

同種粒子系における量子もつれについて

東京大学大学院理学系研究科 佐々木 寿彦 (Toshihiko Sasaki)

Department of Physics, Graduate School of Science, The University of Tokyo

近畿大学総合理工学研究科オープンリサーチセンター 市川 翼 (Tsubasa Ichikawa)

Research Center for Quantum Computing, Interdisciplinary Graduate School of Science and
Engineering, Kinki University

高エネルギー加速器研究機構 素粒子原子核研究所 理論部 筒井 泉 (Izumi Tsutsui)

Theory Center, Institute of Particle and Nuclear Studies, High Energy Accelerator Research
Organization (KEK)

1 始めに

量子力学の大きな特徴の一つとして、同種粒子の存在がある。また、もう一つの大きな特徴として、エンタングルメントの存在がある。しかし、これら 2 つの要素は注意深く扱わないと、一見矛盾した結果を引き起こす。このようなことは最近いくつかのグループによって議論されている [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]。

まず、どのような問題があるのかを述べるため、以下では簡単のために、同種粒子のうち反対称粒子のみを扱うことにする¹。通常、量子力学においてエンタングルメントは状態が直積でかけるかかけないかで定義される。例えば、2 体系状態 $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ がエンタングルしているというのは、

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle |\psi_2\rangle \quad (1)$$

を満たすような $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ が存在しないということで定義される。一方で、反対称粒子は、反対称化演算子 A で不変な反対称状態で記述される。反対称状態の特徴として、決して直積では書けないということがある [8]。よってここから、反対称粒子は必ずエンタングルしているという結論が導かれる。これは、エンタングルメントを量子情報的な処理を行う資源とする、量子情報の文脈で考えるとおかしな話になる。つまり、反対称粒子は存在するだけでエンタングルしているので、一見、無限の資源を使うことができるように見える。また、場の量子論の文脈でも、クラスター分解定理では、遠方で独立に生成された粒子は相関を持たないことが保証されている。我々は、この問題に対する [6, 7] の処方箋を修正し、一般の多体多部分系に適用可能な枠組みにした [9]。本稿では、相関の立場からエンタングルメントの定義を見直すことにより、これらの矛盾を取り除くような枠組みを議論する。

2 エンタングルメントの再定義

この節では、エンタングルメントの定義を変更する。なお、ここからしばらくは同種粒子系ではなく、通常考えられている 2 体の異種粒子系を考察する。異種粒子系における 2 体のオペレーターとして、

$$O_1 \otimes O_2 = (O_1 \otimes 1)(1 \otimes O_2) \quad (2)$$

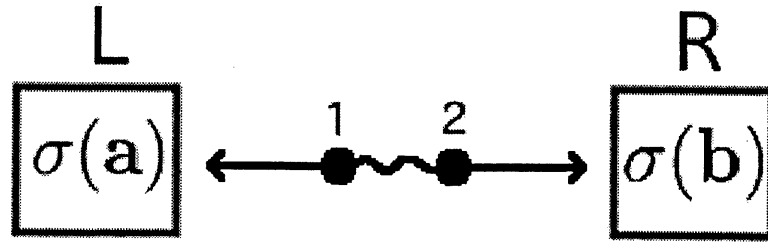


図1 Bellの不等式の実験

を考える。この式の右辺は、2体に対する作用を1体に対する作用に分解したものとして解釈できる。この分解を用いて以下の”相関の分離”を考える。

定義 1. 相関の分離 (異種粒子)

状態 $|\psi\rangle$ が相関の分離を満たすというのは任意のオペレーター O_1, O_2 に対して、期待値に関する式

$$\langle\psi|O_1 \otimes O_2|\psi\rangle = \langle\psi|O_1 \otimes 1|\psi\rangle \langle\psi|1 \otimes O_2|\psi\rangle \quad (3)$$

が成立すること。

状態が直積で書けるということと、相関の分離を満たすことは同値である。よって、異種粒子系においてはエンタングルメントを相関の分離で定義してもよい。この相関の分離は、以下のようにして Bell の不等式の実験と関連づけることができる。

具体的には、スピン $\frac{1}{2}$ 粒子の2体系における CHSH 型の不等式を考える。実験の構成としては、図1を考える。つまり、スピン $\frac{1}{2}$ の2粒子を遠くはなれた観測装置 (測定軸をそれぞれ $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ とする) で観測するという状況を考える。この実験に対して、以下のような2通りの予想をすることができる。

1. 局所实在論

離れたところで行われる一方の観測がもう一方の観測に影響を与えず、物理的实在が存在すると仮定し、隠れた変数の理論が適用できるとする。このとき、左と右の観測結果 (値は ± 1) は隠れた変数 λ によって、それぞれ $A(\mathbf{a}, \lambda), B(\mathbf{b}, \lambda)$ とおくことができ、左と右の装置の値の相関関数は λ の確率分布 $\rho(\lambda)$ によって、

$$C_{LRT}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \int d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) B(\mathbf{b}, \lambda) \quad (4)$$

と計算することができる。 $\mathbf{a}', \mathbf{b}'$ をそれぞれ左と右の装置の別の測定軸とすると、上の相関関数を組み合わせて

$$|C_{LRT}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - C_{LRT}(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + C_{LRT}(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + C_{LRT}(\mathbf{a}', \mathbf{b}')| \quad (5)$$

という値を定義することができる。これは、以下のような計算により、上限が2で抑えられる。

$$\begin{aligned} & |C_{LRT}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - C_{LRT}(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + C_{LRT}(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + C_{LRT}(\mathbf{a}', \mathbf{b}')| \\ &= \left| \int d\lambda \rho(\lambda) \left(A(\mathbf{a}, \lambda) B(\mathbf{b}, \lambda) - A(\mathbf{a}, \lambda) B(\mathbf{b}', \lambda) + A(\mathbf{a}', \lambda) B(\mathbf{b}, \lambda) + A(\mathbf{a}', \lambda) B(\mathbf{b}', \lambda) \right) \right| \\ &\leq \int d\lambda \rho(\lambda) \left| A(\mathbf{a}, \lambda) B(\mathbf{b}, \lambda) - A(\mathbf{a}, \lambda) B(\mathbf{b}', \lambda) + A(\mathbf{a}', \lambda) B(\mathbf{b}, \lambda) + A(\mathbf{a}', \lambda) B(\mathbf{b}', \lambda) \right| \quad (6) \end{aligned}$$

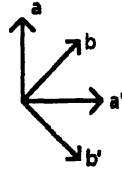


図2 測定軸のとり方

$$\begin{aligned}
 & \left| A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda) - A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}', \lambda) + A(\mathbf{a}', \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda) + A(\mathbf{a}', \lambda)B(\mathbf{b}', \lambda) \right| \\
 & \leq \left| A(\mathbf{a}, \lambda)(B(\mathbf{b}, \lambda) - B(\mathbf{b}', \lambda)) \right| + \left| A(\mathbf{a}', \lambda)(B(\mathbf{b}, \lambda) + B(\mathbf{b}', \lambda)) \right| \\
 & \leq \left| B(\mathbf{b}, \lambda) - B(\mathbf{b}', \lambda) \right| + \left| B(\mathbf{b}, \lambda) + B(\mathbf{b}', \lambda) \right| \quad (\because |A(\mathbf{a}, \lambda)| \leq 1, |A(\mathbf{a}', \lambda)| \leq 1) \\
 & \leq \max(2|B(\mathbf{b}, \lambda)|, 2|B(\mathbf{b}', \lambda)|) \\
 & \leq 2 \quad (\because |B(\mathbf{b}, \lambda)| \leq 1, |B(\mathbf{b}', \lambda)| \leq 1)
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\therefore |C_{LRT}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - C_{LRT}(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + C_{LRT}(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + C_{LRT}(\mathbf{a}', \mathbf{b}')| \leq 2 \tag{8}$$

2. 量子論

$\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ をパウリ行列とすると、 $\mathbf{a}$ 軸方向の測定は、 $\sigma(\mathbf{a}) := \sigma \cdot \mathbf{a}$ と表すことができる。このとき、

$$O_{CHSH} := \sigma(\mathbf{a}) \otimes \sigma(\mathbf{b}) - \sigma(\mathbf{a}) \otimes \sigma(\mathbf{b}') + \sigma(\mathbf{a}') \otimes \sigma(\mathbf{b}) + \sigma(\mathbf{a}') \otimes \sigma(\mathbf{b}') \tag{9}$$

を定義すると、

$$|\langle \psi | O_{CHSH} | \psi \rangle| \tag{10}$$

は物理的には $|\psi\rangle$ に対する (5) と同じ値を表している。しかし、状態を

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2) \tag{11}$$

にし、測定軸を図2にするという条件で計算すると、

$$\langle \psi | O_{CHSH} | \psi \rangle = 2\sqrt{2} \tag{12}$$

となる。

これは、量子論が局所实在論に収まらないことを示しており、実際に実験で確かめられている [10]。

特に、もし状態が相関の分離を満たすならば、

$$\langle \psi | \sigma(\mathbf{a}) \otimes \sigma(\mathbf{b}) | \psi \rangle = \langle \psi | \sigma(\mathbf{a}) \otimes \mathbb{1} | \psi \rangle \langle \psi | \mathbb{1} \otimes \sigma(\mathbf{b}) | \psi \rangle \tag{13}$$

となるので、局所实在論での式変形 (7) と同様にして、(10) の値は 2 より小さくなるということがわかる。つまり、相関の分離 (3) を満たす状態はこの議論の中では局所实在論的な状態と区別がつかない。これが、相関の分離と Bell 不等式との関係である。

繰り返しになるが、異種粒子系においては、状態が直積で書けることと相関の分離を満たすことは同値である。しかし、状態が直積でかけるかどうかという基準をそのまま同種粒子系にもちこむと最初の節で述べたような問題があるが、次節以降示すように、相関の分離は同種粒子系に自然に拡張することができる。

3 反対称粒子系への拡張

同種粒子系での議論に移る前に、異種粒子系での議論を見直す。図1のBellの不等式の実験を考えると、観測装置は離れた2地点にあることがわかる。この位置を状態 $|L\rangle, |R\rangle$ で表すことにすると、実際には

$$O_1 \otimes O_2 \rightarrow O_1 |L\rangle_{11} \langle L| \otimes O_2 |R\rangle_{22} \langle R| \quad (14)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow, L\rangle_1 |\downarrow, R\rangle_2 - |\downarrow, L\rangle_1 |\uparrow, R\rangle_2) \quad (15)$$

と書くべきであった。しかし、この $|L\rangle, |R\rangle$ は、1番目の粒子には必ず $|L\rangle$ がつき、2番目の粒子には必ず $|R\rangle$ がつくというだけで、期待値に影響を及ぼすものではなかった。

この考察を踏まえて、今までの議論を反対称粒子系に拡張する。まず、反対称化演算子 A を、全体系での恒等演算子 $\mathbb{1}_{12}$ と置換演算子 π_{12}

$$\mathbb{1}_{12} |\psi_1\rangle_1 |\psi_2\rangle_2 = |\psi_1\rangle_1 |\psi_2\rangle_2 \quad (16)$$

$$\pi_{12} |\psi_1\rangle_1 |\psi_2\rangle_2 = |\psi_2\rangle_1 |\psi_1\rangle_2 \quad (17)$$

を用いて、

$$A := \frac{1}{2} (\mathbb{1}_{12} - \pi_{12}) \quad (18)$$

と定義する。同種粒子性を考慮すると、Bellの不等式の実験でのオペレーターは

$$O_1 |L\rangle \langle L| \otimes O_2 |R\rangle_{22} \langle R| \rightarrow \begin{cases} O_1 |L\rangle_{11} \langle L| \otimes O_2 |R\rangle_{22} \langle R| + O_2 |R\rangle_{22} \langle R| \otimes O_1 |L\rangle_{11} \langle L| \\ A (O_1 |L\rangle_{11} \langle L| \otimes O_2 |R\rangle_{22} \langle R|) A \end{cases} \quad (19)$$

というものが考えられる。1行目のものは、作用が2粒子に同等にかかるということを考慮したもので、2行目のものは、作用の前後の状態はどちらも反対称状態であるということを考慮したもの。ただし、これら2つは反対称状態に対する期待値に対しては違いがないので、今回の議論ではどちらを選んでも同じである。よって、これ以降2行目のものを使うことにする。

次に、同種粒子系における相関の分離を考えるために、2体に対する作用を1体に対する作用に分解することを考える。ここで問題になるのは、同種粒子は本質的に区別ができないのでどのようにして1体に対する作用を定義するのかということである。しかし、現在考えている実験の構成では、2粒子は別々の位置で測定されることになっているので、どちらの位置にあるかということを標識にして1体に対する作用に対応するもの考えることができる。例えば、

$$A (O_1 |L\rangle_{11} \langle L| \otimes \mathbb{1} |R\rangle_{22} \langle R|) A \quad (20)$$

は、 $|L\rangle$ の粒子に O_1 という作用を及ぼし、他方の粒子にはなにもしないと解釈することができる。以後、式の簡略化のために

$$O_L := O_1 |L\rangle \langle L| \quad (21)$$

$$O_R := O_2 |R\rangle \langle R| \quad (22)$$

$$\mathbb{1}_L := \mathbb{1} |L\rangle \langle L| \quad (23)$$

$$\mathbb{1}_R := \mathbb{1} |R\rangle \langle R| \quad (24)$$

表 1 異種粒子系と反対称粒子系とその一般化との比較

異種粒子系	反対称粒子系 (L, R)	反対称粒子系 (2 体, 一般)	反対称粒子系 (多体多部分)
オペレーター	オペレーター	オペレーター	オペレーター
$O_L \otimes O_R (= O_a)$	$MA(O_L \otimes O_R)A (= O_a)$	$MA(O_1 \otimes O_2)A (= O_a)$	$\mathcal{O}$
$1_L \otimes O_R (= O_b)$	$MA(1_L \otimes O_R)A (= O_b)$	$MA(1_1 \otimes O_2)A (= O_b)$	$\mathcal{O}_1$
$O_L \otimes 1_R (= O_c)$	$MA(O_L \otimes 1_R)A (= O_c)$	$MA(O_1 \otimes 1_2)A (= O_c)$	$\vdots$
オペレーターの分解	オペレーターの分解	オペレーターの分解	オペレーターの分解
$O_a = O_b O_c$	$O_a = O_b O_c$	$O_a = O_b O_c$	$\mathcal{O} = \prod_{i=1}^m \mathcal{O}_i$
相関の分離	相関の分離	相関の分離	相関の分離
$\langle \psi O_a \psi \rangle = \langle \psi O_b \psi \rangle \langle \psi O_c \psi \rangle$	$\langle \psi O_a \psi \rangle = \langle \psi O_b \psi \rangle \langle \psi O_c \psi \rangle$	$\langle \psi O_a \psi \rangle = \langle \psi O_b \psi \rangle \langle \psi O_c \psi \rangle$	$\langle \psi \mathcal{O} \psi \rangle = \prod_{i=1}^m \langle \psi \mathcal{O}_i \psi \rangle$
相関の分離を満たす状態	相関の分離を満たす状態	相関の分離を満たす状態	相関の分離を満たす状態
$ \alpha, L\rangle \beta, R\rangle$	$\sqrt{MA} \alpha, L\rangle \beta, R\rangle$	$\sqrt{MA} \psi_1\rangle \psi_2\rangle$ $ \psi_1\rangle \in V_1, \psi_2\rangle \in V_2$	$\sqrt{M(\Gamma)} A \otimes_{i=1}^m \psi_i\rangle$ $ \psi_i\rangle \in V_i^{\otimes \Gamma_i }$

と、定義する。また、

$$A(1_L \otimes 1_R)A \quad (25)$$

は、両方に対してなにもしないという作用と解釈することができる。実際には、この作用がこの系の状態に変化を与えないためには、規格化因子 $M = 2$ が必要である。

$$A(1_L \otimes 1_R)A \rightarrow MA(1_L \otimes 1_R)A \quad (26)$$

このような定義のもとで、反対称粒子に対するオペレーターには

$$MAO_L \otimes O_R A = \{MA(O_L \otimes 1_R)A\} \{MA(1_L \otimes O_R)A\} \quad (27)$$

という関係があることを示すことができる。

この関係を用いて、反対称粒子における相関の分離を定義できる。

定義 2. 相関の分離 (反対称粒子)

状態 $|\psi\rangle$ が相関の分離を満たすというのは、任意のオペレーター O_1, O_2 に対して、期待値に関する式

$$\langle \psi | MA(O_L \otimes O_R)A | \psi \rangle = \langle \psi | MA(O_L \otimes 1_R)A | \psi \rangle \langle \psi | MA(1_R \otimes O_L)A | \psi \rangle \quad (28)$$

が成立すること。ただし、 $O_L, O_R, 1_L, 1_R$ の定義は、(21)(22)(23)(24) による。

相関の分離を定義したあとに出てくる最大の問題は、この相関の分離を満たす状態、つまり異種粒子系での直積状態に対応する状態は一般的にどのような状態かということである。それは、

$$|\psi\rangle = \sqrt{MA} |\alpha, L\rangle_1 |\beta, R\rangle_2 \quad (29)$$

であることが示せる。ここで、 $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ はスピン $\frac{1}{2}$ 系の任意の状態である。

ここまでの状況をまとめると、表 1 の左側 2 列のようになる。

表を見れば分かるように、以上のようにして構成した反対称粒子系での議論は異種粒子系の議論と非常に似ている。さらに言えば、異種粒子系で粒子 1, 粒子 2 といったところを、粒子 L, 粒子 R にかえたものが反対称粒子系での議論ということになる。このような同等性を考える上でわかりやすい例としては、CHSH オペレーターを (19) の方法で反対称粒子系のものにしたとき最大に破れる状態は、

$$\sqrt{MA} \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow, L\rangle_1 |\downarrow, R\rangle_2 - |\downarrow, L\rangle_1 |\uparrow, R\rangle_2) \quad (30)$$

であるということがある。異種粒子系での対応する状態は、(15)であった。この状態 (30) は位置とスピンを分離して書くと

$$\frac{|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|L\rangle_1 |R\rangle_2 + |R\rangle_1 |L\rangle_2}{\sqrt{2}} \quad (31)$$

となる。従って、スピンの部分のみに注目すれば、標準的な Bell の不等式の議論に用いられるスピンの一重項状態と同じである。

4 拡張

ここまで行ってきた議論を整理すると、より一般の形へ自然に拡張することができる。まず、2 体系の場合を抽象的な形で整理することにする。1 体系のヒルベルト空間を $\mathcal{H}$ としたときの、反対称粒子 2 体系のヒルベルト空間を $A(\mathcal{H}^{\otimes 2})$ と書くことにする。 $|\alpha, L\rangle$ や $|\beta, R\rangle$ に対応するものとして、 $\mathcal{H}$ の直交部分空間 V_1, V_2 を考える。

$$V_1 \perp V_2, \quad V_1 \cup V_2 \subset \mathcal{H} \quad (32)$$

そして、 $O_L, O_R, \mathbb{1}_L, \mathbb{1}_R$ に対応するものとして、

$$O_1 : V_1 \text{ 上のオペレーター} \quad (33)$$

$$O_2 : V_2 \text{ 上のオペレーター} \quad (34)$$

$$\mathbb{1}_1 : V_1 \text{ 上の恒等演算子} \quad (35)$$

$$\mathbb{1}_2 : V_2 \text{ 上の恒等演算子} \quad (36)$$

²を定義する。すると、その構造は表 1 の右から 2 列目にまとめられる。

このようにまとめ直せば、 N 体の反対称粒子系が m 部分系に分かれる場合への一般化は以下のように行える。まず、1 体系のヒルベルト空間を $\mathcal{H}$ とすると、全体の系は $A(\mathcal{H}^{\otimes N})$ となる。ここで、 A は N 体系の反対称化演算子で、

$$A = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in S_N} \text{sgn}(\sigma) \pi_\sigma, \quad S_N : \text{対称群}, \pi_\sigma : \text{対称群の作用}, \text{sgn}(\sigma) : \sigma \text{ の符号} \quad (37)$$

と表示される。次に、1 体系を m 個の直交部分空間 $V_i (i = 1, \dots, m)$ に分割する。

$$V_i \perp V_j (i \neq j), \quad \bigcup_{i=1}^m V_i \subset \mathcal{H} \quad (38)$$

今回は、部分系への分解を考えるために、 N の分割 Γ を用意する。

$$\Gamma = \{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}, \quad \Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset (i \neq j), \quad \bigcup_{i=1}^m \Gamma_i = \{1, \dots, N\} \quad (39)$$

また、 Γ に対応する規格化因子 $M(\Gamma)$ を

$$M(\Gamma) := \frac{N!}{\prod_{i=1}^m |\Gamma_i|!} \quad |\Gamma_i| : \Gamma_i \text{ の要素数} \quad (40)$$

と定義する。

そして、 $V_i^{\otimes |\Gamma_i|}$ 上のオペレーター、恒等演算子、状態を $O_i, \mathbb{1}_i, |\psi_i\rangle$ とする。これらを用いて、全体のオペレーター $\mathcal{O}$ と部分系のオペレーター $\mathcal{O}_i (i = 1, \dots, m)$ を

$$\mathcal{O} := M(\Gamma)A \left(\bigotimes_{i=1}^m O_i \right) A \quad (41)$$

$$\mathcal{O}_i := M(\Gamma)A \left\{ \left(\bigotimes_{j=1}^{i-1} \mathbb{1}_j \right) \otimes O_i \otimes \left(\bigotimes_{j=i+1}^m \mathbb{1}_j \right) \right\} A \quad (42)$$

と、定義する。すると、この構造は、表 1 の一番右側の列となり、一般化が行えたことがわかる。

5 まとめ

相関の分離を手がかりにしながら Bell の不等式に用いられる 2 粒子系の考察を同種粒子系に拡張し、異種粒子系と同等な構造を同種粒子系にも見出すことができた。ここで、本質的な役割を果たしたのは直交部分空間 V_i である。同種粒子系では粒子の区別がなくなることによる困難があるが、この V_i を粒子の区別の代わりに用いることで、異種粒子系での議論を再現することができている。 V_i の物理的意味は、 $|L\rangle, |R\rangle$ を入れた理由からもわかるように、実験装置の制限ということになる。しかし、 V_i は状態に内在的なものではない。異種粒子系の場合に直積でエンタングルメントを定義していた時には、状態だけを見ればエンタングルメントしているかどうかを判別することができたのに対して、同種粒子系の場合の V_i を用いたエンタングルメントの定義は状態だけを見てもエンタングルメントを判別できない。言い換えれば、どのような実験装置を考えるかでエンタングルしているかどうかが変わってくるということになる。

この議論のもう一つの見方としては、 V_i を粒子の区別だと思ふことで、異種粒子での議論を同種粒子の系に適用することができるというものである。実際の実験で用いられるのは光子に代表されるように同種粒子が圧倒的に多い。他方、理論での議論はほとんどの場合、異種粒子を前提にしたものである。しかし、今回導入した構造によって、同種粒子系に異種粒子系の議論を適用する正当性が得られる。

このような観点でみると、通常同種粒子を用いた実験では、なにか V_i を固定した上で今回議論した構造のみを考えていることになる。反対称粒子として使える最も一般的な空間は、 V_i によって制限された空間よりも広い。この広さを用いてなにか面白いことができるのか、それとも V_i で制限された構造で行うこと以上のことはできないのかということは興味深い問題である。

Notes

¹ 対称粒子でも同様の議論が成立する。

² 前節までの O_1, O_2 とは違うもの。

参考文献

- [1] John Schliemann, J. Ignacio Cirac, Marek Kuś, Maciej Lewenstein and Daniel Loss, Quantum correlations in two-fermion systems, *Phys. Rev. A* **64** (2001) 022303.
- [2] Y. S. Li, B. Zeng, X. S. Liu, and G. L. Long, Entanglement in a two-identical-particle system, *Phys. Rev. A* **64** (2001) 054302.

- [3] K. Eckert, J. Schliemann, D. Bruß and M. Lewenstein, Quantum correlations in systems of indistinguishable particles, *Ann. Phys.* **299** (2002) 88-127.
- [4] R. Paskauskas and L. You, Quantum correlations in two-boson wave functions, *Phys. Rev.* **A64** (2001) 042310.
- [5] H. M. Wiseman and J. A. Vaccaro, Entanglement of Indistinguishable Particles Shared between Two Parties, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 097902.
- [6] GianCarlo Ghirardi and Luca Marinatto, General criterion for the entanglement of two indistinguishable particles, *Phys. Rev.* **A70** (2004) 012109.
- [7] G.-C. Ghirardi, L. Marinatto and T. Weber, Entanglement and Properties of Composite Quantum Systems: a Conceptual and Mathematical Analysis, *J. Stat. Phys.* **108** (2002) 49.
- [8] Tsubasa Ichikawa, Toshihiko Sasaki, Izumi Tsutsui, Nobuhiro Yonezawa, Exchange Symmetry and Multipartite Entanglement, *Phys. Rev.* **A78** (2008) 052105
- [9] Tsubasa Ichikawa, Toshihiko Sasaki, Izumi Tsutsui, Separability of N-particle Fermionic States for Arbitrary Partitions, quant-ph/0910.1658
- [10] A. Aspect, J. Dalibard and G. Roger, *Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers*, *Phys. Rev. Lett.* **49**(1982)1804.