

Elementary submodel と Stone-Čech コンパクト化

防衛大 加藤昭男 (Akio Kato)

"Elementary submodel" の概念は ロジック に関しては非常に重要な本質的であるが、最近 Dow [1] と Bandlow [2] により、これが General Topology に応用され成功をおさめた。この小論文では elementary submodel を用いて Stone-Čech remainder $\omega^* = \beta\omega \setminus \omega$ が次の形に分割されることを示す。

定理 1. ω^* は 2^c 個の、互いに non-homeomorphic な countably compact, dense subspaces C_α , of card. $\leq c$ に分割される:

$$\omega^* = \bigoplus_{\alpha < 2^c} C_\alpha.$$

しかも、各 C_α は、 $\bigoplus_{\beta < \alpha} C_\beta$ の中に embed されない。

($\oplus$ は 単に disjoint union を表す。)

この構成を更に精妙にすれば 各 C_α は どの C_γ ($\gamma > \alpha$) の中にさえも embed されたいようにできるが、この解説は後の機会にゆずる。ただ注意していただきたいのは、どの C_α も "Tail" $\bigoplus_{\alpha < \gamma < 2^c} C_\gamma$ の中には embed 可能である、ということである。実際、 ω^* は 2^c 個の disjoint copies of ω^* を含むことから 任意の subset $X \subseteq \omega^*$ with $|X| < 2^c$ に対し $\omega^* \setminus X$ は copy of ω^* を含むことがわかる。よって、どの "tail" も copy of ω^* を含むのである。

§1. Heuristic reason. 問題の癡端はこうである。

Elementary submodels a chain $M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_\alpha \subset \dots$ ($\alpha < \kappa$) ($M_\alpha \prec H(\theta)$ どの θ は十分大きくとり) を考えよ。このとき、任意の topological space X に対し、 $X \cap M_0 \subseteq X \cap M_1 \subseteq \dots \subseteq X \cap M_\alpha \subseteq \dots$ は一体如何なるものであるか？ M_α は "elementary" であることから $X \cap M_\alpha$ は X の性質を大分保持しているに違いない。同相か？ まさか！ だって M_α の cardinality は十分低くおさえられる！ しかし M_α の card. を余り低くおせると自由度がない。ここぞ天の声あり。「中庸にまさるものなし」 $X = \omega^*$, $|M_\alpha| = \mathfrak{c}$ とせよ。しかるば $|X| = 2^c > |M_\alpha|$ だから M_α で X は cover されないもの、 $M_\alpha^\omega \subseteq M_\alpha$ としお母は countable sequence は自由に

M_α の中で扱える。思うに、数学の初めと終りには哲学が必要なのだ。以下はその実行であるが、当初の計画に僅差が生じ、できた M_α の列は必ずしも "elementary chain" にはなっていない。しかし elem. submodel の有効性は示せたと思う。「計画」は達成されなくとも「願望」は達成される！

§2. What we need. $T \triangleq \omega^*/\sim$ をすべての types of points in ω^* とする。即ち、equiv. relation $x \sim y$ ($x, y \in \omega^*$) は permutation $p: \omega \approx \omega$ s.t. $p(x) = y$ の存在を意味する。 $x \in \omega^*$ が属する equiv. class を $[x] \in T$ と表わす。Countable discrete subset $A \subseteq \omega^*$ 及び point $x \in A^* = \text{cl } A \setminus A$ に対し、relative type of x w.r.t. A を $t(x, A)$ と表わす。すなわち $t(x, A) = [(p \circ h)^{-1}(x)] \in T$ where $h: \omega \approx A$ is an arbitrary enumeration of A であり、 $\begin{matrix} \omega \\ \cong \\ \omega \end{matrix} \cong \begin{matrix} A \\ \cong \\ A \end{matrix} \subseteq \omega^*$

A を ω と identify したときの type of x within ωA である。 T 上に次の "Rudin-Frolík order" $\sqsubseteq$ を考える。

$$\begin{array}{ccc} t_1 \sqsubseteq t_2 & \text{iff} & \exists \text{ embedding } h: \omega \hookrightarrow \omega^* \text{ s.t. } h(x_1) = x_2 \\ \text{"} & & \text{"} \\ [x_1] & [x_2] & \text{i.e.} \\ & & t(x_2, A) = [x_1] \text{ for some } \omega \cong A \subseteq \omega^* \ (x_2 \in A^*) \end{array}$$

Frolík は $\sqsubseteq$ のとき t_1 "produces" t_2 と呼んだ。各 subset

$X \subseteq \omega^*$ に対し 次の $T(X)$, $\hat{T}(X) \subseteq T$ を対応させる:

$$\begin{aligned}
 T(X) &\triangleq \{t(x, A) \mid \omega \cong \underline{A} \subseteq X, x \in X, x \in A^*\} \\
 \hat{T}(X) &\triangleq \{t(x, A) \mid \omega \cong \underline{A} \subseteq \omega^*, x \in X, x \in A^*\} \\
 &= \{t \in T \mid \exists x \in X \ t \in [x]\}.
 \end{aligned}$$

$T(X)$ は X の中だけ ω^* を ω として relative types の全体である。

$\hat{T}(X)$ の場合には X の外から作られる rel. types も含む。



Subspace $X \subseteq \omega^*$ に “新しい量” $T(X)$ を対応させる。というのがこの小論の1つの idea であり、この萌芽は ω^* の non-homogeneity を証明した Frolik の論文の中にみられる。
 $T(X)$ は一種の “degree of compactness” である。例えば、 X が weak l-pts のみから成れば $T(X) = \emptyset$ であり、 X が infiniteかつ totally compact であれば $T(X) \neq \emptyset$ であり、また X が copy of ω^* or $\beta\omega$ を含めば $T(X) = T$ である。この最後の二つは Introduction の終りに指摘した二つの次を得る。

Fact. 1. $|X| < 2^c \rightarrow T(\omega^* \setminus X) = T.$

$T(\cdot)$ の有用性は次の明らかな事実による。

Fact. 2. 任意の subspaces $X, Y \subseteq \omega^*$ に対し、もし X が Y の中に embeddable ならば $T(X) \subseteq T(Y)$ である。従って、 $T(X) \setminus T(Y) \neq \emptyset$ ならば X は not embeddable into Y である。

$t[x, X] \triangleq \{t(x, A) \mid \omega \cong A \subseteq X, x \in A^*\}$ と定める。

$$T(X) = \bigcup_{x \in X} t[x, X] \quad , \quad \hat{T}(X) = \bigcup_{x \in X} t[x, \omega^*].$$

$T()$ の他に $\hat{T}()$ を導入したのはその扱い易さにある。たと

えば 任意の spaces $X_\alpha \subseteq \omega^*$ に対し $\hat{T}(\bigcup X_\alpha) = \bigcup \hat{T}(X_\alpha)$

であるが $T()$ については一般にそうはなっていない。Frolik

は、任意の type は 高々 $\mathbb{C}$ 個の types から produce される

ことを示した。よって、 $t[x, \omega^*] = \{t \in T \mid t \subseteq [x]\}$ の

cardinality は $\leq \mathbb{C}$ である。(Steiner は $|t[x, \omega^*]| = \mathbb{C}$

となる point x の存在を示している。) ゆえに、次の重要

な estimation を得る。

Fact. 3. $|X| < 2^{\mathbb{C}} \rightarrow |T(X)| \leq |\hat{T}(X)| < 2^{\mathbb{C}}.$

さて、次に M を次のような elementary submodel of $H(\theta)$

とする: $M^\omega \subseteq M$ かつ $|M| = \mathbb{C}.$

== 2". $H(\theta)$ は hereditarily of card. $< \theta$ なる sets 全体であ

り、 θ は十分に大きい regular card. にとっておく。たと

えばこの小論の範囲の議論では $\theta = \beth_{\omega+1}$ (where $\beth_0 = \aleph_0$,

$\beth_{n+1} = 2^{\beth_n}$, $\beth_\omega = \sup_{n \in \omega} \beth_n$, $\beth_{\omega+1} = 2^{\beth_\omega}$) ととっておけば

十分すぎるほど十分である。 $H(\theta)$ が自障りな人は $H(\theta)$ は

すべての sets から成る universe V である、と考えてもさしつ

かでない。一般に M が N の elementary submodel である。

($M \prec N$ と表わす) とは、任意の formula φ 及び $\forall a_1, \dots, a_n \in M$ に対し $M \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ iff $N \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ が成立することであり、これは任意の formula ψ 及び $\forall a_1, \dots, a_n \in M$ に対し $N \models \exists x \psi(x, a_1, \dots, a_n) \rightarrow \exists x \in M, N \models \psi(x, a_1, \dots, a_n)$ が成立することと同等である。この後半の条件は Tarski

Criterion と呼ばれる大変便利である。 a が definable from

$a_1, \dots, a_n$ であるとは、 a を characterize する formula が存在する、つまり " $\varphi(a, a_1, \dots, a_n) \ \& \ \forall x (\varphi(x, a_1, \dots, a_n) \rightarrow x = a)$ " なる φ が存在することを用いる。 $M \prec N$ の時、 $a \in N$ が N に於て

definable from elements of M なることは a は実際には M に属していることがわかる。この事実は断りなしにしょっちゅう使う。

以上の definitions に ついては Dow [1] または Handbook of Set-Theoretic Topology の 919 ページ (Baumgartner) を参照せよ。

以下、 M と書いたのは、先に述べた M 、つまり、elem. submodel of $H(\theta)$ (従って、上の definition で $N = H(\theta)$ の場合) であり、 $M^\omega \subseteq M$ (countable seq. について閉じているという) かつ $|M| = \mathfrak{c}$ なるものを表わすものと約束する。 $H(\theta)$ は本質的に model of set theory であり、 M の elements により definable なものは再び M に属することから $\omega, \beta(\omega), \mathfrak{c}, \beta\omega, (\omega^*, \tau)$ where $\tau = \{a^* \mid a \in \beta(\omega)\}$ (τ は ω^* の clopen sets 全体)

は ω は $\forall \alpha \in M$ の elements ω であることがわかる。しかも $M^\omega \subseteq M$ であることは $\beta(\omega), \mathbb{C}, \tau \in M$ であることがわかる。($|M| = \mathbb{C} < 2^{\mathbb{C}} = |\omega^*|$ である $\omega^* \in M$ は言えない。) 実際、次が成立する。

Fact. 4. $\forall x \in M$ に対して

- (1) $|x| \leq \mathbb{C} \rightarrow x \subseteq M$.
- (2) $|x| \geq \mathbb{C} \rightarrow |x \cap M| = \mathbb{C}$.

Proof. (1) $|x| \leq \mathbb{C}$ であるとき、 $\exists f: \mathbb{C} \rightarrow x$. $\mathbb{C}, x \in M$ である。 M の elementarity (Tarski Criterion) により $f \in M$ である。 $\mathbb{C} \subseteq M$ である $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ に対して $f(\alpha) \in M$ ($f(\alpha)$ は definable from $f, \alpha \in M$). $\therefore x = f[\mathbb{C}] \subseteq M$.

(2) $|x| \geq \mathbb{C}$ により $\exists y \subseteq x$ $|y| = \mathbb{C}$. M の elementarity により $y \in M$ である。 (1) の結果から $y \subseteq M$ $\therefore y \subseteq x \cap M$. $\therefore \mathbb{C} = |y| \leq |x \cap M|$. $|M| = \mathbb{C}$ である $|x \cap M| = \mathbb{C}$. //

この Fact から、たとえば $|\omega^* \cap M| = |T \cap M| = \mathbb{C}$, $\forall x \in \omega^* \cap M$ $t[x, \omega^*] \subseteq M$ であることがわかる。

Prop. 1. $\forall X \in M$, $X \subseteq \omega^*$ に対して

$$T(X \cap M) = T(X) \cap M, \quad \hat{T}(X \cap M) = \hat{T}(X) \cap M.$$

Proof. M の elementarity と, definability of $t(x, A)$ とから

$$\begin{aligned}
 t \in T(X) \cap M &\iff t \in M \text{ \& } \omega \cong \exists A \subseteq X \exists x \in X \quad t = t(x, A) \\
 &\iff t \in M \text{ \& } \omega \cong \exists A \subseteq X \cap M \exists x \in X \cap M \quad t = t(x, A) \\
 &\iff t \in T(X \cap M)
 \end{aligned}$$

よって, 第1の等式が成り立つ。第2の等式も同様。 //

$T(\omega^*) = \hat{T}(\omega^*) = T$ とわかる。この Prop. より $T(\omega^* \cap M) = \hat{T}(\omega^* \cap M) = T \cap M$ がわかる。 $X \subseteq \omega^*$, $S \subseteq T$ に対して, 条件

$$\forall s \in S \quad \omega \cong \exists A \subseteq X \exists x \in A^* \cap X \quad s = t(x, A)$$

が満足されるとき, X を S -countably compact と呼ぶことにする。もちろん $S \neq \emptyset$ ならば S -c.cpt のとき通常の意味で countably compact になる。次の Prop. は M の elementarity から直ちに従う。

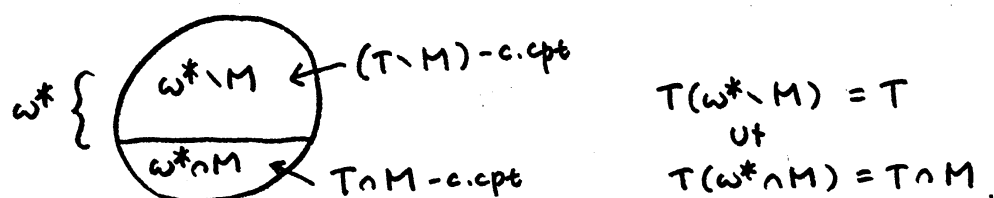
Prop. 2. $X \subseteq \omega^*$, $S \subseteq T$ とする。 $X, S \in M$ ならば

$$X : S\text{-c.cpt} \rightarrow X \cap M : S \cap M\text{-c.cpt.}$$

Lemma. 1. $\forall X \subseteq \omega^*$ に対して, $\omega^* \setminus X$ は $(T \setminus \hat{T}(X))$ -c.cpt である。

Proof. これは $\hat{T}(X)$ の definition によるものである。実際, $\omega \cong A \subseteq \omega^*$, $s \in T \setminus \hat{T}(X)$ とすれば, 明らか $\exists x \in A^* \quad t(x, A) = s$. もし $x \in X$ とすると $s \in \hat{T}(X)$ となり, s のとり方に矛盾する。 //

Prop.2 から $\omega^* \cap M$ は $T \cap M$ -c.cpt, Lem.1 から $\omega^* \setminus M$ は $(T \setminus M)$ -c.cpt であることがわかる。また、前に指摘したように $T(\omega^* \cap M) = T \cap M$ であり、一方、Fact.1 から $T(\omega^* \setminus M) = T$ である。



§3. Construction. 前節の結果を組合せることにしよう。次の main lemma を得る。

Lemma. 2. $X \in M$, $X \subseteq \omega^*$, $|X| < 2^c$ とする。

$C \triangleq \omega^* \cap M \setminus X$ と定めるとき、 C は次の性質をもつ。

C は $(T \setminus \hat{T}(X)) \cap M$ -c.cpt であり、 $T(C) = T \cap M$ かつ

$|(T \setminus \hat{T}(X)) \cap M| = c$ である。

Proof. $|X| < 2^c$ であるから Fact.1 より $T(\omega^* \setminus X) = T$ である。

Prop.1 により $T(C) = T \cap M$ 。Lem.1 から $\omega^* \setminus X$ は

$(T \setminus \hat{T}(X))$ -c.cpt であるから、Prop.2 により C は $(T \setminus \hat{T}(X)) \cap M$ -c.cpt である。Fact.3 から $|\hat{T}(X)| < 2^c \therefore |T \setminus \hat{T}(X)| = 2^c$ 。

ゆえに、Fact.4 により $|(T \setminus \hat{T}(X)) \cap M| = c$ 。 //

この lemma を用い 2. 次 に 定理 1 に 於て ω^* の 分割 を 構成
する。まず, ω^* を well-order する: $\omega^* = \{x_\alpha \mid \alpha < 2^c\}$.
† 命 大 主 正 regular card. θ を とり, inductive に 2^c -sequence
of elementary submodels $M_\alpha \prec H(\theta)$ を 次の よう に 作る:

$$M_0 \in M_1 \in \dots M_\alpha \in \dots (\alpha < 2^c)$$

$$M_\alpha^\omega \subseteq M_\alpha, |M_\alpha| = \mathfrak{c}, x_\alpha \in M_\alpha, \langle M_\beta \mid \beta < \alpha \rangle \in M_\alpha.$$

$\tilde{M}_\alpha \triangleq \bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta$ とおく。条件 $\langle M_\beta \mid \beta < \alpha \rangle \in M_\alpha$ より $\alpha, \tilde{M}_\alpha \in M_\alpha$
であるから、一般には $\tilde{M}_\alpha \subseteq M_\alpha$ といえることに注意。

($\alpha \in M_\alpha$ であるのは $|\alpha| \leq \mathfrak{c}$ のときのみ。また、 $|\tilde{M}_\alpha| = |\alpha| \cdot \mathfrak{c}$
ゆえ、 $\tilde{M}_\alpha \subseteq M_\alpha$ であるのも $|\alpha| \leq \mathfrak{c}$ のときのみである。従って、
sequence $\langle \tilde{M}_\alpha \mid \alpha < 2^c \rangle$ が、いわゆる elementary chain を与えるの
は $\mathfrak{c}^+ = 2^c$ の時だけである。)

$$C_\alpha \triangleq \omega^* \cap (M_\alpha \setminus \tilde{M}_\alpha) = \omega^* \cap M_\alpha \setminus \omega^* \cap \tilde{M}_\alpha$$

と定めるとき、これが 定理 1 を満たすことを示す。

$|\tilde{M}_\alpha| = |\alpha| \cdot \mathfrak{c} < 2^c$ であるから、 $X = \omega^* \cap \tilde{M}_\alpha$ に Lem. 2 を

適用できる。よって、 C_α は、 $(T \cap M_\alpha \setminus \hat{T}(\omega^* \cap \tilde{M}_\alpha))$ -c.cpt.

かつ $T(C_\alpha) = T \cap M_\alpha$, $|T \cap M_\alpha \setminus \hat{T}(\omega^* \cap \tilde{M}_\alpha)| = \mathfrak{c}$ である。

$$\hat{T}(\omega^* \cap \tilde{M}_\alpha) = \bigcup_{\beta < \alpha} \hat{T}(\omega^* \cap M_\beta) = \bigcup_{\beta < \alpha} (T \cap M_\beta) = T \cap \tilde{M}_\alpha \quad \text{である}$$

$$T \cap M_\alpha \setminus \hat{T}(\omega^* \cap \tilde{M}_\alpha) = T \cap (M_\alpha \setminus \tilde{M}_\alpha).$$

$x_\alpha \in M_\alpha$ とし 2 おいたから $\omega^* \subseteq \bigcup_{\alpha < 2^c} M_\alpha$. ゆえに、

$\omega^* \subseteq \bigoplus_{\alpha < 2^c} C_\alpha$ である。また、Fact. 2 により、 C_α を

$\omega^* \cap \tilde{M}_\alpha = \bigoplus_{\beta < \alpha} C_\beta$ の中に embed する = ことは不可能である。

一般に subset $X \subseteq \omega^*$ が $\forall x \in X [x] \subseteq X$ (i.e. $X = \pi^{-1}\pi(X)$ where $\pi: \omega^* \rightarrow T = \omega^*/\sim$) なる条件をみたすとき, orbit-saturated (o.s. と略す) と呼ぶことにする。o.s. なるものは明らかに dense in ω^* である。また, $|[x]| = \aleph$ であるから Fact. 4(1) により $X \in M$ に対し X : o.s. なるば $X \cap M$: o.s. (従って $X \setminus M$ も o.s.) となる。よって, 各 C_α は o.s. である。

以上で, 定理 1 が示されたわけだが, 実際には, より詳しく次の結果を得たことになる。

定理 1* $\omega^* = \{\pi_\alpha \mid \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ とし, elementary submodels

M_α ($\alpha < 2^{\aleph_0}$) of $H(\Theta)$ (Θ は十分大きい) を次のようにとる。

$$M_0 \in M_1 \in \dots M_\alpha \in \dots \dots (\alpha < 2^{\aleph_0})$$

$$M_\alpha^w \subseteq M_\alpha, |M_\alpha| = \aleph, \pi_\alpha \in M_\alpha, \langle M_\beta \mid \beta < \alpha \rangle \in M_\alpha.$$

このとき, $C_\alpha \triangleq \omega^* \cap (M_\alpha \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta)$ と定めれば, ω^* の,

互いに non-homeomorphic な countably compact spaces による

分割 $\omega^* = \bigoplus_{\alpha < 2^{\aleph_0}} C_\alpha, |C_\alpha| = \aleph$ を得る。 C_α は orbit-

saturated (従って dense in ω^*) であり, かつ $T \cap (M_\alpha \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta)$ -

ably compact である。 $T(C_\alpha) = T \cap M_\alpha, |T \cap (M_\alpha \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta)| = \aleph$.

しかも, 各 C_α は, $\bigoplus_{\beta < \alpha} C_\beta$ の中に topologically に embed され得ない。

《文献》

- [1] A. Dow "An introduction to Applications of Elementary submodels to Topology". Top. Proc. 13 (1988) pp. 17-72.
- [2] I. Bandlow "A note on Applications of the Löwenheim-Skolem theorem in General Topology"
Zeit. f. Math. Logik u. Gr. d. Math., Bd. 35 (1989) pp. 283-288.
- [3] J. E. Baumgartner "Applications of the Proper Forcing Axiom".
Handbook of Set-Theoretic Topology, North-Holland, (1984) pp. 913-960.

Relative type $\aleph_n$ Rudin-Frolík order $\kappa \rightarrow \mu \geq \lambda$, 12の本を参照せよ。

- [4] R. C. Walker "The Stone-Čech compactification"
Erg. d. Math. u. Grenz., Bd. 83 (1974) Springer.