} J_k)}{(\text{Athans の } \sum_{k=1}^{10} J_k)} \times 100 \quad (\%)$$

ただし

(1) Orthogonal Filter : 本稿で提案したフィルタ

(2) Athans Filter : 辻⁹⁾(Athans⁵⁾の二次近似法フィルタ

Fig. 2 は先験共分散 $P_{1/0} = x_1^2(1) I \cdot \alpha$ (I : 単位行列) の α をパラメータにし, 初期真値 $x_1(1) = x_2(1)$ を変化させた場合の η のグラフである。ただし $\hat{x}_{1/0} = 0$, $EW(k) = 0$, $C_w(k) = (x_1^2(1)/100) \cdot I$ を選んだ。

Fig. 3 および Fig. 4 は Fig. 2 で $x_1(1) = x_2(1) = 0.15$ $P_{1/0} = 2.25 \times 10^{-4}$ のときの真値と推定値の差の二乗のカーブであり, Fig. 3 は $x_1(\cdot)$, Fig. 4 は $x_2(\cdot)$ についてのものである。

さて, Orthogonal Filter とエルミート多項式展開による¹⁰⁾ フィルタを比較した場合, 本例題においては, 各場合につい

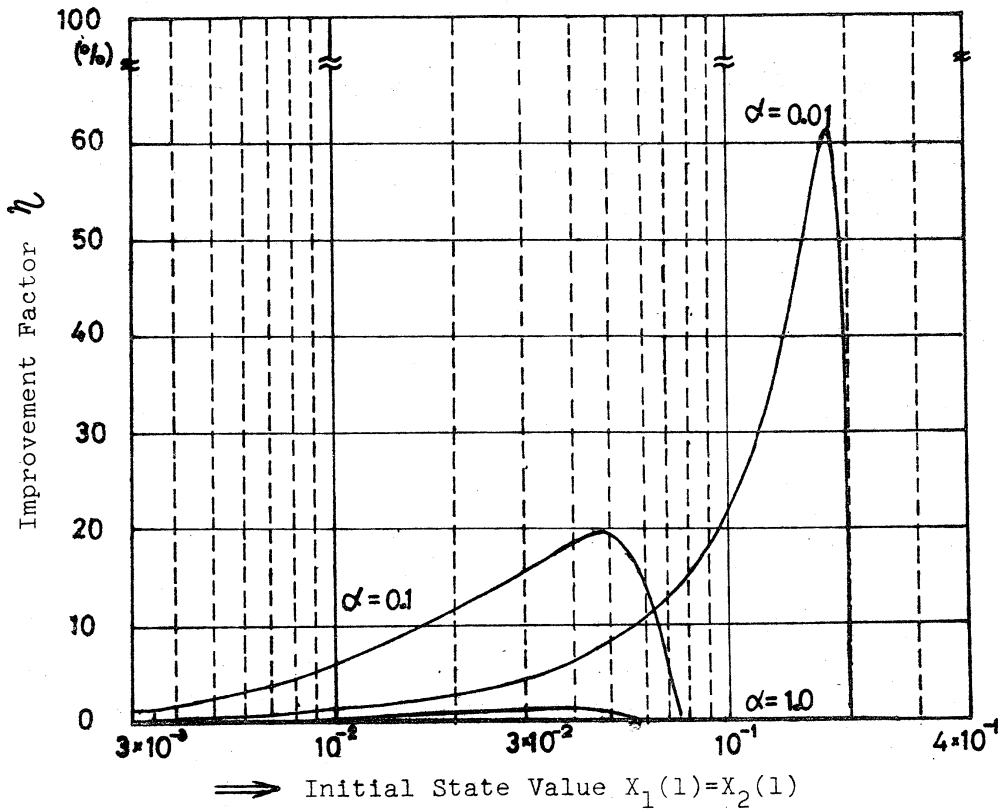


Fig.2 Improvement Factor η of the Orthogonal Filter as compared with Athans Filter versus the Initial State Value $X_1(1)=X_2(1)$ when α is the Parameter of A Priori Covariance $P_{1/0}=X_1^2(1) \cdot I \cdot \alpha$

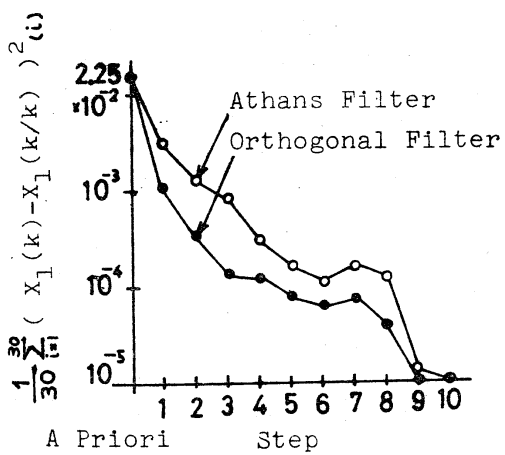


Fig.3 Variation of $X_1(\bullet)$ Estimation Errors When $X_1(1)=X_2(1)=0.15$ and $P_{1/0}=2.25 \times 10^{-4} \times I$

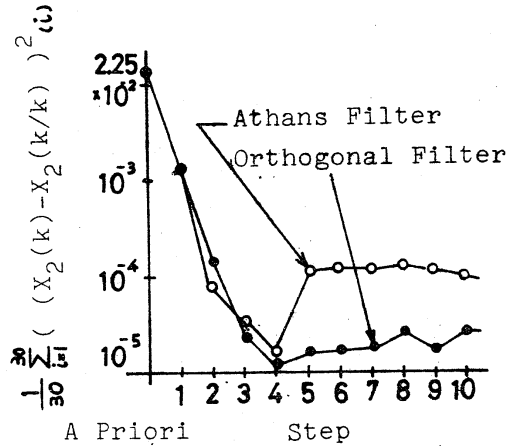


Fig.4 Variation of $X_2(\bullet)$ Estimation Errors when $X_1(1)=X_2(1)=0.15$ and $P_{1/0}=2.25 \times 10^{-4} \times I$

て両者の評価値 $\sum_{j=1}^{20} J_j$ がほぼ一致し評価の改善は望めなかつた。

我々はこれらのシミュレーションに対し，九州大学大型計算機 FACOM 230-60 を使用した。

§ 5 ・ 結 言

以上多次元離散値系の非線形推定理論について考察した。

本稿においては最適推定式が，過去および現在の全観測情報のべき級数で表わされる場合について，非線形にまで拡張した直交射影の概念を基にして考察した。その結果，時刻の経過につれ逐次的に推定値が定まり，しかも任意の次数の多項式で近似した場合，近似次数内で常に最適になつていような最適推定式を導出した。

次に現時刻の観測情報については二次の項まで考慮し，さらに系の非線形項については二次のテーラー展開近似法を用いた場合の非線形フィルタの計算アルゴリズムを導出した。さらに，具体例により本稿のフィルタと二次近似法フィルタを比較した。

さて，一般に非線形推定においては，後驗確率密度関数は非正規分布となるので 観測情報についてのより一般的な非線形関数⁶⁾⁷⁾を用いた推定機構の研究も重要と思われる。

<< 参 考 文 献 >>

- (1) R.E.Kalman : A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, Trans.ASME Ser.D.J.Basic Engrg., pp35/45 (1960)
- (2) R.E.Kalman & R.S.Bucy : New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, Trans.ASME Ser.D.J.Basic Engrg., pp95/108 (1961)
- (3) J.S.Meditch: Orthogonal Projection and Discrete Optimal Linear Smoothing, SIAM Control, Vol.5, No.1, pp74/89 (1967)
- (4) H.Cox : On the Estimation of State Variables and Parameters for Noisy Daynamic Systems, IEEE Trans. Automatic Control, AC-9, pp5/12 (1964)
- (5) M.Athans et al : Suboptimal State Estimation for Continuous-Time Nonlinear Systems from Discrete Noisy Measurements, JACC, pp364/381 (1968)
- (6) A.V.Balakrishnan : A General Theory of Nonlinear Estimation Problems in Control Systems, J.Math.Anal.Appl., Vol.8, pp4/30 (1964)
- (7) A.V.Balakrishnan : On a Class of Nonlinear Estimation Problems, IEEE Trans. Information Theory, Vol.IT-10, pp314/320 (1964)
- (8) J.L.Doob : Stochastic Processes, John Willy, New York (1955)
- (9) 辻・熊丸 : 非線形系状態推定法による系同定 ; 数理解析研究所講究録 90 , 制御過程論 (II) , 京大数理解 pp45/98 (1970)
- (10) 辻・高田 : 観測予測誤差の多次項をも用いた非線形フィルタについて , 才 2 回統計的制御理論シンポジウム講演論文集 , 日本自動制御協会 pp49/52 (1970)

<< 付 録 >>

正規分布 $N(X:0,P)$ に対する公式 (A, B : 対称行列)

- (1) $E(X^T A X X^T B X) = 2 \operatorname{tr}(A P B P) + \operatorname{tr}(A P) \operatorname{tr}(B P)$
- (2) $E((\operatorname{tr} A X X^T) X X^T) = \operatorname{tr}(A P) P + 2 P A P$
- (3) $E(X_i X_j X^T A X) = (\operatorname{tr} A P) P_{ij} + 2 [P A P]_{ij}$
- (4) $E(X_i X_j X X^T) = P_{ij} P + P(\varphi_i \varphi_j^T + \varphi_j \varphi_i^T) P$