

市場価格データに基づくオプション評価モデルの検証

電気通信大学大学院 電気通信学研究科 システム工学専攻
星加裕文(Hirofumi Hoshika), 宮崎浩一(Koichi Miyazaki)

University of Electro-Communications, Department of Systems Engineerings.

1. はじめに

最も著名なオプション評価モデルは, Black-Scholes モデル(以下, BS モデル)である. BS モデルでは原資産価格のボラティリティを定数としているため, 権利行使価格が異なる複数のオプションの市場価格を整合的に評価することができない. 実際, 権利行使価格が異なる各オプション市場価格と対応する BS モデル価格が一致するようにボラティリティを逆算すると(このように逆算されたボラティリティをインプライド・ボラティリティと呼び, 以下, IV と略す), アウト・オブ・ザ・マネー(コール・オプションであれば原資産価格<権利行使価格, 以下 OTM と略す)オプションの IV は高く, 権利行使価格がアット・ザ・マネー(原資産価格=権利行使価格, 以下 ATM と略す)に近づくにつれて低下し, ATM を超えて, イン・ザ・マネー(コール・オプションであれば原資産価格>権利行使価格, 以下 ITM と略す)になると再び緩やかに高くなるという現象(IV のスマイル, スキューなどと呼ばれる)が見られる. これは, 権利行使価格が異なれば, ボラティリティが一定でないことの明白な証拠である. このため, BS モデル以降 30 年以上もの間, 様々なモデルが提案されてきた. その主な方向性としては, デタミニステック・ボラティリティ・モデル(ボラティリティが時間と原資産のみの関数として与えられるモデル, 以下, DVM と略す), 確率ボラティリティモデル(ボラティリティが確率的に変動するモデル, 以下, SVM と略す), ジャンプ拡散タイプのモデル(確率項に拡散過程にジャンプ過程を加えたモデル, 以下, JDM と略す)の 3 通りがあり, これらの発展過程や参考文献は, 宮崎(2007)を参照されたい. 本研究では, 上記の 3 通りのモデルの中で DVM に焦点を当てる. DVM の利点は, モデルが完備(オプション価格が無リスク資産と原資産のみで再構築できる)であり, オプション価格を評価する際に, ボラティリティリスクの市場価格(SVM の場合)やジャンプリスクの市場価格(JDM の場合)などを別途推定する必要が無いことである.

本研究の目的は, DVM の中で, ボラティリティ項の関数形として, 2 つのパラメータを含む関数形, 3 つのパラメータを含む関数形, 7 つのパラメータを含む関数形の 3 通りを採り上げ, 3 通りの DVM が日経 225 オプション市場における権利行使価格が異なる複数のオプションの市場価格をどの程度整合的に評価することができるかについて実証分析することである. オプションのモデル価格の導出に関しては, 二項モデルを採用する. DVM モデルを二項モデルで表現する方法は, Rubinstein (1994), Derman and Kani (1994)に源流を持つが, 前者は基本的に原資産プロセスを対数正規分布と仮定していること, 後者はボ

ラティリティの大きさに依存して株価が負となるケースが発生することなどが指摘されている。そこで、本研究では、ボラティリティ項の関数形を柔軟に与えることができ、かつ、Derman and Kani (1994)の弱点を克服した Li(2001)の二項モデルの構築法を採用する。この二項モデルに基づくオプションのモデル価格(DVM モデルのパラメータを含む)とオプションの市場価格との乖離を目的関数とし、DVM モデルのパラメータを決定変数とするような最小化問題として定式化する。この最小化問題を数値的に解き、目的関数の値を3通りのDVM 間で比較し、DVM のパラメータが増加するにしたがってオプションのモデル価格がどの程度まで市場価格と整合的になるかを検証する。

上記の研究目的の背景には、日本における時価会計制度の導入の影響がある。時価会計において、公正価格を算定する場合、上場取引では、原則として取引所の取引価格を用いて算定する。また、オプション評価モデルを利用する際には、モデルの妥当性をチェックする必要がある。よって、モデルの妥当性の検証において最も重要なことは、採用するモデルを用いて上場オプション価格を評価した場合に、公正価格として採用すべき取引所の取引価格に十分に近いかどうかである。本研究の目的は、DVM の関数形としてどの程度柔軟なものを採用すれば(どの程度のパラメータ数を想定すれば)、概ね上記に示したモデルの妥当性が満たされるかどうかを最適化モデルの目的関数の値に着目して検証することである。本論文の構成は、以下の通り。2 節ではオプション評価モデルの説明を行い、3 節では最適化モデルの目的関数や制約条件について述べる。4 節では実証に用いるデータを述べたうえで実証分析を行い、分析結果とその考察を与える。最終節では、まとめと結語を付す。

2. オプション評価モデル

2. 1 3種のデタミニスティック・ボラティリティ・モデル(DVM)

本節では、デタミニスティック・ボラティリティ・モデルを紹介し、本研究で仮定する3種のデタミニスティック・ボラティリティについて説明する。以下にデタミニスティック・ボラティリティ・モデルを示す。

$$dS_t / S_t = rdt + \sigma(S_t, t)dW \quad (1)$$

ここで、 S_t は時点 t における株価、 r は安全利率(本研究では安全利率は0と設定)、 $\sigma(\cdot)$ はデタミニスティック・ボラティリティ、 dW はウィナー過程である。式(1)では、デタミニスティック・ボラティリティ $\sigma(S_t, t)$ が株価 S_t と時点 t の関数になっており、ボラティリティを株価と時間に関数と仮定しており、BS モデルのようにボラティリティは一定でない。このデタミニスティック・ボラティリティ $\sigma(S_t, t)$ に3種類の関数を仮定することにより、実際マーケットのオプション価格にどの程度フィットできるかを、モデルのパラメータを推定することにより時系列的に検証する。以下に3種類のモデルを示す。

2. 1. 1 2パラメータモデル [Lee, et al, (2003)]

2 パラメータモデルはパラメータ数が2つのモデルであり、原資産価格に $\log$ をとりパラメータ b を掛け合わせパラメータ a を足し、ルートを取ったモデルである。このモデルはスキューの表現が可能なモデルであり、原資産価格が上昇した場合に、ボラティリティの上昇、もしくは下降が表現できる。ただし、 S_t は 10,000 円前後の大きな値をとり、さらにはルートをとるので $\sigma(S_t, t)$ は大きくは変化しないと言える。ここで a, b はパラメータ、 S_t は時点 t での原資産価格である。

$$\sigma(S_t, t) = \sqrt{a + b \log S_t} \quad (2)$$

2. 1. 2 3パラメータモデル [Li (2000/2001)]

3 パラメータモデルはパラメータ数が3つのモデルであり、初期時点での原資産価格 S_0 と原資産価格 S_t の乖離より $\tanh(x)$ を用いて表現されるモデルである。 $\tanh(x)$ は x に関しての増加関数であり、2 パラメータモデルと同様にスキューの表現が可能なモデルである。ただし2パラメータモデルとの大きな違いは、スキューの形状がパラメータ b により、急にも緩やかにもなりうる点が挙げられる。ここで a, b, c はパラメータである。

$$\sigma(S_t, t) = c + a \left\{ 1 - \tanh \left[b \left(\frac{S_t - S_0}{S_0} \right) \right] \right\} \quad (3)$$

2. 1. 3 7パラメータモデル [Brown and Randall (1999)]

7パラメータモデルはパラメータ数が7つのモデルであり、3パラメータモデルの $\tanh(x)$ だけでなく、 $\operatorname{sech}(x)$ も用いたモデルである。 $\operatorname{sech}(x)$ は x に関して上に凸な関数であり、 $\tanh(x)$ と合わせるとスキューとスマイル双方の表現が可能なモデルである。ここで a, b, c, d, e, f, g はパラメータである。

$$\sigma(S_t, t) = a + b \tanh \left(c \ln \left(\frac{S_t}{S_0} \right) - d \right) + e \left[1 - \operatorname{sech} \left(f \ln \left(\frac{S_t}{S_0} \right) - g \right) \right] \quad (4)$$

2. 1. 4 3パラメータモデルと7パラメータモデルの関数形

ローカル・ボラティリティの関数形として7-パラメータモデルに含まれるような関数形 $b \tanh(cx)$ や $e[1 - \operatorname{sech}(fx)]$ (a, d, g は平行移動を表現するパラメータなのでここでの説明では省いた)を用いる利点について確認しておく。

図1には、(1) $b=1, c=1$, (2) $b=1, c=2$, (3) $b=-1, c=1$, (4) $b=-1, c=2$ の4通りに関して関数形 $b \tanh(cx)$ の形状を描いた。図1によれば、 b が正(負)のときに右上(右下)がりとなること、また、 c の値が大きいほど0付近の変化率が大きくなることがわかる。よって、 b が正(負)のときには株価が上昇(下落)する際にボラティリティが大きくなり、その変化率が c で表現される。実際、図2には、 $S_0 = 15,719$ 、満期まで15営業日とした場合に、7パラメータモデルのパラメータを $a=0.2$, $c=1$, $d=e=f=g=0$ と固定して、 $b=1$ と $b=-1$ の2通りについて満期における株価の分布を示したものである。 b が正(負)のときには株

価の分布が上側(下側)にスキューしていることが確認できる。次に、図3には、(1) $e=1, f=1$, (2) $e=1, f=6$, (3) $e=-1, f=1$, (4) $e=-1, f=6$ の4通りに関して関数形 $e[1-\operatorname{sech}(fx)]$ の形状を描いた。図3によれば、 e が正(負)のときに上側(下側)に広がること、また、 f の値が大きいほど0付近の変化率が大きくなることがわかる。よって、 e が正(負)のときには株価が現在の値から乖離するに従って、ボラティリティが大きく(小さく)なり、その変化率が f で表現される。実際、図4には、 $S_0=15,719$ 、満期まで15営業日とした場合に、7パラメータモデルのパラメータを $a=0.1$, $f=6$, $b=c=d=g=0$ と固定して、 $e=1$ と $e=-1$ の2通りについて満期における株価の分布を示したものである。 e が正(負)のときには株価の分布の裾野が両側とも広い(狭い)ことが確認できる。

このように、ローカル・ボラティリティの関数形として関数形 $b \tanh(cx)$ や $e[1-\operatorname{sech}(fx)]$ を採用しておけば、クロスセクショナルなオプション価格に織り込まれる満期における株価の分布を柔軟に表現することができる。

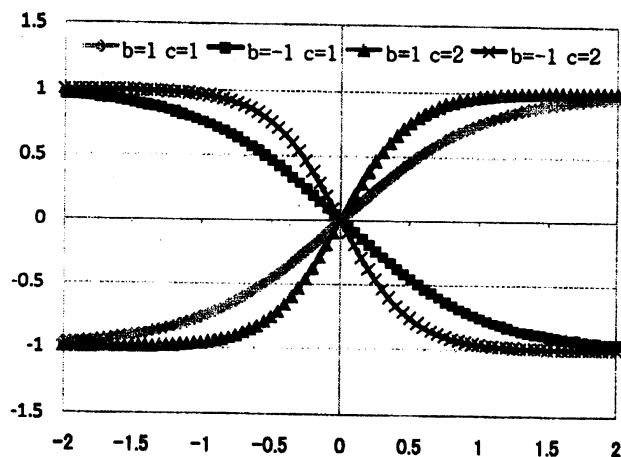


図1 $b \tanh(cx)$ の関数形

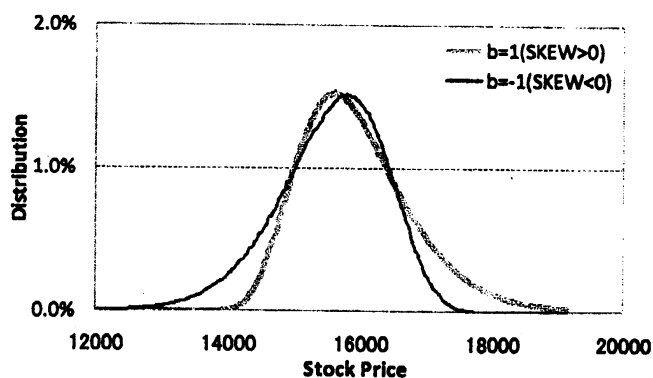


図2 満期での分布(スキュー)

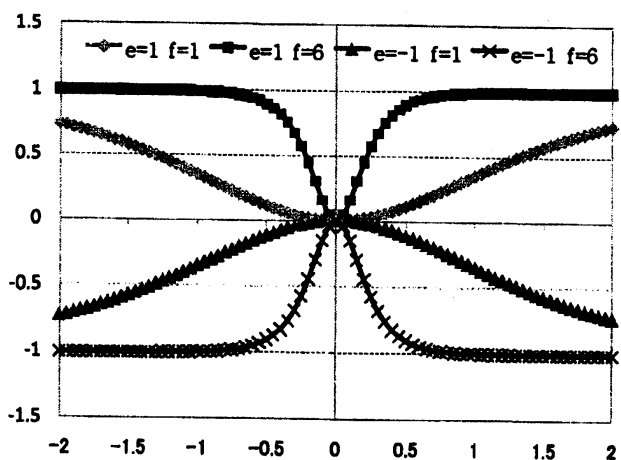


図3 $e[1-\operatorname{sech}(fx)]$ の関数形

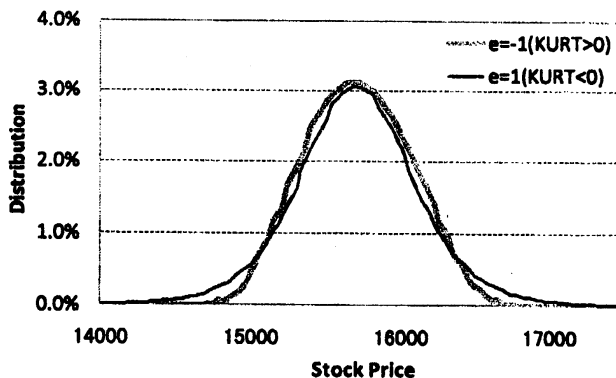


図4 満期での分布(スマイル)

2. 2 ラティスによるオプション評価法 [Li (2000/2001)]

ここではまずコール・オプションの説明を行い、ラティスによるオプション評価法である Li モデルの特徴を説明したあと、具体的にどのようにオプション価格を導出するかを述べる。コール・オプションとは、所定の期日(または期間内)に、ある特定の資産をあらかじめ定めた価格で買うことができる権利である。満期 T における株価 $S(T)$ が権利行使価格 K に比べ、高い場合に価値を持つものであり、その価値に株価の到達確率 $f(S(T))$ をかけ合わせ、安全利子率 r で割引くことで価格が導出できる。つまり、株価 $S(T)$ と到達確率 $f(S(T))$ が既知となれば、オプション価格は導出できる。また、実際のオプションマーケットには権利行使価格 K が異なるオプションが取引されており、権利行使価格 K が高くなるとオプション価格は低くなる。

$$\text{Price} = e^{-rt} \int_K^{\infty} \max(S_t - K, 0) f(S_t) dS_t \quad (5)$$

本研究では、Li モデルを用いて、ボラティリティが変動するデタミニスティック・ボラティリティ $\sigma(s, t)$ で、推移確率 p が 50% のバイノミナル・ツリー・モデルを構築する。図 5 には Li モデルのバイノミナル・ツリー概念図を示し、横軸に時間、縦軸に株価とした。ただし、 s_i^j は i 時点における上から j 番目のノードにある原資産価格である。これを見ると、上方のラティスと下方のラティスとでは上下の価格幅が異なっており、 S_i の価格の大きさによってボラティリティが異なるのが分かる。また、 $S_0^1 \rightarrow S_1^1$ などのノード間の推移確率は全て 50% であり、DK モデルとは異なりオプション価格が計算できないという問題は起こらないことから、モデルの安定性は高いといえる。本研究ではボラティリティが変動し、かつ安定性が高い、Li モデルを用いて、権利行使価格の異なる 4 つのオプションを用いて最適化を行なう。4 つのオプションについては 3 章で述べる。

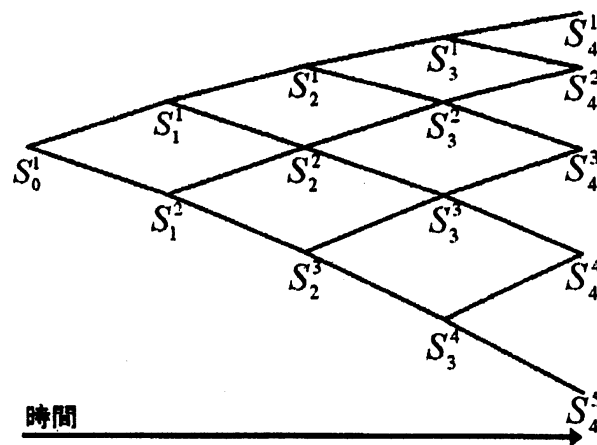


図 5 Li モデルでのバイノミナル・ツリー概念図

図5のバイノミナル・ツリーを構築するためLiモデルのアルゴリズムを以下に示した。3式はすべて2時点間の株価を表現しており、現時点の株価から翌期の株価が求めることができるアルゴリズムとなっている。ここで Δt は1ラティス当りの微小時間としている。

$$\begin{aligned} S_t^1 &= S_{t-1}^1 \left[1 + r\Delta t + \sigma(S_{t-1}^1, t) \sqrt{\Delta t} \right] \\ S_t^{i+1} &= S_{t-1}^i \left[1 + r\Delta t - \sigma(S_{t-1}^i, t) \sqrt{\Delta t} \right] \\ S_t^{i+1} &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &S_{t-1}^i \left[1 + r\Delta t - \sigma(S_{t-1}^i, t) \sqrt{\Delta t} \right] \\ &+ S_{t-1}^{i+1} \left[1 + r\Delta t + \sigma(S_{t-1}^{i+1}, t) \sqrt{\Delta t} \right] \end{aligned} \right\} \quad (i \neq 1, t) \end{aligned} \quad (6)$$

第一式は図5の最上部の株価のラティスを表しており、安全利子率 r とデタミニスティック・ボラティリティ $\sigma(S_t, t)$ を用いて翌期の株価を表現している。また、第二式は最下部の株価のラティス、第三式はそれ以外のラティスの中身の株価を同様に表している。本研究では式(6)のデタミニスティック・ボラティリティ $\sigma(S_t, t)$ に、節2.1の3つのパラメータモデルを当てはめて、実際のマーケット価格とのフィッティングを試みる。

2. 3 本研究の目的

本研究の目的は、満期におけるマーケットオプション価格をフェアバリューであるとして、3種のデタミニスティック・ボラティリティ・モデルを仮定したうえでラティスの構築を行い、マーケット価格との誤差を最小化する。その際にはモデルのロバスト性を検証するために価格誤差とそのパラメータを検証する。さらには、マーケット価格との誤差が非常に小さい場合において、構築したラティスを用いて、未上場オプションであるノックアウト・バリア・オプションの時価評価を各モデルで行い、価格差の検証を行う。

3. モデル最適化の目的関数と分析手法

本研究では、実際のマーケットオプション価格との誤差を最小化することにより、マーケットにフィットさせたデタミニスティック・ボラティリティのパラメータを求める。対象となるオプションの種類は、アット・ザ・マネー(以下 ATM, 日本オプション市場(大阪証券取引所)では正確な意味で現在の株価と権利行使価格が一致する ATM は必ずしも存在しない。そこで、本研究では最も現在の株価が権利行使価格に近いオプションを ATM と設定した。), アウト・オブ・ザ・マネー1(ATM より権利行使価格が 500 円高くなる毎に OTM は存在。以下 OTM1), OTM2, OTM3, の計 4 つのオプションを用いて価格差の最小化を試みる。その際には節 2.1 で示した 3 種のデタミニスティック・ボラティリティを仮定して日本オプション市場での検証を行う。ここでは、3 種のデタミニスティック・ボラティリティに共通の目的関数を示したあと、各モデルの制約条件(3 パラメータモデルと 7

パラメータモデルは同じ制約条件で2パラメータとは多少異なる。)を述べる。本研究での価格最適化で実行した目的関数¹は以下の式で表される。

$$\text{Min}_{a,b,c} \sum_{i=0}^N (P'_i - P_i)^2 / N \quad (7)$$

ここで、 P は実際のオプション価格、 P' は本研究のオプション価格、 i はオプションの種類を表し、 $i=0$ でATMオプション、 $i=1$ でOTM1、 $i=2$ でOTM2、 $i=3$ でOTM3を示す。また、2パラメータモデル、3パラメータモデル、7パラメータモデルそれぞれの制約条件は表1のようにした。

7Pモデルにおいて c (or f) が0の場合、 a 、 b (or e) and d (or g)などのパラメータが一意に定まらない可能性は原理的に存在する。しかし、実証分析において c (or f) が0となるケースは極めて稀であり、このようなケースは最適化を47回行った本実証分析においては一度も生じなかった。

表1 各モデルの制約条件

DVM	Functional Constraint
2Parameter Model	$0 < \sigma(S_t, t) \text{ for } S_0 - 10000 \leq S_t \leq S_0 + 10000$
3Parameter Model	$0 < \sigma(S_t, t) < 1 \text{ for } 0.5 \leq \frac{S_t}{S_0} \leq 1.5$
7Parameter Model	

4. 実証分析

ここでは、実証分析に用いたオプションデータと分析設定を示したうえで、分析結果とその考察を与える。

Remark1

本研究では目的関数に関して、価格差を最小化する式(7)のように設定する場合だけでなく、価格差の割合を最小化する場合も実証を行った。以下にその式を示す。

$$\text{Min}_{a,b,c} \sum_{i=0}^N \left(\frac{P'_i - P_i}{P_i} \right)^2 / N \quad (8)$$

式(8)では実際のオプション価格で除することにより、価格差の割合を最小化している。しかし、式(8)のように目的関数を設定すると、オプション価格は順にATM、OTM1、OTM2、OTM3で下がっていくことからOTM3の最適化に最もウエイトが置かれて最適化が実行されてしまう。その結果、最も取引量が多く、オプション価格が大きいATMの最適化にウエイトが置かれなくなり、OTM3の最適化にウエイトが最も置かれる。そこで本研究では、全体としてマーケット価格へのフィットが困難になる式(8)ではなく、式(7)を目的関数に設定した。

4. 1 実証分析データ、分析設定

実証分析データは、2003年5月から2007年3月の日経225オプション市場の残存期間が15営業日のコール・オプション価格を使用する。大阪証券取引所が公表するオプション価格を用いるが、オプション価格のデータセットの中には外れ値や取引がなく価格データが欠損している場合もある。そこで、オプション価格のデータセットを実証分析に利用する際には、比較的取引量の多いATM, OTM1, OTM2, OTM3のデータを用いた。分析設定として、使用したPCスペックはIntel(R) Pentium(R) M processor 1.73GHz, 最適化ツールはMicrosoft(R) Excel 2003のソルバー, ラティスの数は200ラティス, 安全利子率 r は0%とした。安全利子率は分析期間大半においてゼロ金利政策下であったのに加え、2007年3月時点においても金利は低水準であるので0%とした。

本研究の推定手法では、ラティスの数を20程度に減らした場合でもラティス数が200の場合と比較して式(7)の目的関数の値(ヨーロッパン・オプションの市場価格と対応するモデル価格との差)は、ほとんど変わらない。その理由は、ラティスが粗くても(本来の連続モデルとの乖離が大きくても)最適化モデルに基づく推定手法によって目的関数の値は小さくなり得るからである。しかし、ラティスの数を20程度にまで減らすと、本来の連続モデルとラティスを用いた離散モデルとの乖離が大きくなり不適切と考えられる。そこで、解析解が得られるBSモデルの枠組みで、本ラティスを採用した場合の連続モデルと離散モデルとの誤差を確認しておく。図6は、本研究モデルの枠組みのもと、現在の株価:15,000, 権利行使価格:15,000, 無リスク金利:1%, 満期:1ヶ月のヨーロッパンコール・オプションを対象として、目的関数(7)の値を縦軸に、ラティスの数を横軸に示したものである。図6によれば、ラティス数が100程度あれば連続モデルと離散モデルとの乖離は殆ど見られないことが確認される。また、本研究モデルと通常の二項モデルであるCox, Ross, and Rubinstein(1979)(以下CRRと呼ぶ)との価格差の収束性を見るために、図6にはCRRでの結果も示した。これを見ると収束性はほぼ同じであり、ラティス数が200という設定がある程度妥当であると言える。

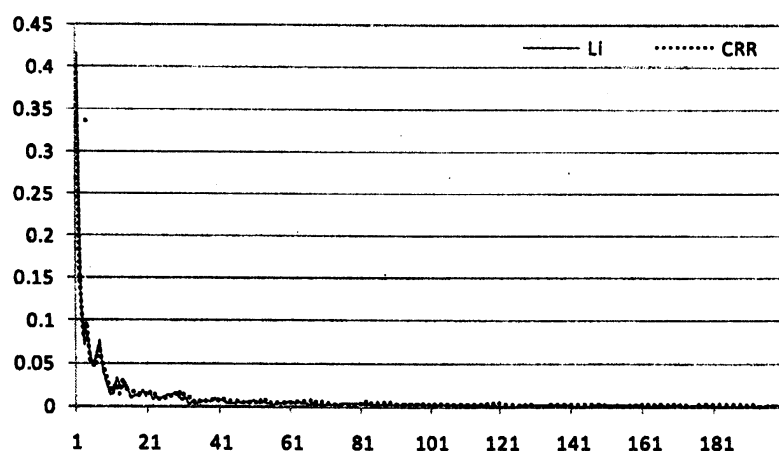


図6 ラティスの収束性

4. 2 分析結果と考察

＜local volatility の種類とオプション市場価格＞

図7には、 z 軸に実際のマーケット価格と本研究で行った3種のモデル価格との絶対誤差の平均を、 x 軸に3種のパラメータモデルを、 y 軸にATM, OTM1, OTM2, OTM3を示した。2パラメータモデルは3変数や7パラメータモデルに比べると、絶対誤差がかなり大きくなっている。これは、2パラメータモデルにはlogのルートがあることで、原資産価格に対してほぼボラティリティが一定となってしまう、マーケットとフィットしにくいと考えられる。ATMでの実際のマーケット価格の平均値は約240円であり、15円の誤差は価格に占める割合は6%であり、かなり大きな誤差である。対して3パラメータモデルと7パラメータモデルの絶対誤差平均はATMでの価格に占める割合は0.3%以下とほとんどなく、デタミニスティック・ボラティリティ関数がマーケットとフィットしている。またATM付近のオプション価格はOTMより価格は高いにも関わらず、ATMからOTM3まで押しなべて誤差がないことから、本研究で設定している目的関数はオプション価格を適切に最小化していると確認できた。図7より、2パラメータモデルのフィットが難しいと判断できたので、今後3パラメータモデル、7パラメータモデルに注目していく。

図8には、ATMの場合の絶対誤差を縦軸に、オプション満期の時系列を横軸にして示した。7パラメータモデルと3パラメータモデルを比べると、概して7パラメータモデルの絶対誤差の方が小さくなっており7パラメータモデルの方がよりフィットしていることが確認できる。これは7パラメータモデルには、3パラメータモデルに含まれているスキューだけでなく、スマイルも含まれているためフィットがよくなると考えられる。例えば、最も誤差が大きいところで3パラメータモデルの誤差は約5円となっており、7パラメータモデルは0.1円程度である。このことから7パラメータモデルに含まれるスマイル成分の影響により、誤差が少なくなっていると考えられる。

図9、図10、図11には、図8と同様に、それぞれOTM1, OTM2, OTM3の場合の絶対誤差を時系列で示した。これらの図を見ると、図8と同様に7パラメータモデルの方が概してフィットしているのが分かる。図8から図11において3パラメータモデルと7パラメータモデルの誤差を比べるために、例えば誤差が4円以上と比較的大きい場合に注目すると、3パラメータモデルは誤差が4円以上になる時が10箇所と多いが、7パラメータモデルは3箇所と少なく、誤差の値自体も3パラメータモデルより小さい。このことからATMだけでなく、ATM～OTM3までの7パラメータモデルのフィットの高さを確認することができる。

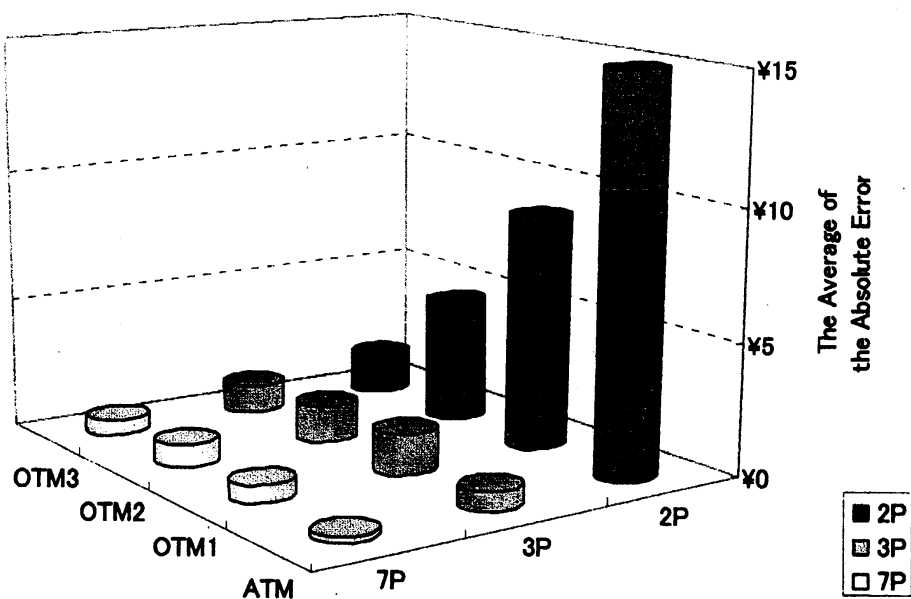


図7 絶対誤差平均

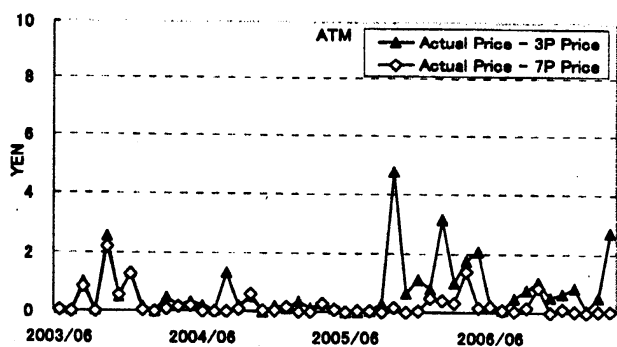


図8 ATMでの絶対誤差平均

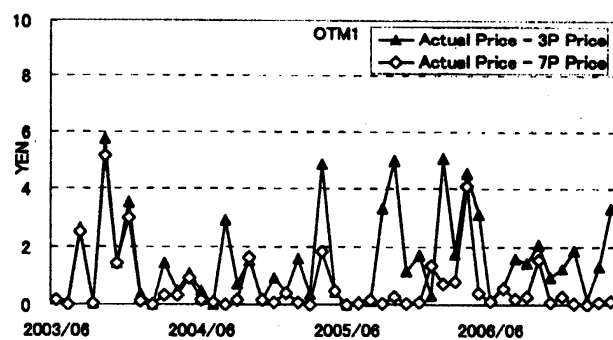


図9 OTM1での絶対誤差平均

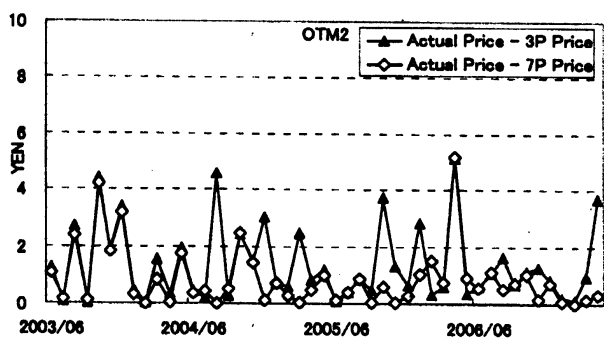


図10 OTM2での絶対誤差平均

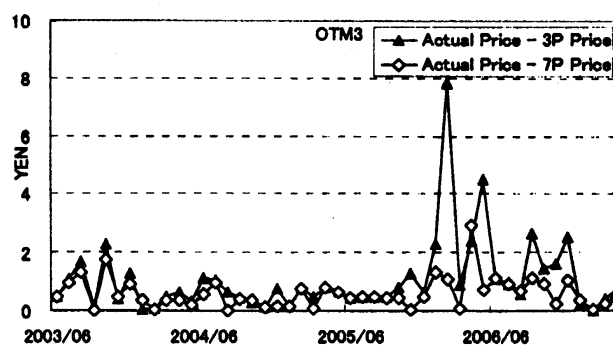


図11 OTM3での絶対誤差平均

<パラメータのロバスト性>

次に本研究モデルにおける最適化のパラメータのロバスト性を見るために、3パラメータモデル、7パラメータモデルのパラメータをそれぞれ図12～図18に時系列で示した。時系列的に見ると概してどのパラメータモデルにおいてもそれほど大きなブレはなく比較的安定した値をとっており、パラメータ数を増やすことによって価格を過度にフィットさせているわけでないと言える。また、7変数のパラメータ b (スキュー成分の係数)とパラメータ e (スマイル成分の係数)に注目すると、パラメータ b 、パラメータ e ともに概して正の値をとっている。これはスキュー成分、スマイル成分が目的関数を最的化する上で重要な成分であり、7パラメータモデルに含まれているスマイル成分によりフィットがよくなるという先ほどの考察の補足となると考えられる。

ここではパラメータを時系列で考察し、主に3パラメータモデルと7パラメータモデルにおける最適化パラメータのロバスト性が確認することができた。

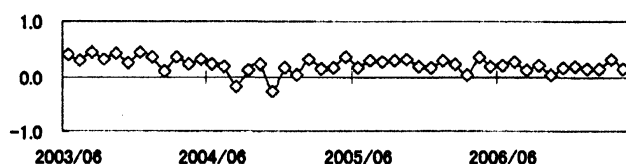


図12 7パラメータ a

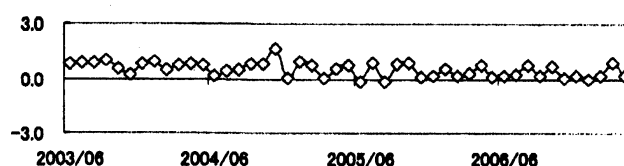


図13 7パラメータ b

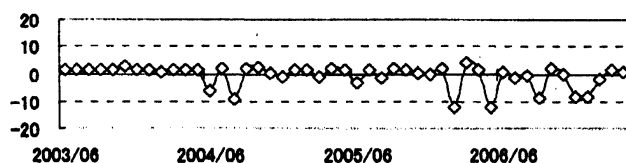


図14 7パラメータ c

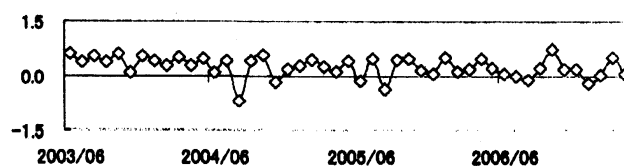


図15 7パラメータ d



図16 7パラメータ e



図17 7パラメータ f

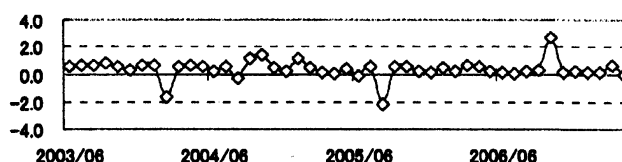


図18 7パラメータ g

＜バリアオプションを用いたラティスの形状の検証＞

ここまでの検証では、市場価格に基づき、3つの7パラメータモデルで最適化を実行した結果、7パラメータモデルの高いフィッティングが確認できた。パラメータ数が多い方が誤差は小さいというのは直感と合致するが、3パラメータ、7パラメータ、両モデ

ルにおいて誤差が小さい場合において、ラティスの形状やオプション価格はまったく同じなのだろうか？ここでは一例として3パラメータモデル、7パラメータモデルの両モデルにおいてマーケット価格との誤差が少ない場合において、構築したラティスの形状がどのようになっているかを見ていく。ラティスの形状を見る方法としては、ラティスの形状にオプション価格が依存するノックアウト・バリア・コール・オプションの価格評価を行うことで検証する。

ノックアウト・バリア・コール・オプションとは、ベースとなっているのは通常のヨーロッパン・コール・オプションであり、オプション期間中に一度でもバリア価格に原資産価格が到達すると権利が消滅してしまうオプションである。

図19には満期が2005年4月、7パラメータモデルのノックアウト・バリア・コール・オプション価格(初期価格11,776円、権利行使価格が11,776円、満期15日)から3パラメータモデル価格を引いた価格差を示した。図19を見るとバリア価格を初期価格から徐々に上げていくと価格差が大きくなり、最大で10円の差が生じ、さらにバリア価格が高くなると通常のコール・オプションに近づくので価格差は0に近づいていることが分かる。例え、満期でのオプション価格が同じであってもラティスの中身の形状は異なる可能性があり、バリア価格に影響を及ぼすと考えられる。ラティスの中身の形状としては、7パラメータモデルの方が3パラメータモデルより価格が低いことからラティスの形状は3パラメータモデルの方が初期価格付近に凝縮(集まっている)されていると言える。なぜならバリア価格が高いということはバリアに株価のラティスが到達しにくいからである。

図20には図19と同様に満期が2004年11月における、ノックアウト・バリア・コール・オプション(初期価格10,491円、権利行使価格が10,491円、満期15日)の価格差を示した。図20を見るとバリア価格を初期価格から徐々に上げていくと7パラメータモデルの方が価格は大きくなり、さらに上げていくと3パラメータモデルの方が価格は大きくなる。そして、さらにバリア価格が高くなると、図19同様に通常のコール・オプションに近づくので価格差は0に近づいていることが分かる。

最後に図19と図20の違いがなぜ生じるかに関して考察する。この差が生じる原因として、節3で述べた目的関数式(7)の影響が関連する。目的関数式(7)は、マーケット価格との価格最適化を実行している為、ラティスの形状がモデルによってどのような価格をとるかまでは決定できない。つまり、ラティスの形状が異なる場合にどの形状のものが株価のダイナミクスをより反映しているのかを今後詳しく検証する必要があると分かった。

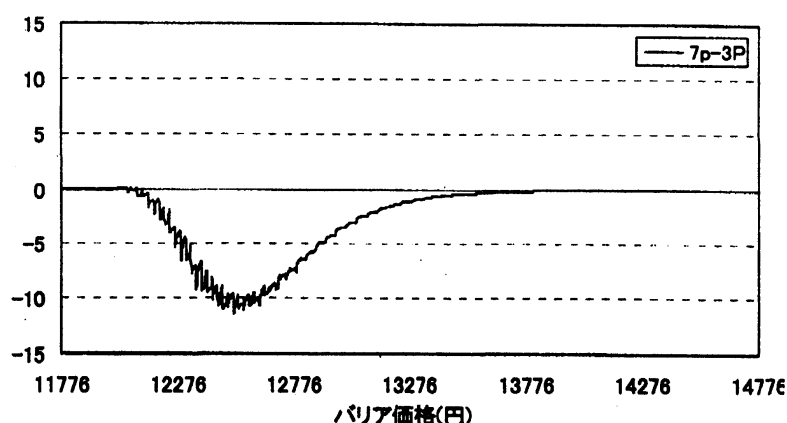


図 19 バリアオプションの価格差(2005 年 4 月)

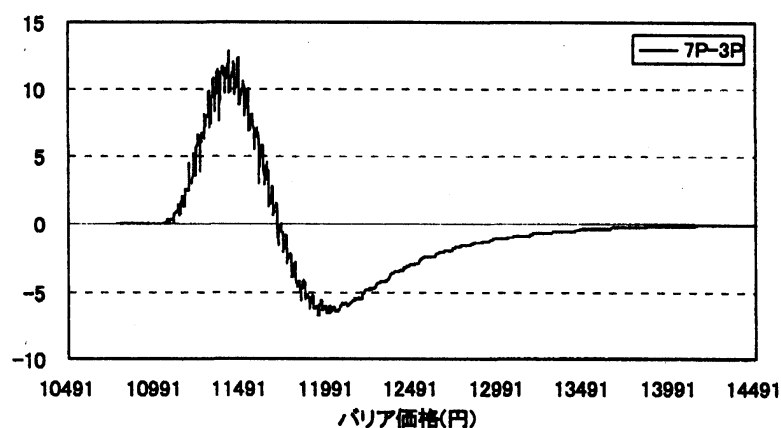


図 20 バリアオプションの価格差(2004 年 11 月)

5. まとめと結語

本研究では、まず Li(2000/2001)を用いて日本オプション市場において日経 225 ユーロピアン・オプションの価格付けを行った。その結果、ラティス数に対するブラックショールズモデルとの価格差は、通常の CRR と同程度であると確認できた。また、3 種のデタミニスティック・ボラティリティ・モデルを仮定したうえでラティスの構築を行い、ATM から OTM3 までのマーケット価格との誤差を最小化し、マーケット価格とのフィットを試みた。その結果、スキュー成分とスマイル成分のある 7 パラメータモデルのマーケットとのフィットの高さと、パラメータのロバスト性が確認できた。

さらに満期でのオプション価格が同じであるという前提のもと、3 パラメータモデルと 7 パラメータモデルとでノックアウト・バリア・オプション価格を求め、価格差を比較すると中身のラティスの形状が異なることが確認できた。また、未上場オプションであるエキゾティックオプションの時価評価を試みた結果、価格誤差は 3 パラメータモデルと 7 パラメータモデルである程度

あることが確認でき、実務の価格付けの際にはこの点を考慮に入れて慎重に価格付けをする必要があると確認できた。

参考文献

- [1] Cox, J. C., S. A. Ross, and Mark Rubinstein.: "Option Pricing: A Simplified Approach," *Journal of Financial Economics*, March (1979)
- [2] Derman, E.: Kani, I.: "Riding On The Smile." *Risk* 7: 32-39 (1994)
- [3] G. Brown and C. Randall : "If the skew fits" *Risk* , Vol.12, No. 4, pp. 62-65 (1999),
- [4] Lee P., W. Limin and A. Karim : "Index volatility surface via moment-matching techniques" *Risk* , Vol.16, No. 12, pp. 85-89 (2003),
- [5] Li, Y.: "A new algorithm for constructing implied binomial trees: does the implied model fit any volatility smile?" *Journal of Computational Finance*, Vol.4, No. 2, pp. 68-95 (2000/2001),
- [6] Miyazaki, K.: "An Introduction to Market-based Option Pricing and its Applications", *Journal of Operations Research Society of Japan*. (2007, to appear)
- [7] Nakamura, H. and Shiratsuka, S : "Extracting Market Expectations from Option Prices: Case Studies in Japanese Option Markets," *Monetary and Economic Studies*, 17, 1-44 (1999).
- [8] Peter Lee, Limin Wang and Abdelkerim Karim.: "Index volatility surface via moment-matching techniques" *Risk* , Vol.16, No. 12, pp. 85-89 (2003)
- [9] Rubinstein, M.: "Implied Binomial Trees," *The Journal of Finance*, 49, 771-818,
- [10] Yanmin Li.: "A new algorithm for constructing implied binomial trees: does the implied model fit any volatility smile?" *Journal of Computational Finance*, Vol.4, No. 2, pp. 68-95 (2000/2001)