

meta-stable range に於ける
球面の局所平坦位相埋蔵.

東大・教養 加藤十吉.

§1. 序

次の定理を証明する.

定理. 「 M をコンパクト m 次元 PL 多様体, W を w 次元多様体とし, 連続写像 $f : (M, \partial M) \rightarrow (W, \partial W)$ が, $f|_{\partial M} : \partial M \rightarrow \partial W$ が局所平坦埋蔵であるように与えられたとする.

- 1). $3(m+1) < 2w$,
- 2). M は $2w-m$ -連結, そして,
- 3). W は $2w-m+1$ -連結

であると仮定する. このとき, 写像 $f : M \rightarrow W$ は ∂M に相対的に局所平坦埋蔵にホモトープである.」

この定理は著者の論文 [2] の中で証明なしに使用されている. 完全性の為にこの機会に証明を与える.

この定理で M の PL 性^(をとり去り)及び仮定 1) を $w-m \geq 3$ として

も成立するであろうがその証明を著者は知らない。

この定理から直ちに次が得られる。

系. 「 W を $(n-k+1)$ -連結な $(n+k)$ -次元多様体とし、 $n < 2k-3$ と仮定する。そのとき、 $\pi_n(W)$ のかつてな元は局所平坦埋蔵 $f: S^n \rightarrow W$ で実現される。」

§2. 局所 PL nice 写像.

多面体 P から PL 多様体 Q への PL 写像 $f: P \rightarrow Q$ が "nice" といわれるのは、非退化かつ一般の位置にあるときをいう。多面体 P から w 次元多様体 W への連続写像 $f: P \rightarrow W$ が "局所 PL nice" といわれるのは、各点 $x \in P$ に対して、 $f(x)$ のまわりの座標関数

$$h: U \rightarrow \mathbb{R}^w$$

が存在して、 $h \circ f|_{f^{-1}(U)}: f^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^w$

が PL nice となるときをいう。(但し、 U は $f(x)$ の W における開近傍である。) 次は良く知られた事実である。

命題 1. 「 $f: P \rightarrow Q$ を多面体 P から PL 多様体 Q への連続写像とし、 P の部分多面体 R 上で $f|_R$ は PL nice とする。そのとき、 f は PL nice 写像

$f: P \rightarrow Q$ により R に相対的に近似される。」

局所 PL nice 写像の性質を調べておこう。

命題 2. 「 $f: P \rightarrow W$ をコンパクト p 次元多面体 P から w 次元多様体 W の中への局所 PL nice 写像とする。そのとき、 $f(P)$ は $f: P \rightarrow f(P)$ が PL 写像かつ W の中で局所 tame な PL 構造を有し、その二重点集合 $S_2(f) = \{x \in P \mid f^{-1}(f(x)) \neq \{x\}\}$ は P の部分多面体で、 $\dim S_2(f) \leq 2p - w$ である。」

証明.

$f: P \rightarrow W$ は局所 PL nice, そして $f(P)$ はコンパクトだから、 $f(P)$ の有限開被覆 $\{U_i\}_{i=1, \dots, n}$ が存在して、同相写像 $h_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^w$ が存在して、

$$h_i \circ f|_{f^{-1}(U_i)}: f^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^w$$

が PL nice となる。 $U_i \cap f(P) = V_i$ とおけば、

$\bigcup_{i=1}^n V_i = f(P)$ で、各 i に対して、 $h_i(V_i)$ は $\mathbb{R}^w$ の部分多面体である。こゝで次を示す。

★「もし、 $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ ならば、

$$h_j \circ (h_i|_{V_i \cap V_j})^{-1}: h_i(V_i \cap V_j) \rightarrow h_j(V_i \cap V_j)$$

は PL 同相である。」

なぜなら、 $h_i \circ f$ と $h_j \circ f$ は PL nice 写像で、 $f^{-1}(V_i \cap V_j)$ の適当な三角分割の各単体上 PL 埋蔵で、かつ

$$h_j \circ f = h_j \circ (h_i^{-1} \circ h_i) \circ f = (h_j \circ h_i^{-1}) \circ (h_i \circ f)$$

となるからである。

故に, $f(P)$ 上の PL 構造 $\{V_i, h_i | V_i, V_i \rightarrow h_i(V_i) \subset R^w\}$ が得られ, $f: P \rightarrow f(P)$ はこの構造に関して PL, かつ, $f(P) \subset W$ は局所 tame となる. 又, $f: P \rightarrow W$ の二重集合 $\mathcal{S}_2(f)$ は $f: P \rightarrow f(P)$ のそれと一致するので P の部分多面体となる. 更に, 各 PL nice 写像 $h_i \circ f | f^{-1}(V_i): f^{-1}(V_i) \rightarrow R^w$ に対して $\dim \mathcal{S}_2(h_i \circ f) \leq 2p - w$ が成立するので, $\dim \mathcal{S}_2(f) \leq 2p - w$ をうる. (証明了).

§3. 局所 PL nice 近似.

補題. 「 $f: P \rightarrow W$ をコンパクト p -次元多面体 P から w -次元多様体 W の中への連続写像とする. もし, $3(p+1) < 2w$ ならば, f は局所 PL nice 写像により近似される。」

証明. $f(P)$ はコンパクトだから $f(P)$ の W における有限開被覆 $\{U_i\}_{i=1, \dots, n}$, 及び 同相写像 $h_i: U_i \rightarrow R^w$ が存在して, 単位球 $D^w \subset R^w$ に対して,

$$E = \bigcup_{i=1}^n (h_i \circ f)^{-1}(\text{Int } D^w)$$

とすることが出来る. 又, $(h_i \circ f)^{-1}(D^w)$ はコンパクトだから, P のコンパクト部分多面体 E が存在して,

$(h_i \circ f)^{-1}(\text{Int } D^w) \subset E_i \subset f^{-1}(U_i)$, $i=1, \dots, n$,
となり, 従って, $\{E_i\}$ が P の PL 開被覆となる。

さて, まず U_1 上の PL 構造 $h_1 : U_1 \rightarrow R^w$ を使用し
て, $f|_{E_1} : E_1 \rightarrow U_1$ をこの構造に関して PL
nice とする。即ち, 命題 1 により, $h_1 \circ f|_{E_1}$ を E_1 上 PL
nice 近似を行い, 連続写像 $f_1 : P \rightarrow W$ をとって,

E_1 のコンパクト近傍の外側で $f = f_1$,

f_1 は E_1 上 PL nice (i.e., $h_1 \circ f_1|_{E_1}$ が PL nice),

更に, f_1 を f に十分近似して, 各 i に対して,

$E_i \subset f^{-1}(U_i)$ とすることが出来る。

今, $P_k = \bigcup_{i=1}^n E_i$ とおいて, 次の命題 [k] を考える。

[k] : 「 $f_k : P \rightarrow W$ が f の近似として存在し,

(1) P_k の近傍の外側で $f_k = f$,

(2) $f_k|_{P_k}$ は局所 PL nice, かつ,

(3) $f_k^{-1}(U_i) \supset E_i$, $i=1, \dots, n$,

(4) $f_k|_{P_{k-1}} = f_{k-1}|_{P_{k-1}}$.」

とくに, $P_0 = \emptyset$, $f_0 = f$ とすれば, 上で [1]
が成立するのをみた。[k] が成立するとし, [k+1] が成立
するのを示せば [n] が成立し, f_n が求める f の近似とな
る。

[k] $\Rightarrow$ [k+1] の証明. $f_k : P_k \rightarrow W$ は

局所 PL nice だから, $f_k(P_k)$ は W の中で局所 tame な PL 構造を有している. よって, $h_{k+1}: U_{k+1} \rightarrow R^w$ は $f_k(P_k) \cap U_{k+1}$ へ制限されたとき, R^w の中への局所 tame (従って, 局所平坦) な埋蔵である.

$\dim f_k(P_k) \cap U_{k+1} \leq p$ であるから, 仮定 $3(p+1) < 2w$ を考慮して Chernawski [1] を使用すれば, 同相写像 $h'_{k+1}: U_{k+1} \rightarrow R^w$ を h_{k+1} と ε -イソトピックにとり, $h'_{k+1}|_{f_k(P_k) \cap U_{k+1}}$ が PL 埋蔵となるようにとれる. 即ち, U_{k+1} 上 h'_{k+1} により与えられる PL 構造に関して,

$f_k|_{f_k^{-1}(U_{k+1})}$ は $P_k \cap f_k^{-1}(U_{k+1})$ 上 PL nice である

と仮定することができる. ここで, f_k を P_k に相対的に E_{k+1} 上 PL nice 近似して, 連続写像

$f_{k+1}: P \rightarrow W$ を得て,

- (1) P_{k+1} の近傍の外側で $f_{k+1} = f$,
- (2) $f_{k+1}|_{P_{k+1}}$ は局所 PL nice, かつ
- (4) $f_{k+1}|_{P_k} = f_k|_{P_k}$

となるようにすることができる. f_{k+1} を十分 f に近似すれば, (3) $E_i \subset f_{k+1}^{-1}(U_i)$, $i=1, \dots, n$, が成立するので証明を終る. (証明了).

§4. 定理の証明.

自明な場合を除けば, $m \geq 2$, 従って, $w \geq 5$, $w-m \geq 3$ と仮定してよい。

collar 近傍の存在から, f は ∂M の collar 近傍 $\partial M \times [0, 1]$ では ∂W の collar 近傍 $\partial W \times [0, 1]$ の中への局所平坦埋蔵としてよい。Kirby により局所平坦は局所 PL と解釈してさしつかえないので, $f|_{\partial M \times [0, 1]}$ 上では既に局所 PL nice とみなされる。先の補題の証明から, $f: M \rightarrow W$ は ∂M に相対的に局所 PL nice 近似可能であり, 始めからそう仮定してさしつかえない。従って, 命題 2 より,

(1) $S_2(f)$ は $\text{Int } M$ のコンパクト部分多面体で,

$$\dim S_2(f) \leq 2m - w,$$

(2) $f(M)$ は W の局所 tame な PL 構造を有し,

$$\dim f(M) \leq m$$

と仮定することが出来る。

さて, M は $2m-w$ -連結だから PL 吸い込みにより collapsible 多面体 $C \subset \text{Int } M$ が存在して,

$$C \searrow S_2(f) \quad \text{かつ}$$

$$\dim C \leq 2m - w + 1$$

となる。 f は局所 PL nice だから, $f(C)$ は $f(M)$ の部分多面体, $\dim f(C) = \dim C \leq 2m - w + 1$, かつ

$f(C)$ は W で局所 tame である。

W は $2m-w+1$ -連結 だから位相吸い込みにより、 $f(C)$ は W の中の w 次元球体 B の内部に入っているとしてよい。Chernavskii [1] により $f(C)$ はその PL 構造に関して B の部分多面体としてよい。PL 吸い込みにより、collapsible 多面体 $D \subset \text{Int } B$ が存在し、

$$D \searrow f(C),$$

$$\dim D \leq 2m-w+1, \text{ かつ,}$$

$$\dim((D-f(C)) \cap f(M))$$

$$\leq (2m-w+2) + m - w = 3(m+1) - 2w - 1$$

$$< -1$$

となる。 D は $f(M)$ と $f(C)$ のみ交わる。

さて、 $f: M \rightarrow f(M)$ は PL 写像で、 C は $f(M)$ の部分多面体 $f(C) \subset D \subset \text{Int } B$ の上へうつされる。従って、 C の $\text{Int } M$ での正則近傍 U 、 D の $\text{Int } B$ での正則近傍 V を適当にとれば、

$$f|_{\overline{M-U}}: \overline{M-U} \rightarrow \overline{W-V}$$

は局所 PL 埋蔵、従って、 $w-m \geq 3$ より、局所平坦埋蔵となっている。 U, V は m 次元、 w 次元球体だから cone 拡大により求める局所平坦埋蔵

$$g: M \longrightarrow W$$

をうる。 g と f がホモトープなのは明らかである。
(証明)。

参考文献.

[1] A. V. Chernavskii, Homeomorphisms of euclidean space and topological embeddings of polyhedra in euclidean space, Mat. Sb. 63 (1965), 581-613.

[2] M. Kato, Classification of compact manifolds homotopy equivalent to a sphere, (to appear).